

Suivi de mouvement fluide par filtrage stochastique

Anne Cuzol

Etienne Mémín

IRISA

Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu,
35 042 Rennes Cedex, France.
{acuzol,memin}@irisa.fr

Résumé

Nous présentons dans cet article une méthode pour le suivi temporel de champs de déplacements décrivant des mouvements fluides. La technique proposée est formalisée dans un cadre de filtrage bayésien séquentiel. Le filtre que nous proposons combine un processus de diffusion de Itô issu d'une formulation stochastique de l'équation de Navier-Stokes sous sa forme vorticité-vitesse, et des observations discrètes extraites de la séquence d'images. L'algorithme de suivi qui en découle fournit des estimations précises et robustes des champs de déplacements instantanés tout au long de la séquence. En vue de définir un espace d'état de dimension raisonnable adaptée au problème de filtrage stochastique, nous représentons le champ de déplacements par une combinaison de fonctions de base adaptées. Ces fonctions de base sont issues de l'intégration de Biot-Savart à partir d'une discrétisation régularisée de la vorticité et de la divergence du champ de vecteurs. L'efficacité de la méthode est démontrée sur une longue séquence réelle montrant l'évolution de vortex générés à l'extrémité d'une aile d'avion.

Mots Clef

Mouvement fluide, filtrage non linéaire, filtrage particulaire.

Abstract

In this paper we present a method for the tracking of fluid flows velocity fields. The technique we propose is formalized within a sequential Bayesian filtering framework. The filter we propose here combines an Itô diffusion process coming from a stochastic formulation of the vorticity-velocity form of Navier-Stokes equation and discrete measurements extracted from the image sequence. The resulting tracker provides robust and consistent estimations of instantaneous motion fields along the whole image sequence. In order to handle a state space of reasonable dimension for the stochastic filtering problem, we represent the motion field as a combination of adapted basis functions. The used basis functions ensue from a mollification of Biot-Savart integral and a discretization of the vorticity and divergence maps

of the fluid vector field. The efficiency of the method is demonstrated on a long real world sequence showing a vortex launch at tip of airplane wing.

Keywords

Fluid motion, non linear filtering, particle filtering.

1 Introduction

L'analyse de séquences d'images décrivant des phénomènes fluides est de grande importance dans de nombreux domaines. Dans le domaine des sciences géophysiques par exemple, on pourra citer la météorologie et l'océanographie, où l'on cherche à suivre des systèmes nuageux pour effectuer des prévisions, à estimer des courants océaniques ou évaluer la dérive d'entités passives telles que des icebergs ou des agents polluants. L'analyse d'images d'écoulements fluides est également cruciale en mécanique des fluides expérimentale pour analyser la formation de vortex en aval de solides (cylindres, ailes d'avion). Pour toutes les applications mentionnées ci-dessus il est d'un intérêt majeur de suivre au cours du temps des structures représentatives de l'écoulement, et ceci le plus précisément possible. Un tel suivi revient à estimer des déplacements lagrangiens pour les structures d'intérêt et peut être réalisé grâce à des méthodes d'intégration déterministe telles que la méthode d'Euler ou de Runge et Kutta. Ces méthodes d'intégration numérique reposent sur une description continue et spatio-temporelle du champ de déplacements et nécessitent donc l'emploi de schémas d'interpolation sur tout le domaine spatial et temporel concerné. En conséquence, elles sont assez sensibles aux erreurs locales de mesure ou à des estimations de mouvement imprécises. Lorsque les images sont bruitées ou lorsque les déplacements sont de grande amplitude et chaotiques (pour des écoulements turbulents par exemple), l'estimation de mouvement est difficile et sujette aux erreurs. Une autre source d'erreur est inhérente aux techniques d'estimation de mouvement (voir par exemple [2] pour un rappel étendu sur les différentes méthodes d'estimation de mouvement). La plupart des approches n'utilisent en effet qu'un ensemble réduit d'images (classiquement deux images consécutives d'une séquence) et peuvent

donc souffrir d'une incohérence temporelle d'une image à l'autre. L'extension des régularisations spatiales aux régularisations spatio-temporelles [4, 19] ou l'introduction d'une contrainte dynamique simple dans les techniques de segmentation de mouvement reposent sur des hypothèses grossières sur la dynamique ou sont uniquement reliées au mouvement d'objets rigides [12].

De manière à améliorer le suivi de structures dynamiques à partir de séquences d'images d'écoulements fluides, nous proposons une méthode de suivi conduisant à une estimation robuste et cohérente dans le temps des champs de déplacements instantanés tout au long de la séquence. Afin d'être robuste au bruit d'acquisition ou aux conditions d'illumination, la technique proposée est formalisée dans un cadre de filtrage bayésien récursif.

Pour mettre en place un tel filtrage, nous nous heurtons à trois difficultés. La première concerne la dimension de l'espace d'état associé à un champ de vitesses. Les méthodes de suivi probabiliste basées sur Monte-Carlo [11, 13, 17] sont en effet construites pour le suivi d'objets de dimensions réduites tels que des points ou des courbes décrites par quelques points de contrôle. Ces techniques ne sont pas capables de traiter des caractéristiques de dimension élevée comme des champs de vecteurs denses. En vue de traiter des champs de déplacements de dimension raisonnable, nous décrivons tout d'abord une paramétrisation originale des écoulements fluides à partir de fonctions de base adéquates. Les fonctions de base utilisées sont issues de l'intégration de Biot-Savart à partir d'une discrétisation régularisée de la vorticité et de la divergence du champ de vecteurs. Une telle représentation permet une description parcimonieuse du mouvement fluide. La deuxième difficulté est liée à la nature continue de la loi dynamique sous-jacente. Le problème consiste alors à définir une approximation de Monte-Carlo séquentielle du filtrage stochastique, combinant une loi dynamique continue décrite par une équation différentielle stochastique et des mesures discrètes extraites de la séquence d'images. La troisième difficulté provient de la définition de la loi dynamique elle-même. Cette loi doit être suffisamment simple pour être implémentée de manière efficace tout en prédisant le plus précisément possible l'évolution du champ de déplacements.

Cet article est organisé comme suit: après avoir rappelé quelques notions sur les champs de vecteurs, nous décrivons la représentation de faible dimension du mouvement fluide sur laquelle nous nous reposons. Dans une deuxième partie nous présentons le filtre bayésien que nous proposons pour le suivi de mouvement fluide.

2 Estimateur paramétrique de mouvement fluide

2.1 Notions sur les champs de vecteurs 2D

Un champ de vecteurs bidimensionnel \mathbf{w} est une application définie sur un ensemble borné Ω de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Nous le notons $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^T$, où

$\mathbf{x} = (x, y)$ et x et y sont les coordonnées spatiales. Chaque composante du champ de vecteurs est supposée deux fois continûment différentiable: $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Soit $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ l'opérateur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x et y .

La *divergence* est définie par: $\text{div } \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{w}$

et la *vorticité* scalaire du champ de vecteurs par: $\text{curl } \mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{w}^\perp$, où $\mathbf{w}^\perp = (-v, u)$ est l'orthogonal de \mathbf{w} .

La vorticité rend compte de la présence d'un mouvement tourbillonnaire, alors que la divergence est reliée à la présence de *puits* ou *sources*. Un champ de vecteur à divergence nulle en tout point est dit *solénoïdal*. De manière similaire, un champ de vorticité nulle sera dit *irrotationnel*. Un résultat connu stipule que tout champ irrotationnel est associée à une fonction scalaire ϕ , appelée *potentiel de vitesse*, telle que $\mathbf{w} = \nabla \phi$. De la même manière on peut montrer qu'il existe une fonction scalaire ψ appelée *fonction de courant* telle que $\mathbf{w}^\perp = \nabla \psi$.

Tout champ de vecteurs s'annulant à l'infini peut être décomposée en somme d'une composante irrotationnelle à vorticité nulle et d'une composante solénoïdale à divergence nulle. Cette décomposition est connue sous le nom de *décomposition de Helmholtz*. Quand on ne dispose pas de conditions nulles au bord, une nouvelle composante appelée *laminaire* doit être ajoutée à la décomposition. La décomposition s'écrit alors: $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{irr} + \mathbf{w}_{sol} + \mathbf{w}_{lam}$. Cette dernière composante peut être approchée à l'aide de l'estimateur de Horn et Schunck en fixant un fort coefficient de régularisation [8]. Nous considérons à partir de maintenant que le mouvement d u à la composante laminaire a été préalablement retranchée de la séquence d'images. Nous supposons donc une condition de bord nulle à l'infini en sachant que la séquence d'images $I(\mathbf{x}, t)$ est reliée à la séquence originale $I_o(\mathbf{x}, t)$ par $I(\mathbf{x}, t) = I_o(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{lam}(\mathbf{x}, t), t)$.

En remplaçant les deux composantes \mathbf{w}_{irr} et \mathbf{w}_{sol} par leurs expressions en termes de fonctions de potentiel et en calculant la divergence et la vorticité des champs nous pouvons écrire les fonctions de potentiel comme solutions de deux équations de Poisson:

$$\Delta \phi = \text{div } \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \Delta \psi = -\text{curl } \mathbf{w}, \quad (1)$$

avec Δ l'opérateur Laplacien. Ces solutions peuvent être écrites comme des produits de convolution de la manière suivante:

$$\phi = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \text{div } \mathbf{w}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = G * \text{div } \mathbf{w}, \quad (2)$$

$$\psi = - \int G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = -G * \text{curl } \mathbf{w}, \quad (3)$$

avec G fonction de Green associée au Laplacien bidimensionnel:

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x}|). \quad (4)$$

Les champs de vecteurs \mathbf{w}_{irr} et \mathbf{w}_{sol} s'écrivant respectivement comme le gradient et le gradient orthogonal des fonctions de potentiel ϕ et ψ , l'équation (2-3) devient:

$$\mathbf{w}_{irr} = K * \text{div } \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{sol} = -K^\perp * \text{curl } \mathbf{w}, \quad (5)$$

avec K gradient du noyau de Green:

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi|\mathbf{x}|^2}. \quad (6)$$

La deuxième équation de (5) est connue sous le nom d'*intégrale de Biot-Savart*. Les deux équations indiquent que les composantes solénoïdale et irrotationnelle du champ (et donc le champ complet) peuvent être reconstruites si la divergence et la vorticité du champ de déplacements sont connues.

2.2 Particules de vortex et de source

L'idée des méthodes de particules de vortex [5, 14] consiste à approcher la vorticité d'un champ \mathbf{w} par une somme discrète de Diracs situées en des *vortex ponctuels* \mathbf{x}_i :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (7)$$

Cette discrétisation de la vorticité en un nombre limité d'éléments permet d'évaluer le champ de déplacements directement à partir de l'intégrale de Biot-Savart (equ. 5). Des singularités apparaissent cependant dans l'évaluation du champ, lorsque deux particules sont trop proches l'une de l'autre, à cause de la singularité dans le gradient du noyau de Green. Ces singularités peuvent être éliminées en lissant la mesure de Dirac par une fonction *blob*, conduisant finalement à une version lissée de K . Soit f_ϵ une telle fonction blob mise à l'échelle par un paramètre ϵ : $f_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2} f(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon})$. Le noyau lissé est alors défini par $K_\epsilon = K * f_\epsilon$. Le degré de lissage est déterminé par la valeur de ϵ . Si $\epsilon \rightarrow 0$, f_ϵ tend vers la fonction Dirac et $K_\epsilon \rightarrow K$.

Une représentation analogue peut être écrite pour la divergence du champ, à partir de *particules de source*:

$$\text{div } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i f_{\epsilon_i}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (8)$$

où \mathbf{x}_i indique le centre de chaque fonction de base f_{ϵ_i} , le coefficient réel γ_i représente la force associée à la particule i , et ϵ_i son domaine d'influence. Nous considérons que tous ces paramètres sont libres de varier d'une fonction à l'autre.

2.3 Estimation à partir d'une séquence d'images

Comme nous l'avons vu précédemment, la discrétisation de la vorticité à l'aide de p particules de vortex conduit, grâce à l'intégrale de Biot-Savart, à la représentation suivante pour la composante solénoïdale du champ de d  pla-

cement:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} K^\perp * f_{\epsilon_i^{sol}}(\mathbf{x}_i^{sol} - \mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} K_{\epsilon_i^{sol}}^\perp(\mathbf{x}_i^{sol} - \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9)$$

où $K_{\epsilon_i^{sol}}^\perp$ est le noyau obtenu en convoluant le gradient orthogonal du noyau de Green avec la fonction de lissage. Une représentation similaire peut être obtenue pour la composante irrotationnelle à l'aide de q particules de source. En conclusion, nous obtenons une approximation du champ de déplacements par une somme pondérée de fonctions de base définies par la position de leur centre et leur domaine d'influence. Avec une fonction de lissage gaussienne nous obtenons une forme analytique pour le noyau lissé associé, de laquelle nous pouvons en déduire les expressions finales pour les deux composantes:

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} \frac{(\mathbf{x}_i^{sol} - \mathbf{x})^\perp}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{sol}|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^{sol}|^2}{\epsilon_i^{sol 2}}}\right), \quad (10)$$

et

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^q \gamma_i^{irr} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^{irr}}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^{irr}|^2}{\epsilon_i^{irr 2}}}\right). \quad (11)$$

Cette représentation paramétrique va être liée à un modèle de variation spatio-temporel de la luminance, de manière à estimer le mouvement fluide à partir des données de la séquence d'images.

Pour des séquences d'images décrivant des phénomènes fluides, l'hypothèse usuelle de conservation de luminance ($\frac{dI}{dt} = 0$) ne permet pas de modéliser des changements temporels de luminance dus au déplacement tridimensionnel de matière. Pour de telles séquences, certains travaux ont montré qu'un modèle de données construit à partir de la propriété de conservation de la matière de la mécanique des fluides (  galement connue sous le nom d'*  quation de continuité*) constitue un meilleur modèle [3, 7, 18, 20]. Ce modèle de données s'écrit:

$$\frac{dI}{dt} + I \text{div } \mathbf{w} = 0. \quad (12)$$

Une telle contrainte décrit l'effet d'un mouvement divergent sur les changements de luminance. Il est ainsi possible de modéliser l'apparition ou la disparition de matière caus  e par des mouvements 3D qui ne sont pas dans le plan image. Notons que pour un champ à divergence nulle, nous retrouvons l'équation usuelle de conservation de la luminance. Pour des déplacements de grande amplitude (mouvements rapides ou intervalle de temps long entre deux images comme en météorologie) une forme intégrée de cette contrainte peut être utilisée [7]:

$$I(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}), t + 1) \exp(\text{div } \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (13)$$

Cette contrainte stipule que l'image au temps $t + 1$ est liée à l'image au temps t par un facteur d'échelle qui dépend du mouvement divergent. Avec une divergence nulle nous retrouvons la contrainte classique de différence d'images déplacées.

Nous cherchons finalement un champ de déplacements qui minimise la fonction de coût suivante, considérant que la contrainte est valide presque partout dans le plan image:

$$\mathcal{F}(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} [I(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}), t + 1) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I(\mathbf{x}, t)]^2 d\mathbf{x}. \quad (14)$$

A partir de cette fonction de coût, le champ inconnu approché par les représentations de particules de vortex et de source est obtenu en résolvant le problème de minimisation suivant:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \mathcal{F}(I, \mathbf{w}(\beta)), \quad (15)$$

avec $\beta = (\{\mathbf{x}_i^{sol}, \gamma_i^{sol}, \epsilon_i^{sol}\}_{i=1:p}, \{\mathbf{x}_i^{irr}, \gamma_i^{irr}, \epsilon_i^{irr}\}_{i=1:q})$. La solution est recherchée en termes de positions des particules, coefficients de force et domaines d'influence. La forme particulière du modèle de données conduit malheureusement à un problème de minimisation hautement non linéaire. Pour résoudre ce problème d'optimisation nous avons choisi un schéma de type moindres carrés non linéaire incorporé dans un cadre multirésolution, associé à une méthode d'optimisation de type gradient conjugué généralisé, connue sous le nom de méthode de *Fletcher-Reeves*. Les particules sont alors déplacées par la méthode mean shift [6]. Cette procédure nous permet de déplacer l'ensemble des particules de vortex et de source vers les modes d'une distribution de probabilité liée à une erreur de reconstruction locale. Les lecteurs intéressés pourront se référer à [9] où cette optimisation alternée est décrite.

Afin d'introduire une consistance temporelle pour les déplacements calculés le long de la séquence nous proposons une méthode de filtrage stochastique pour le suivi de la composante solénoïdale d'un champ de mouvement fluide.

3 Problème de filtrage

Avant de décrire en détails la technique de suivi que nous proposons, nous rappelons d'abord les principes du filtrage stochastique discret. Le filtrage stochastique a pour but de fournir des estimations sur une séquence de variables aléatoires décrivant une cible d'intérêt à différents instants. La séquence est supposée être une chaîne de Markov cachée $\mathbf{x}_{0:n} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n\}$ à instants discrets, de distribution initiale $p(\mathbf{x}_0)$ et transition $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$. À un instant donné, l'inférence est effectuée sur la base des estimations précédentes et des observations bruitées et incomplètes. Ces mesures sont notées $\mathbf{z}_{1:n} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ et sont supposées indépendantes conditionnellement à l'état, de distribution de probabilité $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$.

Les filtres stochastiques constituent des procédures permettant d'estimer la distribution de probabilité *a posteriori*

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ de l'état sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant k . L'inférence est réalisée en deux étapes:

- Connaissant $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$, l'étape de prédiction utilise la loi de transition $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ pour effectuer une première approximation de l'état suivant:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

- La vraisemblance $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ fournie par la nouvelle observation \mathbf{z}_k est utilisée pour calculer la loi *a posteriori* à l'instant k :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k}$$

Dans le cas d'un modèle linéaire gaussien la forme analytique de la loi *a posteriori* est connue et le problème de filtrage est résolu par le filtre de Kalman-Bucy. Dans un cas non linéaire/non gaussien, le filtrage particulaire permet une approximation de Monte-Carlo récursive de la densité *a posteriori*. Les filtres particuliers approchent en effet la densité $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$ par une somme pondérée d'éléments de l'espace d'état appelés particules $\{\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}\}$. Ces particules représentent des trajectoires hypothèses de l'état partant de la condition initiale \mathbf{x}_0 . Elles ne doivent pas être confondues avec les particules de vortex et de source introduites précédemment. À chaque itération k , un ensemble de particules est tiré à partir d'une approximation de la loi *a posteriori* appelée fonction d'importance et notée $\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$. Un poids est alors attribué à chaque particule, à partir de la vraisemblance de l'observation. En supposant que la fonction d'importance peut être factorisée comme suit:

$\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k}) = \pi(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})$, la méthode devient séquentielle et est connue sous le nom d'*échantillonnage pondéré séquentiel* [11, 13].

Pendant l'étape de prédiction, $\mathbf{x}_k^{(i)}$ est tiré à partir de $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})$, et la trajectoire $\{\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}\}$ est augmentée de $\mathbf{x}_k^{(i)}$. L'étape de correction consiste à évaluer les poids de manière récursive:

$$w_k^{(i)} = w_k^{(i-1)} \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})}$$

L'estimation de Monte-Carlo de la loi *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ est alors:

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}).$$

En pratique, il est connu que la méthode de filtrage particulaire conduit à une augmentation de la variance des poids au cours du temps et à une diminution du nombre de particules ayant un poids significatif. Une solution pour contourner ce problème est de minimiser la variance des poids en utilisant la fonction d'importance optimale

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_k)$ [1, 11]. Cette fonction n'est malheureusement accessible que dans le cas d'une équation de mesure linéaire avec vraisemblance gaussienne ou provenant d'un mélange de gaussiennes [1]. Lorsqu'une telle fonction d'importance optimale n'est pas disponible, la fonction d'importance usuellement utilisée est la loi de prédiction $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$. Dans ce cas, la formulation récursive du calcul des poids est donnée par:

$$w_k^{(i)} = w_k^{(i-1)} p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}). \quad (16)$$

Une autre procédure pour éviter la dégénérescence des particules consiste à effectuer un rééchantillonnage. Les procédures de rééchantillonnage remplacent les trajectoires de poids faibles par celles de poids forts.

4 Application au suivi de vortex

Dans cette partie nous montrons comment un tel schéma peut être adapté pour suivre la composante solénoïdale (ie. les particules de vortex) du champ de déplacements. Par souci de simplicité nous supposons ici que le champ de déplacements complet est à divergence nulle et se réduit donc à une composante solénoïdale.

4.1 Dynamique des particules de vortex

Nous rappelons que l'évolution d'écoulements fluides incompressibles est décrite par l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{w}, \quad (17)$$

où $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse, ρ est la densité du fluide, $p = p(\mathbf{x}, t)$ la pression et ν le coefficient de viscosité du fluide. Calculer le curl de l'équation (17) conduit à la formulation de l'équation de Navier-Stokes en termes de vitesse et de vorticité:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \xi = \nu \Delta \xi, \quad (18)$$

où ξ représente la vorticité, définie par $\xi = \text{curl } \mathbf{w}$.   chaque pas de temps, l'évolution de la vorticité est décrite par une équation de convection-diffusion. Cette équation (18) peut être résolue par deux étapes distinctes. Cette manière de traiter l'équation, –connue sous le nom de méthode de *viscous splitting* [5] – permet de traiter successivement la partie non visqueuse et la partie visqueuse de l'équation. Ces deux parties sont:

partie convection

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \xi = 0, \quad (19)$$

partie diffusion

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi. \quad (20)$$

Si \mathbf{x}_i représente le centre d'une particule de vortex comme décrit dans la section (2.2), les parties convection et diffusion sont données respectivement par:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) \quad \text{et} \quad \frac{d\xi(\mathbf{x}_i)}{dt} = 0, \quad (21)$$

et

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\xi(\mathbf{x}_i)}{dt} = \nu \Delta \xi(\mathbf{x}_i). \quad (22)$$

Le transport total de vorticité d  à la convection et à la diffusion est finalement donné par la combinaison de ces deux solutions. L'étape de convection est réalisée par une intégration avant. Pour des forces et domaines d'influence fixés les positions successives des particules décrivent le champ de déplacements sous-jacent à partir de l'équation (10) section (2.2). La partie diffusion peut être résolue par la méthode *random walk method* de Chorin [5]. Cette méthode repose sur l'interprétation probabiliste de la solution de l'équation de diffusion $\frac{d\xi(\mathbf{x}_i)}{dt} = \nu \Delta \xi(\mathbf{x}_i)$ et sur la relation entre diffusion et mouvement brownien. En effet, un ensemble de particules suivant un mouvement brownien conduit à une bonne approximation de l'équation de la chaleur [15]. La méthode consiste finalement à déplacer les particules de vortex par leur propre vitesse ( tape de convection) et à leur ajouter une perturbation gaussienne appropriée pour simuler la diffusion.

Soit \mathbf{X}_t le vecteur de \mathbb{R}^{2p} regroupant toutes les positions des particules de vortex $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1:p}$ au temps t . Soit $\mathbf{w}(\mathbf{X}_t)$ le vecteur des vitesses évaluées en ces positions. Le processus stochastique $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ évolue selon le processus de diffusion de Itô suivant:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t) dt + \sigma dB_t, \quad (23)$$

où dB est un mouvement brownien de dimension $2p$ à composantes indépendantes, et $\sigma = \sqrt{2\nu} + \eta$, où η traduit l'incertitude sur le modèle. La discrétisation d'une telle équation différentielle stochastique par un schéma d'Euler avec condition initiale $X_0^k = X^k$ conduit à:

$$\mathbf{X}_j^k = \mathbf{X}_{j-\Delta t}^k + \mathbf{w}(\mathbf{X}_{j-\Delta t}^k) \Delta t + \mathbf{v}_j, \quad (24)$$

avec \mathbf{v}_j bruits gaussiens indépendants, centrés et d'écart-type σ . L'évolution de l'état \mathbf{X} entre deux instants k et $k+1$ et pour un pas de discrétisation Δt est décrite par l'équation de transition suivante:

$$p(\mathbf{X}_j^k | \mathbf{X}_{j-\Delta t}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{X}_{j-\Delta t}^k + \mathbf{w}(\mathbf{X}_{j-\Delta t}^k) \Delta t, \sigma^2 \Delta t \mathbb{I}_{2p}), \quad (25)$$

où \mathbb{I}_{2p} représente la matrice identité $2p \times 2p$.

4.2  quation de mesure

L'ensemble $\mathbf{z}_{1:n} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ des mesures est extrait de la séquence d'images.   chaque étape k , l'équation de mesure est construite à partir du champ estimé \mathbf{w}^k (obtenu

à partir des positions prédites des particules de vortex) et de la paire d'images (I_k, I_{k+1}) . \mathbf{w} est indexé par k pour mettre en avant le fait qu'il dépend des positions des particules de vortex au temps k .

Afin de caractériser la vraisemblance de la mesure, une région R_i est définie autour de chaque particule de vortex \mathbf{x}_i . En pratique, cette région est choisie comme étant le domaine d'influence de la particule correspondante. En supposant une conservation de la luminance pour les points appartenant à R_i , nous posons:

$$I_k(\mathbf{x}) = I_{k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{w}^k(\mathbf{x})) + u_k, \quad (26)$$

où u_k est un bruit gaussien, centré et de variance σ^2 .

Soient R l'union des régions R_i et \mathbf{z}_k le vecteur collectant les valeurs de luminance $I_k(\mathbf{x})$ pour tout \mathbf{x} dans R . En considérant $I_k(\mathbf{x})$ et $I_k(\mathbf{x}')$ indépendants conditionnellement à $\mathbf{X}_k \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in R$, la vraisemblance s'écrit:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{X}_k) = \prod_{\mathbf{x} \in R} p(I_k(\mathbf{x}) | \mathbf{X}_k), \quad (27)$$

et donc

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{X}_k) \propto \exp\left(-\int_R \frac{(I_k(\mathbf{x}) - I_{k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{w}^k(\mathbf{x})))^2}{2\sigma^2} d\mathbf{x}\right). \quad (28)$$

4.3 Suivi par filtrage non linéaire

La méthode de filtrage présentée dans la partie 3 est utilisée pour suivre l'ensemble $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1:p}$ des particules de vortex. La nature hautement non linéaire de la dynamique de l'état et de la vraisemblance des mesures nécessite l'emploi de la méthode du filtrage particulaire. La fonction d'importance optimale n'étant pas accessible dans notre cas, nous fixons la loi de prédiction comme fonction d'importance et utilisons la formule (16) pour calculer les poids des particules. Les étapes de prédiction et de correction du filtrage particulaire sont réalisées itérativement, accompagnées d'un rééchantillonnage du nuage de particules si nécessaire.

Pour $k = 0$, la distribution initiale $p(\mathbf{X}_0)$ de l'ensemble des particules de vortex est donnée par la méthode d'estimation présentée dans la partie 2.3. La méthode donne en effet un ensemble de positions pour les particules de vortex et la quantité de vorticité transportée par chacune d'entre elles (  travers le coefficient de force et le paramètre d'influence estimés). Cette distribution initiale conduit à la représentation initiale de la composante solénoïdale.

Connaissant $p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{z}_{k-1})$, les particules de filtrage sont échantillonnées à partir de (25), avec condition initiale $X_{j=0}^{k-1} = X^{k-1}$. L'échantillonnage est réalisé itérativement jusqu'à $j = N$ (avec $N\Delta t = 1$). Il est important de souligner qu'aucune étape de correction ne peut être réalisée entre deux instants de la séquence d'images car aucune observation n'est disponible entre $j = 0$ et $j = N$.   $j = N$ une nouvelle mesure appar it et les poids des particules peuvent être modifiés selon (16), avec $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{X}_k^{(i)})$ donnée par (28).

5 Résultats

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus sur une séquence réelle de 80 images montrant l'évolution de vortex générés au bout d'une aile d'avion. Le suivi est initialisé à l'aide de la méthode d'estimation décrite dans la partie (2.3). L' tat initial est présenté figure (1). Sur cette figure sont représentés la première image de la séquence, le champ de vecteurs initial et la carte de vorticité correspondante. Sur cette carte on peut voir un vortex principal et un vortex secondaire à côté du premier. Le résultat a été obtenu avec un ensemble de 15 particules de vortex.

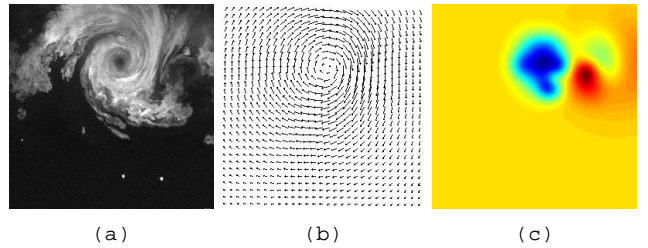


FIG. 1 – (a) Première image de la séquence; (b) champ de déplacements estimé au temps $k = 0$ avec la méthode présentée en section 2.3; (c) distribution de vorticité correspondante, ensemble des particules de vortex utilisées pour initialiser le suivi.

Afin de démontrer l'efficacité du suivi nous comparons la solution obtenue en considérant uniquement l'évolution selon la dynamique et la solution filtrée. La figure (2) montre le résultat obtenu en propageant l'ensemble initial des particules de vortex selon l'équation dynamique décrite par (23). La figure (3) montre le résultat obtenu par la méthode de filtrage non linéaire décrite dans la section précédente. L'algorithme de filtrage a été lancé avec les mêmes conditions initiales.

Comme on peut le voir sur la figure (2), les champs de déplacements obtenus à partir de la dynamique seule montrent un décalage significatif du vortex. De plus le vortex dégénère rapidement et présente des élongations à partir de l'image #30 qui ne sont pas visibles sur la séquence.

On peut constater sur la figure (3) que la solution obtenue par la méthode de suivi est visuellement beaucoup plus satisfaisante. Le mouvement du vortex est bien reconstruit à chaque instant et le décalage n'est plus observé. Ceci est également illustré par la comparaison des cartes de vorticité sur la figure (4). La déformation du vortex est bien reconstruite et suit bien les contours photométriques.

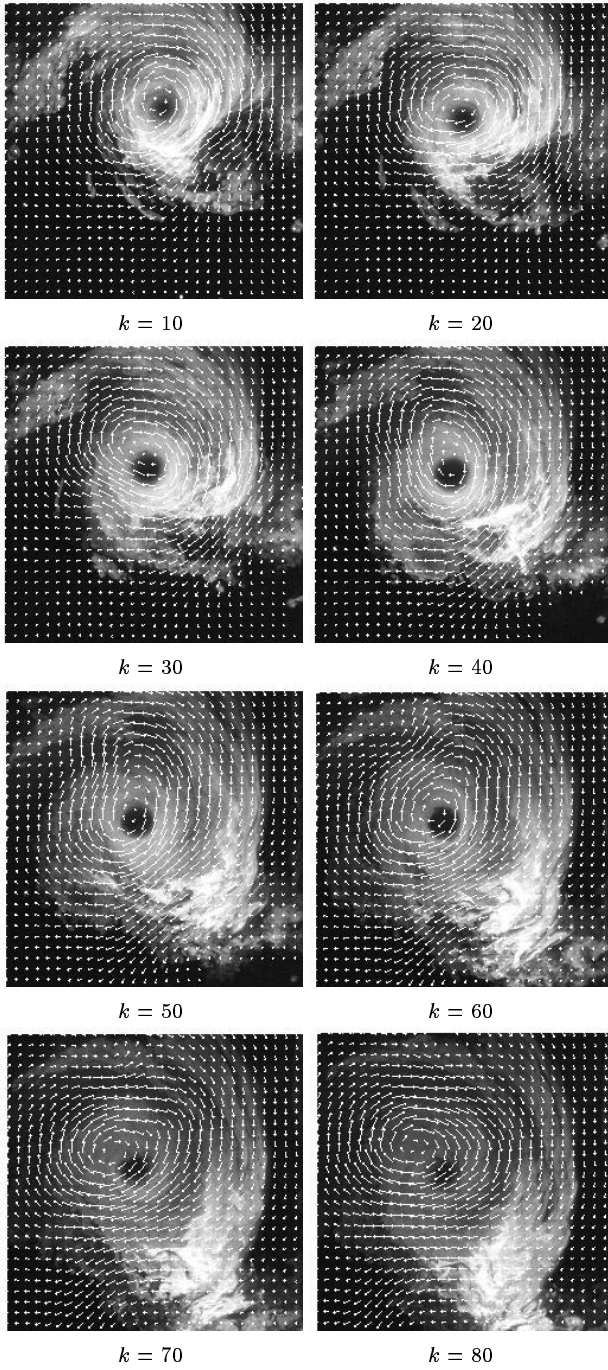


FIG. 2 – Évolution du champ de déplacements obtenue par propagation des particules de vortex selon le processus de diffusion de Itô (23).

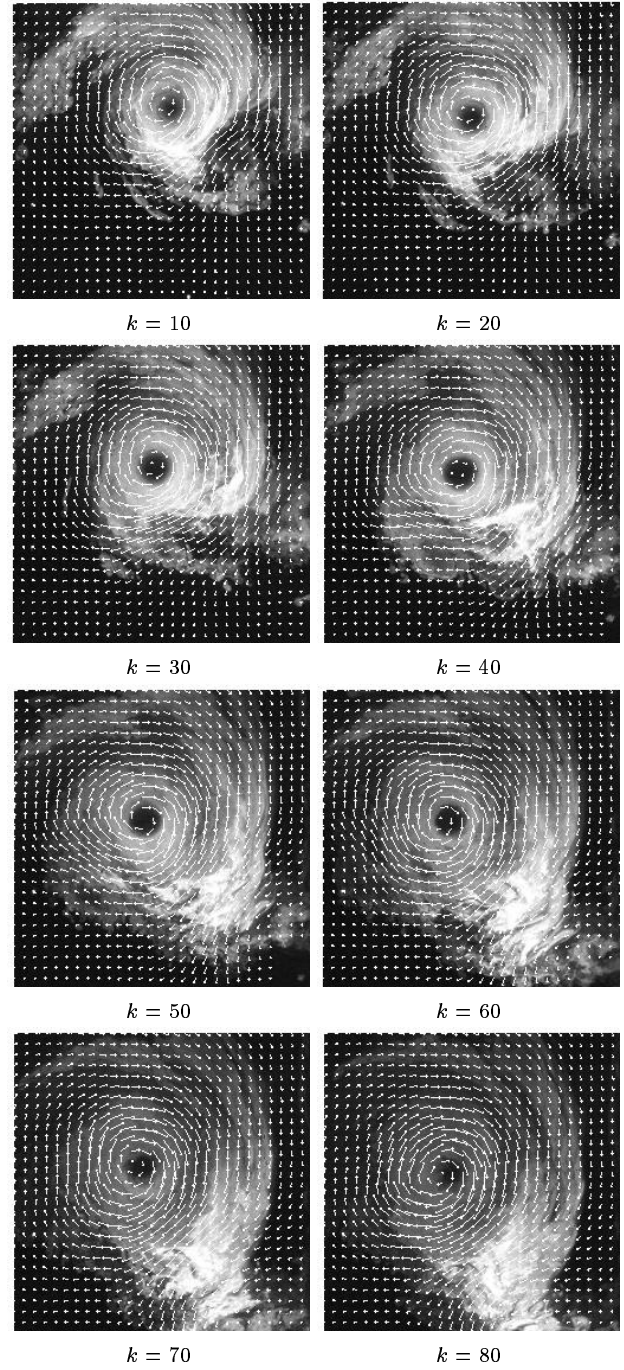


FIG. 3 – Évolution du champ de déplacements obtenue par filtrage particulaire.

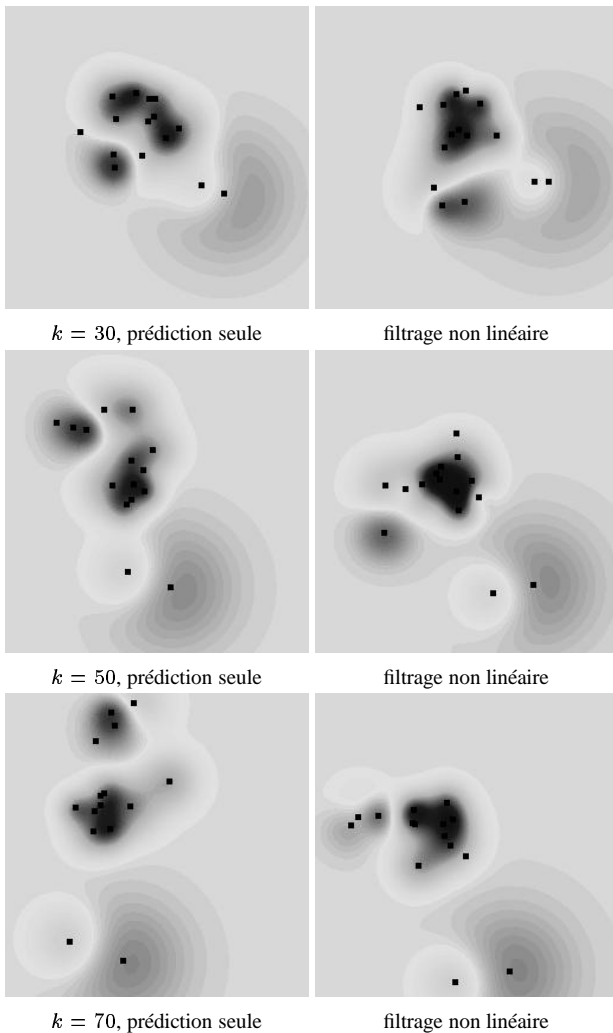


FIG. 4 – Comparaison des cartes de vorticité pour différents instants du suivi.

6 Conclusion

Nous avons proposé un algorithme de filtrage stochastique non linéaire adapté au suivi de mouvement fluide. Le suivi est basé sur une représentation de faible dimension du champ de déplacements obtenue à partir d'une discrétisation de la vorticité et la divergence. À notre connaissance, c'est la première fois qu'une méthode permettant de suivre le champ de déplacements complet est proposée. Une telle méthode permet de reconstituer un ensemble de champs de déplacements précis sur toute la séquence. Néanmoins, cette méthode est adaptée aux champs purement solénoïdaux. Lorsque des mouvements divergents sont présents la composante irrotationnelle correspondante doit être estimée à chaque instant ou être suivie à l'aide d'une autre loi dynamique.

Références

[1] E. Arnaud and E. Mémin. Optimal importance sampling for tracking in image sequences: application to point tracking. In *Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, May 2004.

[2] J. Barron, D. Fleet, and S. Beauchemin. Performance of optical flow techniques. *Int. J. Computer Vision*, 12(1):43–77, 1994.

[3] D. Béréziat, I. Herlin, and L. Younes. A generalized optical flow constraint and its physical interpretation. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, volume 2, pages 487–492, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.

[4] T. Brox, A. Bruhn, N. Papenbergh, and J. Weickert. High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. In *ECCV(4)*, pages 25–36, Prague, Czech Republic, May 2004.

[5] A. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57:785–796, 1973.

[6] D. Comaniciu and P. Meer. Mean shift: A robust approach toward feature space analysis. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 24(5):603–619, 2002.

[7] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 24(3):365–380, 2002.

[8] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Extraction of singular points from dense motion fields: an analytic approach. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 19(3):175–198, 2003.

[9] A. Cuzol and E. Mémin. Vortex and source particles for fluid motion estimation. In *5th Int. Conf. on Scale-Space and PDE methods in Computer Vision (Scale-Space'05)*, Hofgeismar, Germany, April 2005.

[10] P. Del Moral, J. Jacod, Ph. Protter. The monte-carlo method for filtering with discrete-time observations. *Probab. Theory Relat. Fields*, 120:346–368, 2001.

[11] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu. On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3):197–208, 2000.

[12] G. Fanerback. Very high accuracy velocity estimation using orientation tensors, parametric motion, and segmentation of the motion field. In *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, pages 5–26, 1999.

[13] M. Isard and A. Blake. Condensation – conditional density propagation for visual tracking. *Int. J. Computer Vision*, 29(1):5–28, 1998.

[14] A. Leonard. Vortex methods for flow simulation. *J. Comp. Phys.*, 37, 1980.

[15] B. Oksendal. *Stochastic differential equations*. Springer-Verlag, 1998.

[16] Ph. Protter P. Del Moral, J. Jacod. The monte-carlo method for filtering with discrete-time observations. *Probab. Theory Relat. Fields*, 120:346–368, 2001.

[17] J. Vermaak P. Pérez and A. Blake. Data fusion for visual tracking. *Proc. IEEE*, 92(3):495–513, 2004.

[18] B.G. Schunk. The motion constraint equation for optical flow. In *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, pages 20–22, Montreal, 1984.

[19] J. Weickert and C. Schnörr. Variational optic-flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 14(3):245–255, 2001.

[20] R. Wildes, M. Amabile, A.M. Lanzillotto, and T.S. Leu. Physically based fluid flow recovery from image sequences. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 969–975, 1997.