CONTRIBUTIONS A L'ESTIMATION NON LINEAIRE ET AUX SYSTEMES DE PARTICULES EN INTERACTION

Avec applications au filtrage non linéaire, contrôle optimal, formules de Feynman-Kac et opérateurs de Schrödinger.

Pierre DEL MORAL
Chargé de recherches au C.N.R.S.
Laboratoire de Statistique et Probabilités
de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III

Introduction

Le filtrage de signaux numériques et le contrôle optimal de processus sont deux des thèmes fondamentaux des sciences de l'ingénieur et ils sont au coeur des mathématiques appliquées. Bien que les sujets développés dans cette thèse dépassent le cadre du filtrage et du contrôle c'est à ce carrefour que prennent source mes travaux de recherches.

S'il est possible d'aborder ces questions sous divers angles, fonctionnels, spectraux ou géométriques c'est la théorie des probabilités qui m'a séduit et qui m'a guidé dans la plupart de mes investigations. C'est donc dans le cadre probabiliste et au fil du développement des quatre axes de recherches suivants que le filtrage et le contrôle de processus seront abordés :

1. Formules de Feynman-Kac et systèmes de particules en interaction.

2. Algorithmes génétiques et optimisation globale de fonctions numériques.

3. Contraction d'opérateurs Markoviens et de semigroupes non linéaires.

4. Calcul des probabilités idempotentes.

Le thème essentiel de cette thèse concerne sur les approximations de formules de Feynman-Kac par des systèmes de particules en interaction et avec branchement. Ma principale contribution porte sur le développement de nouveaux modèles particulaires à temps discret ou continu et sur l'analyse de leur comportement asymptotique lorsque la taille des systèmes et/ou l'horizon temporel tend vers l'infini.
Nous avons étudié la qualité numérique et la convergence de ces modèles particulaires sous différents angles. Ainsi, au gré de diverses techniques mathématiques et probabilistes, nous avons analysé des lois faibles des grands nombres et des estimations d'erreurs pour les normes $\mathbb{L}_p$, des théorèmes de la limite centrale et des principes de grandes déviations classiques et supérieures sur les trajectoires ou les profils de densité, la convergence de processus empiriques indexés par des classes de fonctions, des estimations et théorèmes de convergence uniforme dans le temps, des propagations croissantes du chaos pour des blocs de particules ou des horizons de temps, ... Nous avons présenté la plupart des ces résultats dans un article de synthèse [42] pour le "Séminaire de Probabilités".

Outre la modélisation et l'analyse numérique de ces schémas un des objectifs essentiels de mon travail a aussi consisté à préciser et à développer les liens parfois très étroits qui existaient entre certain domaines parfois trop cloisonnés de la physique, des mathématiques et des sciences de l'ingénieur.

Pour motiver cette synthèse on présente ici une liste non exhaustive et schématique des principaux sujets qui seront ainsi abordés par la suite:

- *Estimation non linéaire*: prédiction/filtrage/lissage en traitement du signal, estimation de trajectoires, simulation de lois conditionnelles, contrôle optimal et régulation non linéaire.

- *Algorithmes génétiques :* algorithmes basés sur des méchanismes de l'évolution naturelle, dynamique d'évolution de populations, processus historiques et arbres généalogiques.

- *Physique :* équations généralisées de Boltzmann, répartition de particules markoviennes dans des environnements avec obstacles, analyse spectrale d'opérateurs de Schrödinger et de semigroupes de Feynman-Kac.

- *Processus à valeurs mesures :* processus à temps discret, systèmes de particules en interaction de type Moran, superprocessus de branchement de Dawson-Watanabe et de Fleming-Viot.

- *Équations aux dérivées partielles stochastiques :* équations de Zakai, de Kushner-Stratonovitch et équation robuste du filtrage.

Dans un ouvrage en cours de rédaction [5] nous développons les liens entres ces différents sujets. Par ailleurs nous mettons en lumière les liens existants entre la résolution particulaire d'équations non linéaires à sauts ou diffusives de type McKean-Vlasov et la résolution de systèmes à temps discret. Nous appliquons ces techniques aux problèmes de filtrage discrets, semi-discrets ou continus et de régulation non linéaires.

Le second thème porte sur l'application des algorithmes génétiques en optimisation globale de fonctions numériques. Bien que les modèles étudiés soient similaires aux algorithmes particulaires du filtrage la principale analyse que nous avons développée n'est plus fondée sur les méthodes de Monte Carlo et la théorie des systèmes de particules en interaction.
On s'intéresse ici au comportement en temps long des populations à taille fixée. On introduit des schémas de température et on analyse la dynamique d'évolution de ces algorithmes à transitions rares par des techniques de semigroupes basées sur les notions d'entropie relative et les constantes log-Sobolev. On propose d'autre part une notion de stabilité et une stratégie de test ensembliste permettant d'analyser les extrema des fonctions d'énergie virtuelle.
Dans une autre direction de recherche nous avons aussi examiné des problèmes d'optimisation de fonction de coût moyen. Pour cela nous avons proposé et analysé des algorithmes de recuit généralisé liés à des potentiels aléatoires et non homogènes dans le temps.
Enfin nous avons présenté et étudié divers modèles d'algorithmes génétiques avec

notamment un algorithme naturel très souple permettant des séquences aléatoires de sélections ou de mutations.

Le troisième thème de cette thèse concerne la régularité d'opérateurs markoviens et plus généralement celle de semigroupes non linéaires de type Feynman-Kac-Schrödinger. Bien que ce sujet est été influencé par des problèmes de stabilité asymptotique des équations du filtrage non linéaire cette thématique à part entière est plus spécifiquement reliée au développement des idées présentés par Dobrushin sur la stabilité et la régularité de semi-groupes markoviens.

- Une première partie de cette étude porte sur les propriétés de contraction de semigroupes de Feynman-Kac non linéaires pour la distance en variation totale entre mesure à l'aide du coefficient d'ergodicité de Dobrushin. La stratégie que nous avons proposée consiste à étudier les propriétés de contraction du semigroupe d'évolution d'un processus markovien non homogène sous une nouvelle probabilité de référence définie par les formules de Feynman-Kac sous jacentes.

- La seconde partie de l'étude propose des résultats de contraction d'opérateurs intégraux sur l'espace des probabilités muni d'une ϕ-entropie relative générale et abstraite. La classe d'entropies relatives considérées contient entre autres les normes L_p, les distances en variation totale et de Kakutani-Hellinger, l'entropie relative de Kullback ou en encore celle de Havrda-Charvat.
  A la différence des études classiques sur la stabilité de chaînes de Markov notre étude n'utilise pas (en supposant qu'elle existe) la mesure invariante des transitions de Markov en question.
  On propose une estimation universelle des ces coefficients de contraction en terme du coefficient d'ergodicité de Dobrushin. Enfin on présente diverses estimations dans le cadre des normes $\mathbb{L}_2$ et des entropies relatives de Kullback en terme des trous spectraux, des constantes de log-Sobolev classiques et modifiées.

Le quatrième et dernier thème est directement issu de ma thèse de doctorat. Il porte sur le développement d'un calcul des probabilités idempotentes offrant une interprétation probabiliste des problèmes de contrôle optimal déterministe. Cette démarche permet d'une part d'étendre l'intuition probabiliste au contrôle optimal et d'autre part elle induit de nouvelles formes d'analyse et d'approximation de ces problèmes.
Dans ce cadre l'analogue des solutions faibles d'équations d'évolution de distributions d'un processus de Markov devient une alternative aux solutions de viscosité d'équations d'Hamilton-Jacobi associées à un processus de décision.

Cette approche offre aussi un cadre naturel pour étudier certaines équations de dilatation et d'érosion d'images en morphologie mathématique.
Les descriptions probabilistes de mesures invariantes d'opérateurs de Bellman conduisent aussi à une description explicite de points fixes d'opérateurs non-expansifs et l'analogue de la formule de Dynkin permet de mesurer la qualité de certains sous ensembles de contrôles admissibles.

Dans la suite de cette synthèse on présente nos principales contributions dans chacune de ces thématiques. On situe en détail nos travaux dans la littérature existante et on précise au fil de chaque article les développements que nous avons effectués. Pour illustrer ces descriptions et motiver cette thèse nous éclairons certains modèles et nous énonçons brièvement une partie des résultats que nous avons obtenus.

La plupart de ces études sont le fruit de nombreuses collaborations avec René Carmona, Himilcon Carvalho, Michel Doisy, Leila Kallel, Michael Kouritzin, Michel Ledoux, André Monin, Jean-Charles Noyer, Philip Protter, John Rowe, Gérard Salut, Tim Zajic et plus particulièrement avec Dan Crisan, Alice Guionnet, Jean Jacod, Terry Lyons et Laurent Miclo.

Table des matières

1 Formules de Feynman-Kac et systèmes de particules

Le coeur de cette thèse concerne l'analyse et les approximations particulaires de formules de Feynman-Kac de la forme

$$\eta_t(f) = \gamma_t(f)/\gamma_t(1) \qquad \text{avec} \qquad \gamma_t(f) = \mathbb{E}(f(X_t)\ Z_t(X)), \qquad t \in I$$

avec selon si le temps est discret $n \in I = \mathbb{N}$ ou continu $t \in I = \mathbb{R}_+$

$$Z_n(X) = \prod_{p=0}^{n-1} g_n(X_p) \qquad \text{ou} \qquad Z_t(X) = \exp \int_0^t V_s(X_s)\ ds.$$

Sauf mention contraire les fonctions g_n et V_s sont supposées strictement positives, et X désigne un processus markovien sur un espace mesurable. L'essentiel des résultats que nous avons obtenus est décrit dans un article de synthèse [42] et plus récemment dans [40, 45, 44]. En utilisant la formule discrète ou continue

$$\gamma_n(f) = \eta_n(f) \times \prod_{p=0}^{n} \eta_p(g_p) \quad \text{ou} \quad \gamma_t(f) = \eta_t(f) \times \exp \int_0^t \eta_s(V_s)\ ds,$$

il est important de noter que les approximations des mesures normalisées η_s, $s \leq t$, permettent aussi de calculer les mesures positives γ_t. Dans le cadre des méthodes particulaires avec interaction ces mesures approchées seront par construction sans biais.

1.1 Méthodes particulaires stochastiques

En amont de ces travaux on trouve les articles [16, 18] qui proposent un nouveau modèle de systèmes de particules en interaction permettant de résoudre numériquement les équations du filtrage non linéaire et à temps discret. Rappelons que dans ce cadre η_t représente la loi conditionnelle de l'état X_t d'un signal par rapport à ses observations $(Y_s\,, s \leq t)$. Ces études offrent une première preuve rigoureuse des schémas heuristiques présentées dans [19, 49] et indépendamment par Gordon, Salmon et Smith dans [58] et plus récemment par Kitagawa dans [62].

On démontre dans cette première analyse une loi faible des grands nombres et des estimations d'erreurs pour les normes $\mathbb{L}_2$. Les semigroupes et les martingales introduites dans cette étude seront aussi à la base par la suite de différents articles sur le comportement en temps long, les fluctuations des systèmes de particules ou sur la convergence des processus empiriques sous jacents.

Outre ces fondements analytiques cet article présente une description originale de l'équation du filtrage non linéaire comme limite d'un algorithme génétique lorsque la taille des populations tend vers l'infini.

Ces premiers travaux théoriques viennent compléter les études techniques [46, 49, 51, 50] auxquelles j'avais participé pendant mon doctorat au L.A.A.S.-C.N.R.S. de Toulouse. Ces rapports techniques concernent l'application de ces schémas particulaires aux traitement du signal radar, sonar ou gps ("global positioning system"). Ils ont par ailleurs conduit aux articles dans des revues de traitement du signal [48] et d'aérospatiale [6].

Ces schémas d'approximation des équations du filtrage non linéaire se comportent comme des grilles particulaires stochastiques adaptées aux observations reçues. Leur qualité numérique offre une alternative aux méthodes de Monte Carlo plus classiques basées sur l'évolution de copies indépendantes du signal pondérées par leur vraisemblance. Ces dernières sont présentées dans ma thèse de doctorat et dans les articles [17, 52].
L'analyse numérique de ces schémas sans interaction est bien plus simple. Dans l'article [17] on propose une technique de régularisation et une première condition d'observabilité permettant d'obtenir pour des modèles à temps continu des estimations uniformes dans le temps. Dans un second article [22] on utilise les résultats de stabilité du filtre optimal obtenus par Ocone et Pardoux dans [69] pour contrôler uniformément dans le temps les erreurs quadratiques uniquement en fonction de l'ergodicité du signal. Dans un récent article [65] Kurtz et Xiong étendent ces schémas sans interaction pour résoudre des équations aux dérivées partielles avec des perturbations cylindriques spatio-temporelles et proposent une nouvelle analyse de ces schémas sur des intervalles de temps compacts.

L'article [16] est aussi à l'origine de l'élaboration d'une stratégie universelle d'approximation particulaire de systèmes dynamiques à temps discret et à valeurs mesures de la forme

$$\eta_n = \Phi_n(\eta_{n-1})$$

où Φ_n désignent des transformations de mesures de probabilités. Les mesures η_n sont approchées lorsque $N \to \infty$ par les mesures empiriques $\eta_n^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\xi_n^i}$ associées à des systèmes de particules en interaction. Ces systèmes sont définis récursivement de la façon suivante :

$$\xi_n = (\xi_n^1, \ldots, \xi_n^N) \;\; \text{i.i.d.}|\xi_{n-1} \;\sim\; \Phi_n(\eta_{n-1}^N).$$

Les fondements et les premiers éléments d'analyse liés aux lois des grands nombres, aux fluctuations locales et aux grandes déviations supérieures de ces systèmes de particules généraux et abstraits sont décrits dans l'article [21].

Dans le cadre des formules de Feynman-Kac le système précédent est un algorithme génétique à deux sous étapes de mutation et sélection

$$\xi_n \xrightarrow{\text{Sélection}} \widehat{\xi}_n \xrightarrow{\text{Mutation}} \xi_{n+1}.$$

Connaissant ξ_n, le système intermédiaire $\widehat{\xi}_n = (\widehat{\xi}_n^1, \ldots, \widehat{\xi}_n^N)$ est formé de N variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi discrète

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{g_n(\xi_n^i)}{\sum_{j=1}^{N} g_n(\xi_n^j)} \, \delta_{\xi_n^i}.$$

Durant l'étape de mutation chaque particule évolue simplement selon les transitions élémentaires du processus sous-jacent X.

Dans la plupart des études que nous avons développées ce processus X est à valeurs dans un espace mesurable abstrait. Ce cadre général nous a permis de traiter des processus trajectoriels. Dans cette situation les algorithmes particulaires approchés sont basés sur des étapes de sélection de trajectoires et les mutations associées peuvent être vues comme des déformations élémentaires de chemins. Cette observation essentielle est décrite en partie dans [42]. Dans l'article [45] elle sera aussi à la base de l'analyse asymptotique d'arbres généalogiques. Elle permettra de résoudre des problèmes de lissage et d'estimation de trajectoires de signaux à l'aide des processus historiques d'algorithmes génétiques.

Bien que le filtrage non linéaire soit le thème directeur et la principale motivation de mes recherches la plupart des articles sont construits dans le cadre de modèles de Feynman-Kac abstraits pouvant ainsi s'interprêter dans diverses disciplines. Dans ce qui suit on commente quelques unes de ces applications :

- Tout d'abord dans le cadre discret si les fonctions $g_n = 1_{A_n}$ sont des indicatrices d'ensembles mesurables A_n alors avec les précautions usuelles nous avons

  $$\eta_n(dx) = \mathbb{P}(X_n \in dx | X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1})$$

  et dans le cadre trajectoriel décrit dans [45]

  $$\begin{aligned} &\eta_n(d(x_0, \ldots, x_n)) \\ &= \mathbb{P}((X_0, \ldots, X_n) \in d(x_0, \ldots, x_n) | (X_0, \ldots, X_n) \in (A_0 \times \ldots \times A_{n-1})). \end{aligned}$$

  Les articles [32, 33] permettent de traiter des fonctions g_n pouvant s'annuler. Dans ce cadre les systèmes de particules en interaction correspondants s'expriment sous la forme d'une technique de simulation de loi de type acceptation/rejet. On peut aussi contourner cette difficulté en régularisant ces fonctions. On utilisera alors les résultats de robustesse décrits dans [30].

- Les formules de Feynman-Kac sont aussi utile pour décrire les lois de processus évoluant dans des environnements avec obstacles. Dans ce cadre les fonctions V_t sont plutôt supposées négatives et η_t représente la loi d'un particule X_t tuée aux taux $|V_t|$ sachant qu'elle existe encore à ce même instant. Si T désigne sa durée de vie on a dans cette interprétation

$$\eta_t(dx) = \mathbb{P}(X_t \in dx | T > t) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T > t) = \exp \int_0^t \eta_s(V_s)\, ds.$$

- Dans l'article [44] on montre comment ces techniques permettent de calculer certaines quantités spectrales de semigroupes de Feynman-Kac-Schrödinger. Pour illustrer cet article on remarque qu'à temps continu et pour un potentiel homogène $V_t = V$ le coefficient de Lyapunov logarithmique $\lambda(V)$ du semigroupe

$$P_t^v(f)(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t)\ Z_t(X))$$

coïncide avec le haut du spectre de l'opérateur de Schrödinger $L^v = L + V$. Il peut s'écrire $\lambda(V) = \lim_{t\to\infty} \sup_x \lambda_t^x(V)$ avec

$$\lambda_t^x(V) = \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x(\exp[\int_0^t V(X_s)ds]) = \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s^{(x)}(V)ds$$

où $\eta_t^{(x)}$ désigne le flot des distributions de Feynman-Kac issues de $\eta_0 = \delta_x$. Il est ainsi naturel d'estimer ce coefficient $\lambda(V)$ avec les mesures empiriques approchées $\eta_t^{(x,N)}$ et associées aux systèmes de particules issues de x en posant

$$\lambda_t^{(x,N)}(V) = \frac{1}{t} \int_0^t \ \eta_s^{(x,N)}(V)\ ds.$$

Lorsque le processus X est suffisamment mélangeant on peut trouver des constantes $c < \infty$ et $\beta \in (0, 1]$ telles que

$$\sup_{t \geq N^{\beta/2}} \mathbb{E}(|\lambda_t^{(x,N)}(V) - \lambda(V)|^2) \leq c/N^\beta.$$

1.2 Filtrage et systèmes de particules à temps discret

L'analyse fine de la convergence de ces nouveaux systèmes de particules en interaction à temps discret est développée dans une série d'articles :

- Dans [26] on propose des principes de grandes déviations sur l'espace des chemins et sur les profils de densité pour deux types de systèmes de particules avec branchements. Dans le cadre trajectoriel on suppose que les transitions Φ_n du système limite sont telles que $\Phi_n(\mu) << \Phi_n(\eta_{n-1})$ pour chaque mesure μ.

Sous cette hypothèse la loi $\mathbb{P}^{(N)}_{[0,n]}$ des systèmes de particules $\xi_{[0,n]} = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$, est absolument continue par rapport au produit $\eta^{\otimes N}_{[0,n]}$ des mesures de McKean

$$\eta_{[0,n]} = \eta_0 \otimes \ldots \otimes \eta_n$$

Pour chaque $x = (x_0, \ldots, x_n)$, $x_p \in E^N$, on note $m(x)$ et $m(x_p)$ les mesures empiriques

$$m(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{(x_0^i, \ldots, x_n^i)} \quad \text{et} \quad m(x_p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_p^i}$$

et pour toute probabilité μ sur les trajectoires on définit la fonction

$$\Phi_{[0,n]}(\mu) = \eta_0 \otimes \Phi_1(\mu_0) \otimes \ldots \otimes \Phi_n(\mu_{n-1})$$

où μ_n désignent les marginales temporelles de μ. Avec ces notations la dérivé de Radon-Nykodim de $\mathbb{P}^{(N)}_{[0,n]}$ par rapport à $\eta^{\otimes N}_{[0,n]}$ est alors donnée par la formule

$$\frac{d\mathbb{P}^{(N)}_{[0,n]}}{d\eta^{\otimes N}_{[0,n]}}(x) = \exp H_n^{(N)}(x)$$

avec

$$\begin{aligned} H_n^{(N)}(x) &= N \sum_{p=1}^{n} \int \log \frac{d\Phi_p(m(x_{p-1}))}{d\Phi_p(\eta_{p-1})} \, dm(x_p) \\ &= N \; F_n(m(x)), \quad \text{et} \quad F_n(\mu) = \int \log \frac{d\Phi_{[0,n]}(\mu)}{d\Phi_{[0,n]}(\eta_{[0,n]})} \, d\mu. \end{aligned}$$

Dans certaines conditions de régularité le lemme de Varadhan associé à des techniques de troncature permet de démontrer que les lois des mesures empiriques trajectorielles

$$\eta^N_{[0,n]} = m(\xi_{[0,n]}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{(\xi_0^i, \ldots, \xi_n^i)}$$

satisfont un principe de grandes déviations avec la bonne fonction de taux

$$\mathrm{Ent}(\mu | \Phi_{[0,n]}(\mu)) = \mathrm{Ent}(\mu | \eta_{[0,n]}) - F_n(\mu).$$

L'analyse des profils de densité est fondée sur la méthode de Laplace et permet de relaxer certaines des hypothèses nécessaires dans le cadre trajectoriel.

- L'étude [27] étend les techniques de Shiga et Tanaka [70] au cadre du filtrage non linéaire. Sous une hypothèse de régularité du signal on présente dans cet article un théorème de la limite centrale dans l'espace des trajectoires. Plus précisément on démontre que les champs aléatoires sur $\mathbb{L}^2(\eta_{[0,n]})$ définis par

$$W_{[0,n]}^{(N)} = \sqrt{N}\ (\eta_{[0,n]}^N - \eta_{[0,n]})$$

convergent faiblement au sens des distributions finies vers un champ gaussien $W_{[0,n]}$ centré et de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(W_{[0,n]}(\varphi_1)W_{[0,n]}(\varphi_2)) = (C_n(\varphi_1), C_n(\varphi_2))_{\mathbb{L}^2(\eta_{[0,n]})}$$

où C_n désigne un opérateur intégral sur $\mathbb{L}^2(\eta_{[0,n]})$. L'analyse de cette convergence et l'identification de C_n sont en partie basées sur des techniques de changement de probabilités analogues à celles utilisées dans notre étude des grandes déviations. Ces dernières offrent l'avantage de travailler avec la mesure produit et des systèmes de particules indépendants. Avec les notations ci-dessus la fonction caractéristique du champ aléatoire $W_{[0,n]}^{(N)}$ peut alors s'écrire

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{[0,n]}^{(N)}}(e^{i\ W_{[0,n]}^{(N)}(\varphi)}) = \mathbb{E}_{\eta_{[0,n]}^{\otimes N}}(e^{i\ W_{[0,n]}^{(N)}(\varphi)+H_n^{(N)}(\xi_0,\dots,\xi_n)}).$$

Par des raisonnements d'uniforme intégrabilité la convergence de ces fonctions se ramène à l'étude de la convergence en loi de $H_n^{(N)}(\xi_0,\dots,\xi_n)$ sous la mesure produit.
Une développement asymptotique de la fonction $H_n^{(N)}$, le théorème de Dynkin-Mandelbaum [56] sur les statistiques symétriques et une formule de Shiga-Tanaka permettent d'identifier l'opérateur C_n et de conclure à la convergence des fonctions caractéristiques

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{[0,n]}^{(N)}}(e^{i\ W_{[0,n]}^{(N)}(\varphi)}) = e^{-\frac{1}{2}\|C_n(\varphi)\|^2_{\mathbb{L}^2(\eta_{[0,n]})}}.$$

- Le comportement en temps long et les premières estimations uniformes dans le temps sont décrits dans les articles [28, 29]. L'idée originale de ces articles est de relier les propriétés de stabilité asymptotique du système non linéaire limite avec le comportement en temps long du système de particules. Si ce dernier est suffisamment stable on montre ainsi que

  $$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|\eta_n^N(f) - \eta_n(f)|) = 0.$$

  Si cette stabilité est exponentielle on démontre que la vitesse de convergence est en $\mathrm{O}(N^{\alpha/2})$ avec $\alpha \in (0,1]$. Dans [42] on démontre que si les transitions élémentaires du signal sont suffisamment mélangeantes alors $\alpha = 1$.

Dans le cadre du filtrage, les techniques de semigroupes décrites dans ces deux articles permettent de relier les propriétés d'ergodicité du signal avec la stabilité du filtre optimal. Cette approche sera abordée plus en détail dans la seconde partie de notre synthèse concernant la contraction d'opérateurs markoviens et la stabilité de semigroupes non linéaires.

- L'article [36] étend une partie des résultats précédents dans le cadre des processus empiriques indexés par des classes de fonctions $\mathcal{F}$ et pour des semi-normes de type Zolotarev

$$\|\mu - \nu\|_{\mathcal{F}} = \sup\{\ |\mu(f) - \nu(f)|\ ;\ f \in \mathcal{F}\}.$$

  On démontre dans ce travail les analogues pour des systèmes en interaction des théorèmes de Glivenko-Cantelli et Donsker ainsi que des inégalités exponentielles de Talagrand pour des classes de fonctions polynomiales de Vapnik-Cervonenkis.
  Afin d'illustrer ces résultats on obtient pour des classes de fonction $\mathcal{F}$ régulières

$$\lim_{N\to\infty}\ \|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{F}} = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(\ \|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{F}}) = \mathrm{O}(N^{\alpha/2}),$$

  cette dernière estimation uniforme dans le temps étant satisfaite dans des conditions de stabilité exponentielle identiques à celles décrites dans les articles [28, 29].
  Enfin, suite à l'inversion explicite d'un opérateur intégral, ce travail propose une formulation de la fonction de covariance associée aux fluctuations trajectorielles en terme des semigroupes identifiés dans [16]. Dans [42] on utilisera cette représentation pour identifier les décompositions d'erreurs et les martingales qui conduiront au théorème de la limite centrale pour les profils de densité.

- Une partie de l'étude [45] concerne la propagation croissante du chaos pour des blocs de particules et des horizons temporels. On propose diverses estimations pour la distance en variation totale, l'entropie relative ou les normes $\mathbb{L}_p$. Ces résultats permettent de préciser et quantifier l'indépendance entre trajectoires. A titre d'exemple, si $\mathbb{P}_{[0,n]}^{(N,q)}$ désigne la loi des q-premières trajectoires $(\xi_0^i, \ldots, \xi_n^i)_{1\leq i\leq q}$, alors sous certaines conditions de régularité des transitions élémentaires Φ_n du système nous avons

$$\lim_{N\to\infty} q(N)n(N)/N = 0 \implies \lim_{N\to\infty} \mathrm{Ent}(\ \mathbb{P}_{[0,n(N)]}^{(N,q(N))} \mid \eta_{[0,n(N)]}^{\otimes q(N)}\ ) = 0.$$

- L'article [31] démontre dans un cadre linéaire/gaussien et par un calcul explicite des covariances liées aux fluctuations la supériorité des systèmes en interaction sur les méthodes de Monte Carlo basées sur des particules indépendantes et pondérées par leur vraisemblances non régularisées.

Parallèlement ou à la suite de ces articles nous avons exploré divers modèles de branchements ou trajectoriels à temps discret. Ces études permettent d'une part d'accélérer la vitesse d'exécution des algorithmes. Elles résolvent d'autre part et de façon récursive des problèmes de lissage et d'estimation de trajectoires de signaux non linéaires.

- Dans une première étude [13] nous présentons un modèle général permettant d'analyser divers types de mécanismes de branchement : multinomial, Poisson, Bernouilli, binomial...
  Afin d'éclairer ces modèles on précise que ces mécanismes de branchement sont tous fondés sur l'idée d'approcher une mesure de probabilité discrète $\sum_{i=1}^{N} p_i \ \delta_{x^i}$ par une nouvelle mesure discrète $\sum_{i=1}^{N} (M_i/N) \ \delta_{x^i}$ dont les pondérations sont des multiples de $1/N$. Dans l'interprétation particulaire génétique le nombre aléatoire entier M_i correspond au nombre d'individus ayant sélectionné le site x^i. En terme de branchement M_i peut aussi être vu comme le nombre de naissances d'individus en ce site. L'étape de sélection de l'algorithme génétique présenté ci-dessus correspond clairement à la situation

  $$(M_1, \ldots, M_N) = \text{Multinomiale}(N; p_1, \ldots, p_N).$$

  On peut aussi choisir les nombres M_i indépendamment les uns des autres selon des distributions de Poisson ou de Bernouilli :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_i = m) &= e^{-Np_i} \ \frac{(Np_i)^m}{m!} \\ \mathbb{P}(M_i = [Np_i] + 1) &= 1 - \mathbb{P}(M_i = [Np_i]) = \{Np_i\}. \end{aligned}$$

  Il convient de noter qu'avec dans ces deux derniers choix de lois de branchement la taille des systèmes n'est plus fixe. Elle forme une martingale à valeurs entière. D'autres variantes parfois plus performantes avec sélections périodiques, mutations régularisées ou branchements conservatifs de type Baker sont aussi présentées dans l'article de synthèse [42].

  Dans l'étude [13] on met en lumière les liens existants entre ces schémas particulaires et les superprocessus de Dawson-Watanabe et de Fleming-Viot. On démontre l'analogue des résultats de Etheridge et March [57] sur les superprocessus. Ce résultat indique que si on conditionne le système de particules avec branchements poissonniens par rapport à une taille de population fixée on retrouve l'algorithme génétique classique. On présente aussi une loi faible des grands nombres et des estimations quadratiques et une première preuve de la consistance des mécanismes de branchements de type Bernouilli proposés par Crisan et Lyons dans une série d'articles [9, 10, 11] pour des modèles à temps continu.

- Les modèles trajectoriels décrits dans l'article précédemment cité [45] permettent aussi de rendre compte de façon naturelle des lignes généalogiques complètes de chaque particules. On démontre en fait que le processus historique sous-jacent peut être à nouveau défini comme un algorithme génétique trajectoriel en interaction du même type que le précédent. Ce travail permet ainsi d'étendre sans efforts l'analyse numérique faite dans différents articles au cadre des processus historiques. L'idée clé est de considérer des formules de Feynman-Kac trajectorielles associées à un processus de Markov trajectoriel du type

$$X_n = (X'_0, \dots, X'_n)$$

où X' désigne une chaîne de Markov auxiliaire. L'algorithme génétique correspondant est alors formé de particules trajectorielles $\xi^i_n = (\xi'^i_n, \dots, \xi'^i_n)$. L'étape de sélection consiste maintenant à sélectionner des trajectoires $\widehat{\xi}^i_n = (\widehat{\xi}'^i_{0,n}, \dots, \widehat{\xi}'^i_{n,n})$ selon la loi discrète

$$\sum_{i=1}^N \frac{g_n(\xi^i_n)}{\sum_{j=1}^N g_n(\xi^i_n)} \delta_{\xi^i_n} = \sum_{i=1}^N \frac{g_n(\xi'^i_{0,n}, \dots, \xi'^i_{n,n})}{\sum_{j=1}^N g_n(\xi'^i_{0,n}, \dots, \xi'^i_{n,n})} \delta_{(\xi'^i_{0,n},\dots,\xi'^i_{n,n})}.$$

L'étape de mutation consiste simplement à étirer chaque trajectoire ainsi sélectionnée selon un déplacement élémentaire en accord avec les transitions du processus X'.

Dans le cadre du filtrage non linéaire l'une des principales contribution de cet article a été de démontrer que les mesures empiriques associées à ces arbres généalogiques convergent precisement vers la loi conditionnelle de la trajectoire du signal sur un intervalle de temps sachant la suite des observations reçues sur ce même segment. Si on considère le problème de filtrage classiquement associé au couple signal/observation (X', Y') alors avec diverses estimations d'erreurs on montre que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\widehat{\xi}'^i_{0,n},\dots,\widehat{\xi}'^i_{n,n})} = \text{Loi}(X'_0, \dots, X'_n | Y'_0, \dots, Y'_n).$$

- Dans un article plus récent [35] on propose un cadre d'étude commun des algorithmes de type génétiques et des versions discrètes de certains modèles physiques de champs moyens tel le modèle de gaz de McKean introduit dans [70]. Plus précisément on analyse des systèmes non linéaires à valeurs mesures de la forme

$$\eta_{n+1} = \eta_n \mathcal{K}_{n+1,\eta_n}$$

où $\mathcal{K}_{n+1,\eta_n}$ désigne une transition markovienne non homogène dépendant de la distribution η_n. On définit alors le système de particules en interaction approché par la donnée d'une chaîne de Markov $\xi_n = (\xi^1, \dots, \xi^N_n)$ évoluant selon les transitions élémentaires

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} \in dy | \xi_n = x) = \prod_{p=1}^N \mathcal{K}_{n+1,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x^i}}(x^p, dy^p).$$

où $dy = dy^1 \times \ldots \times dy^N$ désigne un voisinage infinitésimal du point $y = (y^1, \ldots, y^N)$ et $x = (x^1, \ldots, x^N)$. Sous une hypothèse de régularité sur les transitions $\mathcal{K}_{n,\eta}$ on présente diverses estimations d'erreurs pour les normes $\mathbb{L}_p$ entre les mesures empiriques trajectorielles $\eta^N_{[0,n]}$ et la mesure de McKean associée

$$\eta_{[0,n]}(dx_0, \ldots, dx_n) = \eta_0(dx_0)\ \mathcal{K}_{1,\eta_0}(x_0, dx_1) \ldots \mathcal{K}_{n,\eta_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n).$$

On montre ainsi que pour des fonctions tests bornées $f : E^{n+1} \to \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}(|\eta^N_{[0,n]}(f) - \eta_{[0,n]}(f)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_p(n)}{\sqrt{N}}\ \|f\|.$$

On propose de plus des estimations d'erreurs uniformes dans le temps pour les profils de densité et on présente une première comparaison entre les fonctions de covariances liées aux fluctuations de deux types de systèmes de particules en interaction.

1.3 Problèmes de filtrage à temps continu

A temps continu, les approximations particulaires du filtrage récemment proposées par Crisan et Lyons dans [9, 10, 11] ne sont donc pas directement applicables. En effet ces trois études pre-supposent une connaissance analytique explicite de certaines intégrales stochastiques intervenant dans les exponentielles de Girsanov et dans la construction du mécanisme de branchement. Nous avons examiné trois types approches permettant de contourner cette difficulté numérique.

1. Dans une première étude [12] on étend au cadre continu les modèles particulaire discrets. Cette approche est la plus classique. Elle consiste à combiner des schémas traditionnels de discrétisation du temps des équations du filtrage avec ces nouvelles techniques particulaires.
   Cette démarche permet ainsi de transférer les résultats de convergence des modèles discrets au cadre continu. Elle offre aussi les premières estimations d'erreurs d'approximations des équations aux dérivées partielles stochastiques de Kushner-Stratonovich par des systèmes de particules en interaction. Pour un problème de filtrage non linéaire classique de diffusions

   $$dS_t = a(S_t)dt + b(S_t)dW_t \qquad dY_t = h(S_t)dt + dV_t \qquad t \in [0,1]$$

   la loi conditionnelle π_t de S_t sachant les observations $(Y_s, s \leq t)$ peut être déterminée sur des fonctions régulières f dans le domaine du générateur L de S en résolvant l'équation de Kushner-Stratonovich

   $$d\pi_t(f) \ = \ \pi_t(L(f))\ dt \ + \ (\pi_t(h^\star f) - \pi_t(h^\star)\pi_t(f))\ (dY_t - \pi_t(h)\ dt).$$

   Par un examen attentif des formules de Kallianpur-Striebel on peut discrétiser dans le temps cette équation. Pour chaque pas de temps $\Delta t = 1/M$ ce système est défini sur la subdivision $t_n = n/M$ par un processus à valeurs mesures analogue à celui étudié dans le cadre du filtrage à temps discret

$$\pi_{t_n}^{(M)} = \Phi_{t_n}^{(M)}(\Delta Y_{t_n}, \pi_{t_{n-1}}^{(M)}).$$

Les transformations élémentaires $= \Phi_{t_n}^{(M)}(\Delta Y_{t_n}, .)$ dépendent d'une part du semigroupe discrétisé du signal (par un schéma d'Euler) entre t_{n-1} et t_n et d'autre part des fonctions de vraisemblance de l'accroissement observé $\Delta Y_{t_n} = Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$. Dans la situation décrite ci-dessus ces dernières peuvent être choisies de la forme

$$g_{t_n}^{(M)}(\Delta Y_{t_n}, x) = \exp\left(-|h(x)|^2/(2M) + h^\star(x)\Delta Y_{t_n}\right)$$

L'approximation particulaire de l'équation de Kushner-Stratonovitch est alors définie par l'algorithme génétique correspondant à ces modèles discrétisés. Si N le nombre de particules alors on montre que la vitesse de convergence estimée en norme $\mathbb{L}_1$ est en $\mathrm{O}(\sqrt{M} + \sqrt{N/M})$.
La vitesse exacte et les fluctuations associées tenant compte de ces deux types d'approximation restent à ce jour des problèmes ouverts.

2. Dans [33] nous abordons les problèmes de filtrage à temps continu sous un angle différent. Plus précisément on examine la situation où le couple signal/observation (S_t, Y_t) est un processus à temps continu $t \in \mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ mais les instants d'estimation et d'observation sont discrets $n \in \mathbb{N}$. L'objectif sera donc d'estimer les lois conditionnelles des états du signal S_n sachant les observations discrètes $(Y_k\,,\, k = 0, 1, \ldots, n)$.
Il semble que cette question assez naturelle n'ait jamais été abordée dans la littérature sur le filtrage. La connaissance des modèles à temps continu sous-jacents rend à nouveau essentielle l'introduction de schémas de discrétisation temporels entre chaque temps d'estimation.
On étudie dans ce travail diverses situations selon la forme du processus d'observation sans exclure le cas singulier où les perturbation de mesure sont corrélées au signal. Dans ce dernier cas nous présentons une stratégie d'approximation originale basée sur des particules en interaction évoluant dans l'espace produit correspondant au couple signal/observation.
Dans cette interprétation chaque particule $\xi_n^i = (S_n^i, Y_n^i)$ est formée d'une composante S_n^i représentative du signal et de son observation Y_n^i artificiellement bruitée.
La mutation de l'algorithme génétique approché consiste alors à faire évoluer ces couples de particules selon les équations dévolution du couple (S, Y). Pour des couples de diffusions, on utilise un schéma de discrétisation d'Euler selon un pas de temps Δt. Lorsque l'observation courante $Y_n = y_n$ est reçue on sélectionne les couples de particules selon la loi discrète

$$\sum_{i=1}^N \frac{g^{(\epsilon)}(Y_n^i - y_n)}{\sum_{j=1}^N g^{(\epsilon)}(Y_n^j - y_n)}\, \delta_{(S_n^i, Y_n^i)} \qquad \text{avec} \qquad g^{(\epsilon)}(y) = g(y/\epsilon)/\epsilon^q$$

où g désigne une densité de probabilité strictement positive régulière et ϵ un paramètre de régularisation positif qui tend vers 0.
A noter néanmoins que la vitesse de convergence de cet algorithme estimée en norme $\mathbb{L}_1$ dépend de la dimension q du processus d'observation. Pour des pas de temps $\Delta t = 1/(1 + [N^{1/(2+q)}])$ et des régularisation d'ordre $\epsilon = 1/N^{1/(2+q)}$ on démontre dans [33] qu'elle est en ordre $\mathrm{O}(N^{1/(2+q)})$.

L'étude [33] examine aussi des situations où les observations discrètes dépendent de la trajectoire du signal sur chaque intervalle. On propose diverses estimations en norme $\mathbb{L}_1$ ainsi que des vitesses exponentielles dans chacune des situations.

La robustesse de ces schémas numériques est en partie décrite dans [30] et les fluctuations sont étudiées dans [32]. Dans [30] on examine la situation où la distribution initiale du signal et les statistiques des bruits d'observations sont inconnues. Dans ces études on montre que l'utilisation de schémas d'Euler introduit un biais dans les fluctuations des schémas particulaires approchés. Concernant le système de particules dans l'espace produit signal/observation ce résultat nous a conduit, au terme d'une analyse plus fine des erreurs, à améliorer les précédentes estimations. On obtient alors pour des schémas d'Euler plus fin en $\Delta t = 1/(1 + [N^{1/(2+q/2)}])$ et des régularisation moins rapides en $\epsilon = 1/N^{1/(4+q)}$ des estimations de vitesse pour les normes $\mathbb{L}_1$ de l'ordre $\mathrm{O}(N^{1/(2+q/2)})$.

3. L'étude [43] permet d'aborder les équations robustes du filtrage. A la différence de la formulation fonctionnelle de Kallianpur-Striebel ou celle de Kushner-Stratonovitch ces équations robustes ne font intervenir aucune intégrale stochastique par rapport au processus d'observation. Elles sont donc valables pour toute trajectoire d'observation et non uniquement sur un ensemble de probabilité certaine. Ces filtres optimaux robustes s'écrivent à nouveau sous forme de formules de Feynman-Kac non homogènes. Pour des fonctions tests régulières leur évolution temporelle est alors donnée par des équations du type

$$\frac{d}{dt}\eta_t(f) = \eta_t(L_t(f)) + \eta_t(fV_t) - \eta_t(V_t)\eta_t(f)$$

où L_t désigne le générateur non homogène du processus X sous-jacent. On pourra noter que dans le cadre du filtrage ce processus dépend de la trajectoire d'observation.
Nous présentons dans cet article un système de particules en interaction à temps continu permettant de résoudre numériquement ces équations quadratiques. Ce système approché est défini à partir des équations d'évolution précédentes. Pour cela on remarque que ces dernières peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}\eta_t(f) = \eta_t(L_{t,\eta_t}(f))$$

avec un générateur mixte lié à L_t ainsi qu'à un générateur de sauts

$$L_{t,\eta_t}(f)(x) = L_t(f)(x) + \int (f(y) - f(x))\ V_t(y)\ \eta_t(dy).$$

Selon cette description, les particules du système approché évoluent aléatoirement selon le générateur L_t. A des instants exponentiels elles interagissent avec le système en sautant sur des sites plus favorables selon la forme du potentiel V_t. Outre l'originalité de ce modèle nous présentons une nouvelle analyse de la convergence par des techniques de type semigroupe.

Le choix du générateur $L_{t,\eta}$ et celui du système de particules n'est pas unique. Dans [44] on examine cette non unicité des problèmes de martingales non linéaires et des mesures de McKean associées en comparant les fluctuations du précédent système avec celles liées à des générateurs de la forme

$$L_{t,\eta_t}(f)(x) = L_t(f)(x) + V_t'(x) \ \int (f(y) - f(x))\ \eta_t(dy)$$

où V_t' désigne un potentiel positif tel que $V_t' + V_t = \mathrm{Cte}$ (on peut prendre par exemple $V_t' = 2\|V_t\| - V_t$). Cette approche conduit à une nouvelle interprétation particulaire des formules de Feynman-Kac.
Dans cette dernière les particules évoluent aléatoirement selon le générateur L_t dans un environnement avec des obstacles "mous" décrits par le potentiel V_t'. Si une particule meurt alors au même instant une particule du système se dédouble.

Il convient aussi de noter que les vitesses de convergence que nous avons obtenues pour ces algorithmes à temps continu améliorent celles décrites dans [12] pour un schéma basé sur des discrétisation temporelles. Si N désigne le nombre de particules on montre que la vitesse de convergence estimée en norme $\mathbb{L}_2$ est désormais en $\mathrm{O}(\sqrt{N})$.

1.4 Systèmes de particules à temps continu

Les modèles à temps continu présentés dans l'article [43] décrit ci-dessus sont à la base de plusieurs études. Avant d'en faire la synthèse il me semble utile de situer ces modèles par rapport à deux domaines adjacents :

1. Comme nous l'avons fait originellement on peut tout abord interpréter le système de particules à temps continu comme une renormalisation d'un algorithme génétique de Moran. En effet ces deux modèles sont fondés sur les mêmes types de mécanismes de mutation et de sélection spatiale. Le système de Moran classique possède néanmoins des sauts interactifs beaucoup plus fréquents. A la différence de notre modèle il présente ainsi à la limite un bruit génétique et il converge vers le superprocessus de Fleming-Viot.

2. On peut aussi relier le caractère quadratique du terme de "gain" des équations robustes du filtrage avec celui du terme de collision des équations généralisées de Boltzmann introduites par Méléard dans [67] et par Graham-Méléard dans [59]. Dans ce cadre ce modèle particulaire peut aussi être vu comme un système de particules de type Nanbu.

L'analyse fine du comportement asymptotique lorsque la taille des systèmes ou l'horizon temporel tend vers l'infini est abordée dans les études suivantes.

- L'article [42] propose des théorèmes de la limite centrale et des estimations d'erreurs exponentielles. Notre analyse est basée sur des décompositions judicieuses des erreurs et sur l'identification de certaines martingales.
  Les estimations uniformes dans le temps présentées dans cet article de synthèse sont en partie fondées sur des résultats de stabilité de semigroupes non linéaires de type Feynman-Kac développés dans [38].

- Dans un article plus récent [40] nous avons proposé un cadre trajectoriel permettant comme dans le cas discret d'analyser la convergence des arbres généalogiques et les processus historiques associés.
  On démontre aussi dans ce travail des vitesses de propagation forte du chaos du même ordre que celui obtenu par Méléard [67] et Graham-Méléard [59] dans le cadre des équations généralisées de Boltzmann spatialement homogènes. Notre approche se distingue aussi des techniques de couplage d'arbres de Boltzmann interactifs présentées dans ces deux derniers travaux.
  On propose dans cette étude une stratégie plus souple fondée sur l'extension les techniques de martingales présentés dans [42] et conduisant pour des subdivisions temporelles finies $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq t$ à des estimations du type

$$\|\mathbb{E}(\eta_{t_1}^N \otimes \ldots \otimes \eta_{t_n}^N) - \eta_{t_1} \otimes \ldots \otimes \eta_{t_n}\|_{tv} \leq \frac{n^2}{N}\ c(t)$$

- La qualité numérique de ces schémas continus nous a conduit dans [41] à étendre ces modèles à des mécanismes de branchements interactifs plus généraux. La taille de ces systèmes avec branchements forme alors une martingale à valeurs entières. Pour rendre compte de cette variabilité on prend pour espace d'état $\mathcal{E} = \cup_{p\geq 0} E^p$ avec la convention $E^0 = \{\Delta\}$, un point cimetière. Le générateur associé à ce système est défini, avec les conventions usuelles pour chaque $x \in E^p$ et $p \geq 1$, par la formule

$$\mathcal{G}_t(f)(x) = \sum_{i=1}^{p} L_t^{(i)}(f)(x) + \lambda_t(x) \int_{\mathcal{E}} (f(y) - f(x))\ \mathcal{Q}_t(x, dy)$$

avec une intensité de sauts $\lambda_t(x) = \sum_{i=1}^p V_t(x_i)$ et un noyau de transition

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_t(f)(x) &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p \int_{E\times\mathbb{N}} f(x(i,q,u))\ Q_t(x,x_i,d(u,q)) \\ x(i,q,u) &= (x_1,\ldots,x_{i-1},\underbrace{u,\ldots,u}_{\text{q-fois}},x_{i+1},\ldots,x_p) \end{aligned}$$

vérifiant la condition de compatibilité

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p \int_{E\times\mathbb{N}} (\varphi(u)\ q)\ Q_t(x,x_i,d(u,q)) = \sum_{i=1}^p \frac{V_t(x_i)}{\sum_{j=1}^p V_t(x_j)}\ \varphi(x_i).$$

– Dans une étude adjacente [54] nous proposons des principes de grandes déviations dans l'espace des trajectoires pour des systèmes de particules en interaction et à temps continu. Bien que cette approche permette d'analyser des modèles de type diffusion ou bien à sauts elle ne rend pas compte des approximations particulaires des formules de Feynman-Kac presentées ci-dessus. Cet article offre une méthode nouvelle et relativement simple basée sur une extension originale du Lemma de transfert intégral de grandes déviations de Laplace-Varadhan.
  Afin de décrire ce nouveau moyen de transférer des principes de grandes déviations supposons données deux familles $\mathbb{P}^N_{m,\alpha}$ et $\mathbb{Q}^N_m$ de mesures de probabilités sur un certain espace mesurable Ω^N (pouvant dépendre du paramètre N). Le premier paramètre est réel $\alpha \in \mathbb{R}$ et le second paramètre m appartient à un espace métrique donné (M,d). On suppose que pour $\alpha = 1$ la measure $\mathbb{P}^N_{m,1}$ est indépendante de m et on note $\mathbb{P}^N_{m,1} = \mathbb{P}^N_1$.
  Supposons de plus que pour chaque paire d'indices $(\alpha,m) \in (\mathbb{R}\times M)$ nous avons $\mathbb{P}^N_{m,\alpha} \sim \mathbb{Q}^N_m$ et

$$\frac{d\mathbb{P}^N_{m,\alpha}}{d\mathbb{Q}^N_m}(x) = \exp\left(N[\alpha S_N(x,m) + C_\alpha(\pi_N(x),m)]\right), \quad \mathbb{Q}^N_m - \text{p.s.} \qquad (1)$$

  pour des fonctions mesurables $S_N : \Omega^N \times M \to \mathbb{R}$ et $C_\alpha : M\times M \to \mathbb{R}$.

  On se donne alors une application mesurable $\pi_N : \Omega^N \to M$ et pour chaque $(\alpha,m) \in (\mathbb{R}\times M)$ on définit les mesures images associées

$$\overline{\mathbb{P}}^N_{m,\alpha} = \mathbb{P}^N_{m,\alpha}\circ\pi_N^{-1} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{Q}}^N_m = \mathbb{Q}^N_m\circ\pi_N^{-1}$$

  Supposons désormais que les mesures de probailités $\overline{\mathbb{Q}}^N_m$, $N \geq 1$ vérifient un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux $H_m : M \to [0,\infty]$ pour chaque $m \in M$.
  Supposons enfin que les applications $\{C_\alpha(.,m)\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ sont continues et

elles satisfont en chaque point m, $C_\alpha(m,m) = 0$ et la condition de moment exponentiel suivante

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \int_{\Omega^N} \exp \gamma N[S_N(x,m) + C_1(\pi_N(x),m)] \;\; d\mathbb{Q}_m^N(x) < \infty \qquad (2)$$

pour un couple $(m,\gamma) \in M \times (1,\infty)$. Alors nous démontrons par une approche originale que la suite $\overline{\mathbb{P}}_1^N = \mathbb{P}_1^N \circ \pi_N^{-1}$ vérifie un principe de grandes déviation de bonne fonction de taux

$$I : m \in M \to I(m) = H_m(m) \in [0,\infty]$$

Dans l'article [54] nous utilisons ce lemme de transfert pour déduire des principes de grandes déviations dans l'espace des trajectoires dans le cadre des processus de sauts ou de diffusions de type McKean-Vlasov. On montre alors que les lois des mesures empiriques des trajectoires de particules satisfont des principes de grandes déviations de bonne fonction de taux donnée pour chaque mesure μ sur les chemins càdlàg par la formule

$$I(\mu) = \mathrm{Ent}(\mu \mid \mathbb{Q}_{\eta_0,\phi(\mu)})$$

$\phi(\mu) = (\mu_t)_{t\geq 0}$ désigne le flot des marginales temporelles de μ et $\mathbb{Q}_{\eta_0,\phi(\mu)}$ la solution du problème de martingale non homogène et non lin'eaire associé à la suite de générateurs correspondants L_{μ_t}.

2 Algorithmes génétiques et optimisation globale

Bien que les algorithmes génétiques apparaissent naturellement en filtrage et dans le cadre des formules de Feynman-Kac ils ont été introduits à l'origine en 1975 par Holland dans [60] pour optimiser des fonctions numériques. Dans sa thèse de doctorat [7] Cerf donne en 1994 une première preuve rigoureuse de la convergence de ces algorithmes lorsque le paramètre temporel tend vers l'infini sur des espaces finis et à temps discret en introduisant un paramètre de température. Son principal résultat peut s'énoncer de la façon suivante :

Si les systèmes sont assez grands et les mutations irréductibles alors pour certains schémas de décroissance logarithmique de la température les populations se concentrent avec le temps sur les extrema globaux d'une fonction.
La démonstration de cette convergence est en partie fondé sur les travaux de Trouvé sur le recuit simulé généralisé [73] et sur une analyse fine des coûts de communication virtuels.

Dans [39] on simplifie et on étend l'étude du recuit généralisé au cas où les coûts de transitions sont non homogènes dans le temps. Cette extension permet par exemple de construire des algorithmes d'optimisation de potentiels intégraux

$$U(x) = \int \mathcal{U}(x,z)\; \mu(dz)$$

en les approchant par des potentiels non homogènes aléatoires liés à un processus Z de loi de probabilité invariante μ et donnés par

$$U_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{U}(x, Z_s)\; ds$$

On simplifie aussi l'analyse par grandes déviations présentée dans [73] en proposant une démarche alternative basée sur des techniques de semigroupe liées à l'entropie relative et aux constantes de log-Sobolev. On propose enfin un critère naturel de stabilité et de test ensembliste permettant d'analyser les extrema globaux des fonctions d'énergie virtuelle.

Dans la seconde partie de l'article on applique cette analyse à l'étude de la convergence d'algorithmes génétiques. On analyse deux types de transitions markoviennes

$$G^{(1)}_\beta = M_\beta S_\beta \qquad \text{et} \qquad G^{(2)}_\beta = \alpha M_\beta + (1-\alpha)\; S_\beta$$

avec $\alpha \in (0,1)$ et les noyaux de mutation et de sélection de populations :

$$M_\beta(x,y) = \prod_{i=1}^N\; K_\beta(x^i, y^i)\,, \qquad S_\beta(x,y) = \prod_{i=1}^N\; \sum_{j=1}^N \frac{e^{-\beta U(x^j)}}{\sum_{k=1}^N e^{-\beta U(x^k)}}\; 1_{x^j}(y^i).$$

Les mutations sont construites à base d'un noyau irréductible $K_0(x,y)$ et d'une relation d'équivalence $a\,:\,E\times E\to\mathbb{R}_+$ compatible avec U (i.e. $a(x,y)=0 \Rightarrow U(x)=U(y)$) avec, si $a(x,y)>0$,

$$K_\beta(x,y) = K_0(x,y)\; e^{-\beta a(x,y)}.$$

Pour chaque $\alpha = 1,2$ on note $\xi^{(\alpha)}_t$ l'algorithme génétique à temps continu de générateur infinitésimal $L^{(\alpha)}_{\beta_t} = G^{(\alpha)}_{\beta_t} - Id$ avec le schéma de température inverse $\beta(t) = \frac{1}{T}\log(e+t)$, $\beta(0) = 1/T < \infty$. On montre dans [39] qu'il existe alors une température initiale T_0 (calculable explicitement) et deux tailles critiques de populations $N^{(\alpha)}(a,U)$, $\alpha = 1,2$, telles que

$$(\; N \geq N^{(\alpha)}(a,U) \quad \text{et} \quad T > T_0\;) \implies \lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(\xi^{(\alpha)}_t \in U^\star_a) = 1$$

avec

$$U^\star_a = \{x \in\; E^N\;;\; a(x^i,x^j) = 0\;\text{ et }\; U(x^i) = \inf_E U\}.$$

Si dans le cadre du filtrage les étapes successives de mutation/sélection correspondent aux étapes de prédiction/correction dans les problèmes d'optimisation de fonctions numériques il peut être utile de casser ce schéma un peu trop rigide. En ce sens, le second algorithme $\xi_t^{(2)}$ est plus souple que le premier car il autorise des séquences plus ou moins longues et aléatoires de mutations ou de sélection. Son analyse à basse température devient alors plus simple. Bien que les valeurs critiques $N^{(\alpha)}(a,U)$ que nous obtenons ne sont pas exactes on montre que

$$N^{(1)}(a,U) = N^{(2)}(a,U) \times (1 + \delta(U)/\delta(a)) \ > \ N^{(2)}(a,U)$$

avec

$$\delta(U) = \sup \{|U(x) - U(y)| \ ; \ x,y \in E\} \qquad \text{et} \qquad \delta(a) = \sup \{a(x,y) \ ; \ x,y \in E\}.$$

Ces observations nous conduisent à penser qu'il existe des situations ou le second algorithme peut converger vers les extrema recherchés avec un nombre plus faible d'individus.

La théorie des algorithmes génétiques s'est donc développée ces dernières années dans deux directions distinctes :

1. La première correspond aux applications à l'optimisation globale de fonctions numériques. Elle est fondée sur la théorie des algorithmes à transitions rares.

2. La seconde est plus récente et elle correspond aux applications en filtrage non linéaire. Celle-ci est fondée sur les méthodes de Monte Carlo et sur la théorie des systèmes de particules en interaction et avec branchements.

Dans un article de synthèse [41] on met en contact ces deux approches en éclairant certains algorithmes (à temps continu ou avec branchements) issus du filtrage pouvant être utilisés pour optimiser des potentiels. L'analyse de la convergence de ces modèles a été initialisée dans [5].
Dans [34] on complète ce travail en comparant diverses approches proposées dans la littérature sur les algorithmes génétiques. On étudie aussi le comportement asymptotique d'algorithmes génétiques généraux (sans exclure les mécanismes de croisements) dans le cadre des processus non linéaires à valeurs mesures en interaction et à temps discret.

3 Contraction d'opérateurs markoviens et de semigroupes non linéaires.

Cet axe de recherche trouve à nouveau sa source dans le cadre du filtrage non linéaire et plus particulièrement dans l'étude de la stabilité asymptotique du filtre optimal. L'étude de ces questions nous a amené à développer nos travaux dans deux directions principales :

1. Tout d'abord nous avons étendu ce cadre restreint du filtrage et nous avons étudié la stabilité asymptotique de semi-groupes non linéaire de type Feynman-Kac-Schrödinger. Nous avons ensuite proposée une démarche originale fondée en partie sur les idées de Dobrushin sur la stabilité de chaînes de Markov. Concernant les modèles discrets ces travaux sont décrits dans [28, 29, 42]. Dans [38] on étend cette approche aux semi-groupes de Feynman-Kac liés à des fonctions multiplicatives abstraites continues ou discrètes.

2. Dans un article plus récent [37] on étudie les propriétés de contraction du coefficient de Dobrushin et on analyse la régularité d'opérateurs markoviens selon diverses formes d'entropie relative. On développe diverses stratégies permettant d'estimer ces coefficients de contraction en terme de trous spectraux, de constantes log-Sobolev classiques et modifiées.

3.1 Stabilité de semigroupes non linéaires de Feynman-Kac

Afin d'éclairer notre démarche dans cette thématique il convient de situer nos travaux par rapport aux développements de la littérature liée au filtrage. On rappelle tout d'abord que l'évolution de ce filtre est régie par des équations à valeurs mesures non linéaires. Ces équations doivent être initialisées selon la distribution à l'origine du signal. Comme celle-ci est en général inconnue le filtre optimal et a fortiori tout modèle numérique approché sont mal initialisés. Montrer que le filtre optimal oublie de façon naturelle ces erreurs d'initialisation revient à étudier la stabilité asymptotique des équations d'évolution non linéaires sous-jacentes.

Historiquement les premières études sur le comportement en temps long des équations du filtrage non linéaire sont celles de Kunita [63, 64] pour des modèles continus et Stettner [71, 72] pour des modèles discrets. Ces auteurs démontrent en partie que si le semigroupe du signal est régulier au sens de Feller et s'il possède une mesure invariante μ alors le filtre optimal vu comme un processus de Markov dans l'espace des distributions possède une seule mesure invariante de barycentre μ. Dans [69] Ocone et Pardoux montrent que le filtre optimal corrige une erreur d'initialisation lorsque la distribution initiale inconnue du signal est absolument continue par rapport à celle-ci. Ce premier résultat de stabilité répond en partie au problème d'initialisation du filtre optimal mais sur la base d'une condition difficile à vérifier. Suite à ces travaux apparaissent une collection d'articles proposant des taux exponentiels de correction d'erreur d'initialisation avec, par ordre alphabétique, Atar-Zeitouni [1, 2], Budhiraja-Ocone [4], Delyon-Zeitouni [55], Da Prato-Furhman-Malliavin [14]. Sans rentrer dans le détail de chacun il convient de noter que tous ces articles sans exceptions sont basés sur les propriétés projectives de la métrique de Hilbert et sur le coefficient d'ergodicité de Birkhoff.

Parallèlement et indépendamment de ces travaux nous avons proposé dans [28, 29] une analyse alternative basée sur la distance en variation totale et sur le coefficient d'ergodicité de Dobrushin $\beta(K)$ d'un noyau de Markov K agissant sur les mesures de probabilité. On rappelle que ce dernier peut être alternativement défini par les formules

$$\beta(K) = \sup_{\mu_1,\mu_2} \frac{\|\mu_1 K - \mu_2 K\|_{tv}}{\|\mu_1 - \mu_2\|_{tv}} = \sup_{x_1,x_2,A} |K(x_1, A) - K(x_2, A)|.$$

Ainsi, sous certaines hypothèses de mélange assez fortes on peut quantifier le degré de contraction. On a par exemple

$$(\mathcal{K})_\epsilon : \qquad \frac{dK(x,.)}{dK(x',.)}(y) \geq \epsilon > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(K) \geq \epsilon.$$

Dans [28, 29] on développe une technique de type semigroupe sur des modèles à temps discret qui ne nécessite pas le plongement des équations du filtrage dans des espaces projectifs. Dans [38] on étend cette approche à des modèles abstraits de la forme

$$\eta_t(f) = \gamma_t(f)/\gamma_t(1) \qquad \text{avec} \quad \gamma_t(f) = \mathbb{E}(f(X_t)\ Z_{0,t})$$

et liés à une fonction multiplicative abstraite $Z_{r,t} = Z_{r,s}\ Z_{s,t}$, $r \leq s \leq t$, prévisible par la filtration naturelle de X. L'idée essentielle consiste à étudier sur chaque horizon temporel t les propriétés de stabilité du processus X sous la loi $\mathbb{Q}_t$ définie par la dérivé de Radon-Nykodim

$$\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} = \frac{Z_{0,t}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_{0,t})}.$$

où $\mathbb{P}_t$ désigne la loi de X sur ce même horizon. Si on note

$$K^{(t)}_{s,r}(x, dy) = \mathbb{Q}_t(X_r \in dy | X_s = x)$$

les probabilités de transitions de X sous la loi $\mathbb{Q}_t$ alors les propriétés de stabilité du semigroupe non linéaire $\Phi_{s,t}(\eta_s) = \eta_t$ sont liées au coefficient de contraction de Dobrushin $\beta(K^{(t)}_{s,r})$ de $K^{(t)}_{s,r}(x, dy)$ selon la formule

$$\sup_{\mu_1,\mu_2} \|\Phi_{s,t}(\mu_1) - \Phi_{s,t}(\mu_2)\|_{tv} = \beta(K^{(t)}_{s,t}).$$

Le transfert des propriétés de régularité du semigroupe $P_{s,r}$ de X sous $\mathbb{P}$ au semigroupe non homogène $K^{(t)}_{s,r}$ de X sous $\mathbb{Q}_t$ s'effectue selon l'équation

$$K^{(t)}_{s,r}(f)(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X_r)\ Z_{s,t} | X_s = x)/\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_{s,t} | X_s = x).$$

Pour des potentiels et des semigroupes homogènes $P_{s,t} = P_{t-s}$ on démontre par exemple le résultat suivant :

$$\frac{dP_1(x,.)}{dP_1(x',.)}(y) \geq \epsilon > 0 \Longrightarrow \frac{1}{t}\log\beta(K_{0,t}^{(t)}) \leq -c\,\epsilon^2.$$

Dans le cas discret on peut choisir $c = 1$ et dans le cas continu l'implication est satisfaite pour tout $t \geq 2$ avec $-\log(2c) = \mathrm{osc}(V)$.

Dans le cadre du filtrage cette représentation en terme de fonctions multiplicatives abstraites permet de traiter non seulement les formules classiques de Kallianpur-Striebel mais aussi les équations robustes.

Cette formulation générale nous a aussi permis d'aborder certaines questions sur la stabilité asymptotique de particules évoluant dans un milieu avec obstacles et taux d'absorbtion associés à un potentiel.

3.2 Contraction d'opérateurs markoviens

Dans cette autre direction d'étude nous avons analysé les propriétés de contraction de transitions markoviennes pour des critères de proximité autres que la variation totale. L'article correspondant à cette étude est [37]. Notre démarche se distingue aussi des études classiques sur la stabilité de processus de Markov par le fait notable que l'on ne suppose ni n'utilise la mesure invariante (si elle existe) des transitions en question. Les critères de contraction que nous avons analysés s'expriment en fonction d'une notion de ϕ-entropie relative. Cette classe de critères contient entre autres les normes L_p, les distances en variation totale et de Kakutani-Hellinger, l'entropie relative de Boltzmann-Shannon-Kullback ou en encore celle de Havrda-Charvat.

Ces ϕ-entropies relatives sont associées à la donnée d'une fonction $\phi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ convexe et telle que $\phi(ax, ay) = a\ \phi(x,y)$ et $\phi(1,1) = 0$. Elles sont définies , avec les conventions usuelles, par la formule

$$H_\phi(\mu,\nu) = \int\ \phi\,(d\mu, d\nu)\,.$$

On note $\beta_\phi(K,\nu) = 1 - \alpha_\phi(K,\nu)$ le coefficient de contraction d'un noyau de markov K autour de ν pour le critère H_ϕ. C'est à dire la meilleure constante telle que pour toute mesure de probabilité μ l'inégalité suivante soit satisfaite

$$H_\phi(\mu K, \nu K) \leq\ (1 - \alpha_\phi(K,\nu))\ H_\phi(\mu,\nu).$$

La variation totale correspond au choix $\phi_0(x,y) = |x-y|$ et dans ce cas le coefficient d'ergodicité de Dobrushin $\alpha(K)$ peut s'écrire $\alpha(K) = \inf_\nu \alpha_{\phi_0}(K,\nu)$.

Notre étude des propriétés de contraction d'opérateurs de Markov s'est développée autour de deux axes :

1. Notre premier résultat est une extension de l'article collectif de Cohen, Iwasa, Rautu, Ruskai, Seneta, Zbaganu [61] sur des espaces finis au cadre des espaces mesurables généraux. On montre que les taux de contraction pour les ϕ-entropies d'une transition de Markov sur un espace mesurable sont universellement contrôlés par le coefficient de Dobrushin

$$\alpha(K) \leq \alpha_\phi(K, \nu).$$

Ainsi lorsque la transition K satisfait la condition de mélange $(\mathcal{K})_\epsilon$ décrite ci-dessus on obtient aisément la minoration $\alpha_\phi(K, \nu) \geq \epsilon$. On remarque que le choix $\phi(x, 1) = |x - 1|^p$ conduit aux espaces $\mathbb{L}_p$. On analyse aussi sous cette condition les taux de contraction sur les espaces d'Orlicz plus généraux $(\mathbb{L}^\psi(\nu), \|.\|_{\psi,\nu})$ associés à la donnée d'une fonction de Young ψ. Dans ce cadre on montre que pour tout $\mu << \nu$, $d\mu/d\nu \in \mathbb{L}^\psi(\nu)$ on a

$$(\mathcal{K})_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad \|1 - d\mu K/d\nu K\|_{\psi,\nu K} \leq (1 - \epsilon)\ \|1 - d\mu/d\nu\|_{\psi,\nu}.$$

2. Dans la seconde partie de cet article on analyse plus en détails les contractions pour les normes $\mathbb{L}_2$ et pour l'entropie relative classique. Dans le cadre d'étude précédent ces deux situations correspondent respectivement au choix des fonctions $\phi_1(x, 1) = |x - 1|^2$ et $\phi_2(x, 1) = x \log x$.
Pour présenter une partie de ces résultats on note pour chaque mesure de probabilité K-invariante ν le trou spectral $\lambda(\nu, K)$, la constante de log-Sobolev $ln(\nu, K)$ et la constante de log-Sobolev modifée $lm(\nu, K)$

$$\begin{aligned} \lambda(\nu, K) &= \inf\{\mathcal{E}_{\nu,K}(f, f)/\mathrm{var}_\nu(f)\ ;\ f \in \mathbb{L}^2(\nu) - \mathrm{Vect}(1)\} \\ ln(\nu, K) &= \inf\{\quad \mathcal{E}_{\nu,K}(f, f)/\mathrm{ent}_\nu(f^2)\ ;\ f \in \mathbb{L}^2(\nu) - \mathrm{Vect}(1)\} \\ lm(\nu, K) &= \inf\{\mathcal{E}_{\nu,K}(f^2, \log f^2)/\mathrm{ent}_\nu(f^2)\ ;\ f \in \mathbb{L}^{\psi_m}(\nu) - \mathrm{Vect}(1)\} \end{aligned}$$

avec $\psi_m(x) = x^2 \log(x^2)$ et $\mathrm{ent}_\nu(f) = \int f \log(f/\nu(f))\, d\nu$ lorsque $\sqrt{f} \in \mathbb{L}^\psi(\nu)$.
On montre que les taux de contraction pour les normes $\mathbb{L}_2$ et pour l'entropie relative classique peuvent être estimés selon les inégalités

$$\begin{aligned} \alpha_{\phi_1}(K, \nu) &= \lambda(\nu, KK^\star_\nu) \quad (\geq lm(\nu, K)/2 \geq ln(\nu, K)) \\ \alpha_{\phi_2}(K, \nu) &\geq ln(\nu, KK^\star_\nu) \end{aligned}$$

Pour les constantes de log-Sobolev modifiées on démontre aussi qu'il existe un nombre $\rho \in (0, 1)$ tel que

$$\rho\ lm(\nu, KK^\star_\nu) \leq \alpha_{\phi_2}(K, \nu) \leq lm(\nu, KK^\star_\nu).$$

Ces dernières estimations s'avèrent parfois plus utiles que les précédentes. Par exemples lorsque ν n'est pas une combinaison linéaire finie de masses de Dirac nous savons d'après Miclo [68] que $ln(\nu, KK^\star_\nu) = 0$ alors qu'en observant la définition des valeurs propres et des constantes modifiées nous avons

$$(\mathcal{K})_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lambda(\nu, KK^\star_\nu) \geq \epsilon \quad \text{et} \quad lm(\nu, KK^\star_\nu) \geq \epsilon.$$

4 Calcul des probabilités idempotentes

Ce dernier thème est directement issu de ma thèse de doctorat. Il porte sur le développement d'un calcul des probabilités idempotentes permettant d'étendre l'intuition, les idées et les techniques probabilistes au contrôle optimal déterministe. L'idée principale consiste à remplacer dans les axiomes structurels de la théorie des probabilités l'anneau des réels muni des lois usuelles $(+, \times)$ par le semi-anneau étendu des réels muni des lois $(\oplus = max, \otimes = +)$. Cette approche est en partie décrite dans [47, 20] et dans l'appendice que j'ai rédigée du livre de Kolokoltsov et Maslov [19]. Dans [53] on étudie dans ce cadre les liens entre les problèmes de filtrage et de régulation optimale. Ce parallèle nous a permis d'adapter de façon naturelle les méthodes particulaires du filtrage à ces problèmes de contrôle et de régulation optimale autour d'une trajectoire de référence.

Dans [23] nous complétons ces études et nous présentons une construction rigoureuse du calcul des probabilités idempotentes fondée sur la théorie des mesures idempotentes de Maslov introduite dans l'ouvrage [66] et sur le calcul des grandes déviations.
Dans cette approche les équations de transport de type Bellman correspondent aux équation de Chapman-Kolmogorov et l'opérateur Hamiltonien peut être vu comme le générateur infinitésimal d'un processus de décision. Ces deux interprétations probabilistes permettent de définir notamment une notion naturelle de solution faible d'équations de type Hamilton-Jacobi. Ceci au même titre que l'on définit les solutions faibles d'équations d'évolution de lois de probabilités d'un processus de Markov.

Afin d'illustrer cette approche nous avons choisi de présenter le cadre d'étude permettant d'analyser ces équations. On note ainsi dans ce qui suit $\Omega = \mathbb{L}^\infty((0,1), \mathcal{P}(U))$ l'espace de contrôles relaxés sur un compact U muni de la topologie de la convergence $\star$-faible. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ on note X^x le processus de décision à valeurs dans $\mathcal{C} = \mathcal{C}((0,1), \mathbb{R}^d)$ et défini pour chaque $t \in (0,1)$ et pour chaque contrôle admissible $\omega \in \Omega$ par la formule

$$X^x_t(\omega) = x + \int_0^t \int_U f(X^x_s(\omega), u)\ \omega_s(du)\ ds$$

où f désigne une dérive régulière. Sur cet espace de contrôles Ω on définit une mesure idempotente de performance $\mathbf{P}_x$ en posant

$$\mathbf{P}_x(A) = \sup_{\omega \in A} \mathbf{p}_x(\omega) \quad \text{avec} \quad \mathbf{p}_x(\omega) = \int_0^1 \int_U l(X_t^x(\omega), u)\ \omega_t(du)\ dt$$

où l désigne un lagrangien régulier. La loi de X^x sur $\mathcal{C}((0,1), \mathbb{R}^d)$ et la loi conditionnelle de X_t^x sachant $X_s = y$ (avec $s \leq t$) sont dans ce cadre respectivement définies par les densités :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x^X(z) &= \mathbf{P}_x((X^x)^{-1}(\{z\})) = \sup\{\mathbf{p}_x(\omega)\ ,\ X^x(\omega) = z\} \\ \mathbf{p}_{s,t}^X(x,y) &= \sup\{\int_s^t \int_U l(X_r^{s,x}(\omega), u)\ \omega_r(du)\ dr\ ;\ \omega \in \Omega\ ,\ X_t^{s,x}(\omega) = y\}. \end{aligned}$$

L'espérance mathématique par rapport à ces mesures idempotentes s'exprime sous forme intégrale selon la formule :

$$\mathbf{E}_x(f(X)) = \int^{\oplus} f(z) \odot \mathbf{P}_x^X(dz) = \sup_{z \in \mathcal{C}} (f(z) + \mathbf{p}_x^X(z)).$$

L'hamiltonien H associé au système de décision précédent peut s'interpréter avec ces notations comme la dérive moyenne locale du processus

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1}\ \mathbf{E}_x(\langle p, X_\epsilon^x - x\rangle) = H(x,p) = \sup_{u \in U} (\langle p, f(x,u)\rangle + l(x,u)).$$

Pour chaque fonction bornée et Lipschitz $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$ on montre que la fonction ϕ définie par

$$\phi(t,x) = \mathbf{P}_t(f)(x) = \mathbf{E}_x(f(X_t^x))$$

est à nouveau Lipschitz et on a par homogénéité nous avons

$$\phi(t,x) = \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(f(X_t^x)|X_\epsilon^x)) = \mathbf{E}_x(\phi(t-\epsilon, X_\epsilon^x)).$$

Le théorème de Rademacher permet de conclure que ϕ est différentiable pour presque tous les (t,x) et selon ce qui précède on obtient

$$\epsilon^{-1}\ \mathbf{E}_x(\langle D_x\phi(t,x), X_\epsilon^x - x\rangle) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x) + \mathrm{O}(\epsilon) \to H(x, D\phi(t,x)) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x).$$

Plus généralement on montre ainsi que ϕ est l'unique solution de cette équation d'Hamilton-Jacobi (au sens des super et sous gradients) et $\{\mathbf{P}_t\ ;\ t \in (0,1)\}$ est un semigroupe monotone d'opérateurs $(\oplus, \odot)$-linéaires.
Ce semigroupe agit aussi dualement sur les densités (s.c.s.) de mesures de performances μ par la formule intégrale

$$\mu\mathbf{P}_t(y) = \int^{\oplus} \mu(dx) \odot \mathbf{p}_{0,t}(x,y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (\mu(x) + \mathbf{p}_{0,t}(x,y)).$$

On construit ainsi la solution faible $\psi(t,y) = \mu\mathbf{P}_t(y)$ de l'équation d'Hamilton-Jacobi associée à l'opérateur dual $H^\star(x,p) = H(x,-p)$, d'origine mesure $\psi(0,.) = \mu$ et définie par

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = H^\star(x, D\psi(t,x)).$$

Dans [24] nous montrons que ces solutions faibles coïncident dans certains cas avec les solutions classiques de viscosités introduites par Crandall et Lions dans [8]. Nous appliquons aussi ces résultats au traitement d'image et à la morphologie mathématique offrant ainsi une approche alternative aux gradients morphologiques de Beuchler et aux notions de dérivées supérieure et inférieures proposées par Brockett et Maragos dans [3] et par Van der Boomgaard dans [74].

Dans l'article [25] nous présentons la version (max,+) de la formule de Dynkin sur les processus de Markov. Dans une situation analogue et sous certaines hypothèses de controlabilité on montre par exemple que si $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathbf{E}_x(f(X_t^x) - \int_0^t H(X_s^x, Df(X_s^x))\, ds\ ) = f(x).$$

Par analogie avec la construction de fonctions de Lyapunov stochastiques on utilise dans [15] et [25] cette formule pour estimer la qualité de certaines classes de contrôles admissibles. A titre d'exemple, supposons que l'on puisse trouver une fonction V assez régulière pour laquelle l'on ait

$$H(x, DV(x)) \leq -a$$

sur un borélien A et pour un certain nombre $a > 0$. Dans ces conditions on peut alors estimer la qualité des contrôles pour lesquels le processus X^x, issu de $x \in A$, reste dans cet ensemble. La formule de Dynkin nous conduit à la formule

$$\mathbf{P}_x(\forall 0 \leq s \leq t\ ;\ X_s^x \in A) \leq \varphi(x) - \inf_A \varphi - a\ t.$$

Nous examinons aussi dans [25] la stabilité de processus de décisions en présentant notamment une description explicite des points fixes de certains opérateurs dits “non expansifs”. Par analogie avec la théorie classique des chaînes de Markov l'idée consiste à interpréter ces points fixes comme étant des mesures invariantes d'un processus. Pour mettre en place cette interprétation on procède comme pour les chaînes de Markov. On associe donc tout d'abord à un processus canonique de décision X de loi initiale μ et de transitions élémentaires $\mathbf{p}$ une mesure de performance

$$\mathbf{P}_\mu((X_0, \ldots, X_n) \in A) = \sup\{\mu(x_0) + \sum_{p=1}^n \mathbf{p}(x_{n-1}, x_n)\ ;\ (x_0, \ldots, x_n) \in A\}.$$

Lorsque l'espace d'état E est compact et le coût de communication élémentaire $\mathbf{p}$ Lipschitz on définit deux opérations intégrales l'une sur les fonctions continues f, l'autre sur les fonctions s.c.s. μ en posant

$$\mathbf{P}(f)(x) = \sup_{y \in E}(\mathbf{p}(x,y) + f(y)) \quad \text{et} \quad (\mu\mathbf{P})(y) = \sup_{x \in E}(\mu(x) + \mathbf{p}(x,y)).$$

Pour décrire explicitement les mesures invariantes de $\pi\mathbf{P} = \pi$ on introduit par analogie avec la théorie des chaînes de Markov les transitions tabous

$$x\mathbf{P}^n(x,y) = \mathbf{P}_x(X_n = y\,, \tau_x \geq n) \quad \text{avec} \quad \tau_x = \inf\{n \geq 1 \; ; \; X_n = x\}$$

et les mesures idempotentes

$$\pi_x(y) = \oplus_{n \geq 1} \; x\mathbf{P}^n(x,y) = \mathbf{E}_x(\oplus_{n=1}^{\tau_x} 1_{X_n = x})$$

où 1_A désigne l'indicatrice $(\max, +)$ avec $1_A(x) = 0$ si $x \in A$ et $1_A(x) = -\infty$ sinon. On démontre que pour chaque $x \in E$

$$\pi_x \quad \mathbf{P}-\text{invariante} \iff \mathbf{P}_x(\tau_x < \infty) = 0 \iff \oplus_{n \geq 1}\mathbf{P}^n(x,x) = 0.$$

Références

[1] R. Atar and O. Zeitouni. Exponential stability for nonlinear filtering. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 33(6):697–725, 1997.

[2] R. Atar and O. Zeitouni. Lyapunov exponents for finite state space nonlinear filtering. *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Control and Optimization*, 35(1):36–55, January 1997.

[3] R.W. Brockett and P. Maragos. Evolution equations for continuous scale morphological filtering. *IEEE Trans. on signal Processing*, 42(12), 1994.

[4] A. Budhiraja and D. Ocone. Exponential stability of discrete time filters for bounded observation noise. *Systems and Control Letters*, 30:185–193, 1997.

[5] R. Carmona and P. Del Moral. Interacting particle methods and non linear estimation. Preprint, 2002.

[6] H. Carvalho, P. Del Moral, A. Monin, and G. Salut. Optimal nonlinear filtering in gps/ins integration. *Institute of Electrical and Electronics Engineers. Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(3):835–850, July 1997.

[7] R. Cerf. *Une théorie asymptotique des algorithmes génétiques*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, March 1994.

[8] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277:1–42, 1983.

[9] D. Crisan, J. Gaines, and T.J. Lyons. A particle approximation of the solution of the kushner-stratonovitch equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Applied Mathematics*, 58(5):1568–1590, 1998.

[10] D. Crisan and T.J. Lyons. Nonlinear filtering and measure valued processes. *Probability Theory and Related Fields*, 109:217–244, 1997.

[11] D. Crisan and T.J. Lyons. A particle approximation of the solution of the Kushner-Stratonovitch equation. *Probability Theory and Related Fields*, 115(4):549–578., 1999.

[12] D. Crisan, P. Del Moral, and T.J. Lyons. Interacting particle systems approximations of the Kushner-Stratonovitch equation. *Advances in Applied Probability*, 31(3):819–838, September 1999.

[13] D. Crisan, P. Del Moral, and T.J. Lyons. Non linear filtering using branching and interacting particle systems. *Markov Processes and Related Fields*, 5(3):293–319, 1999.

[14] G. Da Prato, M. Furhman, and P. Malliavin. Asymptotic ergodicity for the Zakai filtering equation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Série I. Mathématique*, 321(5):613–616, 1995.

[15] P. Del Moral. On the stability of Maslov optimization processes. In *Proceedings XXXIV IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, CDC, December 1995.

[16] P. Del Moral. Non-linear filtering: interacting particle resolution. *Markov Processes and Related Fields*, 2(4):555–581, 1996.

[17] P. Del Moral. Nonlinear filtering using random particles. *Theory of Probability and its applications*, 40(4):690–701, 1996.

[18] P. Del Moral. Filtrage non linéaire par systèmes de particules en interaction. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Série I. Mathématique*, 325:653–658, 1997.

[19] P. Del Moral. Maslov optimization theory: optimality versus randomness. In V.N. Kolokoltsov and V.P. Maslov, editors, *Idempotency Analysis and its Applications*, Mathematics and its Applications 401, pages 243–302. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1997.

[20] P. Del Moral. Maslov optimization theory: topological aspects. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*, Publications of the Newton Institute, pages 354–383. Cambridge University Press, 1998.

[21] P. Del Moral. Measure valued processes and interacting particle systems. Application to non linear filtering problems. *The Annals of Applied Probability*, 8(2):438–495, 1998.

[22] P. Del Moral. A uniform convergence theorem for the numerical solving of non linear filtering problems. *Journal of Applied Probability*, 35:873–884, 1998.

[23] P. Del Moral and M. Doisy. Maslov idempotent probability calculus. part I. *Theory of Probability and Its Applications*, 43(4):735–751, 1998.

[24] P. Del Moral and M. Doisy. Maslov idempotent probability calculus. part II. *Theory of Probability and Its Applications*, 44(2):384–400, 1999.

[25] P. Del Moral and M. Doisy. On the applications of Maslov optimization theory. *Mathematical Notes*, 69(2):232–244, February 2001.

[26] P. Del Moral and A. Guionnet. Large deviations for interacting particle systems. Applications to non linear filtering problems. *Stochastic Processes and their Applications*, 78:69–95, 1998.

[27] P. Del Moral and A. Guionnet. A central limit theorem for non linear filtering using interacting particle systems. *The Annals of Applied Probability*, 9(2):275–297, 1999.

[28] P. Del Moral and A. Guionnet. On the stability of measure valued processes with applications to filtering. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Série I. Mathématique*, 329:429–434, 1999.

[29] P. Del Moral and A. Guionnet. On the stability of interacting processes with applications to filtering and genetic algorithms. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 37(2):155–194, 2001.

[30] P. Del Moral and J. Jacod. Interacting particle filtering with discrete observations. In N. J. Gordon A. Doucet, J. F. G. de Freitas, editor, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer-Verlag, 2001.

[31] P. Del Moral and J. Jacod. Interacting particle filtering with discrete observations: asymptotic behaviour in the gaussian case. In H. Kunita B.S. Rajput S. Watanabe J. Xiong T. Hida, R. Karandikar, editor, *Stochastics in finite and infinite dimensions. in the honour of G. Kallianpur*, pages 101–122. Birkhaüser, Trends in Mathematics, 2001.

[32] P. Del Moral and J. Jacod. The monte-carlo method for filtering with discrete time observations. central limit theorems. In *Proceedings of the Workshop on Numerical Methods and Stochastics*. Fields Institute, Toronto, 2001 (to appear).

[33] P. Del Moral, J. Jacod, and P. Protter. The Monte Carlo method for filtering with discrete time observations. *Probability Theory and Related Fields*, 120:346–368, 2001.

[34] P. Del Moral, L. Kallel, and J. Rowe. Modeling genetic algorithms with interacting particle systems. *Revista de mathemática: Teoria y Aplicationes*, 8(2), July 2001.

[35] P. Del Moral, M.A. Kouritzin, and L. Miclo. On a class of discrete generation interacting particle systems. *Electronic Journal of Probability*, 6(16):1–26, 2001.

[36] P. Del Moral and M. Ledoux. Convergence of empirical processes for interacting particle systems with applications to nonlinear filtering. *Journal of Theoretical Probability*, 13(1):225–257, 2000.

[37] P. Del Moral, M. Ledoux, and L. Miclo. About super-contraction properties of markov kernels. Publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités, no 01-01, Université Paul Sabatier, 2001.

[38] P. Del Moral and L. Miclo. Asymptotic stability of non linear semigroup of Feynman-Kac type. Préprint, publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités, no 04-99, 1999.

[39] P. Del Moral and L. Miclo. On the convergence and the applications of the generalized simulated annealing. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4):1222–1250, 1999.

[40] P. Del Moral and L. Miclo. About the strong propagation of chaos for interacting particle approximations of Feynman-Kac formulae. Publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités, no 08-00, Université Paul Sabatier, 2000.

[41] P. Del Moral and L. Miclo. Asymptotic results for genetic algorithms with applications to non linear estimation. In L. Kallel B. Naudts, editor, *Proceedings Second EvoNet Summer School on Theoretical Aspects of Evolutionary Computing*, Natural Computing Series. Springer-Verlag, 2000.

[42] P. Del Moral and L. Miclo. Branching and interacting particle systems approximations of feynman-kac formulae with applications to non-linear filtering. In J. Azéma, M. Emery, M. Ledoux, and M. Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XXXIV*, Lecture Notes in Mathematics 1729, pages 1–145. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[43] P. Del Moral and L. Miclo. A Moran particle system approximation of Feynman-Kac formulae. *Stochastic Processes and their Applications*, 86:193–216, 2000.

[44] P. Del Moral and L. Miclo. Particle approximations of Lyapunov exponents connected to Feynman-Kac-Scrhödinger semigroups. Préprint, publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités no 01-08, 2001.

[45] P. Del Moral and L. Miclo. Genealogies and increasing propagations of chaos for Feynman-Kac and genetic models. *The Annals of Applied Probability*, 2001 (to appear).

[46] P. Del Moral, J.C. Noyer, G. Rigal, and G. Salut. Traitement particulaire du signal radar, détection, estimation et reconnaissance de cibles aériennes. Technical report, LAAS/CNRS, Toulouse, 1992.

[47] P. Del Moral, J.C. Noyer, and G. Salut. Maslov optimization theory: Stochastic interpretation, particle resolution. In *Proceedings de XI Conf. Internationale sur l'Analyse et l'Optimisation des Systèmes, Ecole des Mines de Sophia Antipolis*, volume 199, pages 312–318. Lecture Note in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1994.

[48] P. Del Moral, J.C. Noyer, and G. Salut. Résolution particulaire et traitement non-linéaire du signal : application radar/sonar. In *Traitement du signal*, September 1995.

[49] P. Del Moral, G. Rigal, and G. Salut. Estimation et commande optimale non linéaire. Technical Report 2, LAAS/CNRS, Toulouse, March 1992. Contract D.R.E.T.-DIGILOG.

[50] P. Del Moral, G. Rigal, and G. Salut. Estimation et commande optimale non-linéaire: un cadre unifié pour la résolution particulaire. Technical report, LAAS/CNRS, Toulouse, 1992. Contrat DRET-DIGILOG-LAAS/CNRS.

[51] P. Del Moral, G. Rigal, and G. Salut. Filtrage non-linéaire non-gaussien appliqué au recalage de plates-formes inertielles. Technical report, LAAS/CNRS, Toulouse, 1992. STCAN/DIGILOG-LAAS/CNRS contract no. A.91.77.013.

[52] P. Del Moral and G. Salut. Nonlinear filtering using monte carlo methods. *C.R. Académie des Sciences, Paris, Série I*, 320:1147–1152, 1995.

[53] P. Del Moral and G. Salut. Particle interpretation of nonlinear filtering and optimization. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 5(3):355–372, 1998.

[54] P. Del Moral and T. Zajic. A note on Laplace-Varadhan's integral lemma. Préprint, publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités no 01-09 2001, http://www.lsp.ups-tlse.fr/Delmoral/preprints.html.

[55] B. Delyon and O. Zeitouni. Liapunov exponents for filtering problems. In M.H.A. Davis and R.J. Elliot, editors, *Applied Stochastic Analysis*, pages 511–521. Springer-Verlag, 1991.

[56] E.B. Dynkin and A. Mandelbaum. Symmetric statistics, Poisson processes and multiple Wiener integrals. *The Annals of Statistics*, 11:739–745, 1983.

[57] A. Etheridge and P. March. A note on superprocesses. *Probability Theory and Related Fields*, 89:141–147, 1991.

[58] N.J. Gordon, D.J. Salmon, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings F*, 140:107–113, 1993.

[59] C. Graham and S. Méléard. Stochastic particle approximations for generalized Boltzmann models and convergence estimates. *The Annals of Probability*, 25(1):115–132, 1997.

[60] J.H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems.* University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[61] G. Rautu M.B. Ruskai E. Seneta G. Zbaganu J.E. Cohen, Y. Iwasa. Relative entropy under mappings by stochastic matrices. *Linear Algebra and Applications*, 179:211–235, 1993.

[62] G. Kitagawa. Monte-Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal on Computational and Graphical Statistics*, 5(1):1–25, 1996.

[63] H. Kunita. Asymptotic behavior of nonlinear filtering errors of Markov processes. *Journal of Multivariate Analysis*, 1(4):365–393, 1971.

[64] H. Kunita. Ergodic properties nonlinear filtering processes. In K.C. Alexander and J.C. Watkins, editors, *Spatial Stochastic Processes*. Birkhaüser Boston, Boston, MA, 1991.

[65] T. Kurtz and J; Xiong. Particle representations for a class of nonlinear spdes. *Stochastic Processes and their Applications*, 83:103–126, 1999.

[66] V.P. Maslov. *Méthodes opératorielles*. Edition Mir, Moscow, 1987.

[67] S. Méléard. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems; McKean-Vlasov and Boltzmann models. In D. Talay and L. Tubaro, editors, *Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations, Montecatini Terme, 1995*, Lecture Notes in Mathematics 1627. Springer-Verlag, 1996.

[68] L. Miclo. Remarques sur l'hypercontractivité et l'évolution de l'entropie pour des chaînes de Markov finies. In J. Azéma, M. Emery, and M. Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XXXI*, Lecture Notes in Mathematics 1655, pages 136–167. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[69] D. Ocone and E Pardoux. Asymptotic stability of the optimal filter with respect to its initial condition. *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Control and Optimization*, 34:226–243, 1996.

[70] T. Shiga and H. Tanaka. Central limit theorem for a system of markovian particles with mean field interaction. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie verwandte Gebiete*, 69, 1985. 439–459.

[71] L. Stettner. On invariant measures of filtering processes. In K. Helmes and N. Kohlmann, editors, *Stochastic Differential Systems, Proc. 4th Bad Honnef Conf.*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., pages 279–292, 1989.

[72] L. Stettner. Invariant measures of pair state/approximate filtering process. In *Colloq. Math. LXII*, pages 347–352, 1991.

[73] A. Trouvé. *Parallélisation massive du recuit simulé*. PhD thesis, Université Paris 11, Janvier 1993. Thèse de doctorat.

[74] R. Van der Boomgaard. *Mathematical morphology*. Phd thesis, University of Amsterdam, 1992.