

Simulation particulière d'événements rares

P. Del Moral

Centre INRIA de Bordeaux - Sud Ouest

GT Projet AST&Risk Univ. Lyon, décembre 2008

- 1 Introduction, motivations
- 2 Interprétations particulières de mesures de Feynman-Kac
- 3 Calcul des Cte de normalisation
- 4 Quelques références

- 1 Introduction, motivations
 - Évaluation d'événements rares
 - Modèles stochastiques formalisés
 - L'heuristique des estimations particulières
 - Les 3 types de mesures d'occupation
- 2 Interprétations particulières de mesures de Feynman-Kac
- 3 Calcul des Cte de normalisation
- 4 Quelques références

Analyse d'événements rares

- **Processus stochastique formalisé** $X \oplus$ **Evt rare** A :

$$\text{Proba}(X \in A) \quad \& \quad \text{Loi}((X_0, \dots, X_t) \mid X \in A)$$

▷ **ingénierie/physique/biologique/économique** :

- *Ingénierie* : surcharges de réseaux, pannes, durées de fonctionnement,...
 - *Physique* : polymères dirigés, particules \in milieux absorbants, états fondamentaux d'opérateurs de Schrodinger.
 - *Finance* : probabilités de défauts, ruines,...
 - *Statistique* : queues de distributions, valeurs extrêmes,...
 - *Combinatoire* : Calcul de cardinaux d'ensembles complexes.
- **Stratégies du processus** \in **Evt rare** \Rightarrow **Prédiction et contrôle**.

$$X_t = F_t(X_{t-1}, W_t) \rightarrow \text{Lois}((W_0, \dots, W_t) \mid X \in A)$$

2 Ingrédients

- **1 Processus Physique/biologique/economique** : files d'attentes, réseau télécom, portefeuille, volatilité d'actifs, température, mouvements de fluides,...
- **1 fonction potentiel (type énergie ou indicatrice/restriction)**: dépassements de niveaux critiques, saturation, niveaux de propagations d'épidémies, dispersion de radioactivité, ruines,...

Objectifs

- Calcul des probabilités d'événements rares.
- Calculer **les lois des trajectoires complètes du processus** évoluant en régime critique \rightsquigarrow **prédiction** \oplus **contrôle**.

Flot de mesures à complexité croissante

- l'événement rare = **cascade d'événements intermédiaires (moins) rares** (énergies ou niveaux \uparrow , passerelles physiques).
- Flot de lois conditionnelles

$$n \rightarrow \eta_n = \text{Loi}(\text{processus} \mid \text{une série de } n \text{ évts intermédiaires } \downarrow)$$

- Les probabilités d'événements rares = Cts de normalisation.

Méthode particulière heuristique

(Simulation arbre de défauts de type généalogique \oplus % réussites)

- **Explorations/Propositions locales** des espaces d'états.
- **Branchements-Selection** des individus \in régimes critiques \uparrow .

5 Exemples de flots de mesures "cibles"

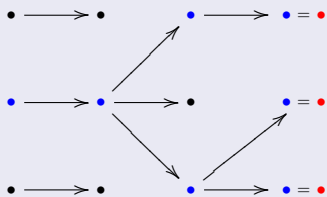
- 1 $\eta_n = \text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid \forall 0 \leq p \leq n \quad X_p \in A_p)$
- 2 $\eta_n(dx) \propto e^{-\beta_n V(x)} \lambda(dx)$ avec $\beta_n \uparrow$
- 3 $\eta_n(dx) \propto 1_{A_n}(x) \lambda(dx)$ avec $A_n \downarrow$
- 4 $\eta_n = \text{Loi}_\pi^K((X_0, \dots, X_n) \mid X_n = x_n)$.
- 5 $\eta_n = \text{Loi}(X \text{ atteint } B_n \mid X \text{ atteint } B_n \text{ avant } A)$

5 Heuristiques particulières :

- 1 M_n -transitions locales \oplus Selection des individus $\in A_n$ i.e. $\sim G_n = 1_{A_n}$
- 2 Trans. MCMC $\eta_n = \eta_n M_n \oplus$ Selection des individus $\propto G_n = e^{-(\beta_{n+1} - \beta_n)V}$
- 3 Trans. MCMC $\eta_n = \eta_n M_n \oplus$ Selection individus $\propto G_n = 1_{A_{n+1}}$
- 4 M -transitions locales \oplus Selection $G(x_1, x_2) = \frac{\pi(dx_2)K(x_2, dx_1)}{\pi(dx_1)M(x_1, dx_2)}$
- 5 M_n -transitions locales \oplus Selection-branchement aux sous niveaux $B_n \downarrow$.

Processus interaction/branch. \hookrightarrow 3 types de mesures d'occupation

($N = 3$)



● **Population courante** $\hookrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_n^i} \leftarrow i\text{-ième individu au temps } n$

● **Arbre généalogique** $\hookrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \dots, \xi_{n,n}^i)} \leftarrow i\text{-ième ligne ancestrale}$

● **Arbre généalogique complet** $\hookrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\xi_0^i, \xi_1^i, \dots, \xi_n^i)}$

● \oplus **Potentiels empiriques moyens [% de succès ($G_n = 1_A$)]** $\hookrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_n(\xi_n^i)$

Algorithmes stochastiques "équivalents" :

- Algorithmes génétiques.
- Processus de branchements spatio-temporel.
- Méthodes de Monte Carlo séquentielles.
- Algorithmes de "population Monte Carlo".
- Diffusion Monte Carlo (DMC), Quantum Monte Carlo (QMC), ...
- Botanique des processus d'adaptation $\sim \neq$ domaines d'applications :
bootstrapping, selection, pruning-enrichment, reconfiguration, cloning, go with the winner, spawning, condensation, grouping, rejuvenations, harmony searches, biomimetics, ...



1950 \leq [Méthodes de simulation heuristiques] \leq 1996

1 Introduction, motivations

2 Interprétations particulières de mesures de Feynman-Kac

- Quelques notations
- Analyse asymptotique
- Chaînes de Markov non linéaires
- Interprétations champ moyen
- QQ résultats de convergence

3 Calcul des Cte de normalisation

4 Quelques références

Quelques notations

E espace mesurable, $\mathcal{P}(E)$ proba. sur E , $\mathcal{B}(E)$ fonctions meas. bornées.

- $(\mu, f) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{B}(E) \longrightarrow \mu(f) = \int \mu(dx) f(x)$
- $M(x, dy)$ **opérateur intégral sur E**

$$M(f)(x) = \int M(x, dy) f(y)$$

$$[\mu M](dy) = \int \mu(dx) M(x, dy) \quad (\implies [\mu M](f) = \mu[M(f)])$$

- **Transformation de Bayes-Boltzmann-Gibbs** : $G : E \rightarrow [0, \infty[$ avec $\mu(G) > 0$

$$\Psi_G(\mu)(dx) = \frac{1}{\mu(G)} G(x) \mu(dx)$$

Population infinie $N \uparrow \infty$ " = " Modèles de Feynman-Kac $\simeq (G_n, M_n)$

$$\eta_n^N(f) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_n^i) \longrightarrow_{N \uparrow \infty} \eta_n(f) := \frac{\gamma_n(f)}{\gamma_n(1)}$$

avec les mesures de Feynman-Kac non normalisées :

$$\gamma_n(f) := \mathbb{E} \left(f_n(X_n) \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) \right)$$

[Fonction potentiel G_n] & [X_n chaîne de Markov \sim transitions M_n]

Modèles de Feynman-Kac \supset toutes les heuristiques précédentes

- $G_n = 1_{A_n}$, $G_n = e^{-(\beta_n - \beta_{n-1})V}$ ou plus généralement $G_n = e^{(V_{n+1} - V_n)}$.
- potentiel de Metropolis, détection passage de niveaux.
- Lois d'importance $\propto e^{\lambda V(X_n)} \mathbb{P}(X_n \in \cdot) \rightsquigarrow G_n(X_{n-1}, X_n) = e^{\lambda[V(X_n) - V(X_{n-1})]}$
- X_n -particule absorbée au taux $G_n \rightsquigarrow$ Proba de survie tps $n = \gamma_n(1)$

Un premier exemple "détaillé"

Mesures de Boltzmann-Gibbs :

$$\eta_n(dx) = \frac{1}{Z_n} e^{-\beta_n V(x)} \lambda(dx)$$

Représentation trajectorielle de Feynman-Kac :

$$\eta_n(f) := \frac{\gamma_n(f)}{\gamma_n(1)} \quad \text{avec} \quad \gamma_n(f) := \mathbb{E} \left(f_n(X_n) \prod_{0 \leq p < n} e^{-(\beta_{p+1} - \beta_p) V(X_p)} \right)$$

et

$$\mathbb{P}(X_n \in dx_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = M_n(x_{n-1}, dx_n) \quad \text{avec} \quad \eta_n = \eta_{n-1} M_n$$

Remarque :

$$\begin{aligned} Z_n &= \lambda(e^{-\beta_n V}) \\ &= \underbrace{\frac{\lambda(e^{-(\beta_n - \beta_{n-1}) V} e^{-\beta_{n-1} V})}{\lambda(e^{-\beta_{n-1} V})}}_{\eta_{n-1}(e^{-(\beta_n - \beta_{n-1}) V})} \times Z_{n-1} \stackrel{(\beta_0=0)}{=} \prod_{0 \leq p < n} \eta_p(e^{-(\beta_{p+1} - \beta_p) V}) \end{aligned}$$

Un second exemple "détaillé"

Mesures restreintes : $A_n \downarrow$ (Exemple $A_n = [a_n, \infty[\rightsquigarrow$ queues de distributions)

$$\eta_n(dx) = \frac{1}{Z_n} 1_{A_n}(x) \lambda(dx)$$

Representation trajectorielle de Feynman-Kac :

$$\eta_n(f) := \frac{\gamma_n(f)}{\gamma_n(\mathbf{1})} \quad \text{avec} \quad \gamma_n(f) := \mathbb{E} \left(f_n(X_n) \prod_{0 \leq p < n} 1_{A_{p+1}}(X_p) \right)$$

et

$$\mathbb{P}(X_n \in dx_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = M_n(x_{n-1}, dx_n) \quad \text{avec} \quad \eta_n = \eta_n M_n$$

Remarque :

$$\begin{aligned} Z_n &= \lambda(A_n) \\ &= \underbrace{\frac{\lambda(1_{A_n} 1_{A_{n-1}})}{\lambda(1_{A_{n-1}})}}_{\eta_{n-1}(1_{A_n})} \times Z_{n-1} \stackrel{(A_0=E)}{=} \prod_{0 \leq p < n} \eta_p(1_{A_{p+1}}) \end{aligned}$$

Modèles trajectoriels = Mêmes modèles mathématiques

Processus historique : $X_n := (X'_0, \dots, X'_n) \in E_n = (E'_0 \times \dots \times E'_n)$

↓

Particules trajectorielles : $\xi_n^i := (\xi_{0,n}^i, \xi_{1,n}^i, \dots, \xi_{n,n}^i) \in E_n = (E'_0 \times \dots \times E'_n)$

↓

$$\eta_n^N(f) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_n(\xi_n^i) \longrightarrow_{N \uparrow \infty} \eta_n(f) := \frac{\gamma_n(f)}{\gamma_n(\mathbf{1})}$$

avec les mesures de Feynman-Kac non normalisées **trajectorielles** :

$$\gamma_n(f) = \mathbb{E} \left(f_n(X'_0, \dots, X'_n) \prod_{0 \leq p < n} G_p(X'_0, \dots, X'_p) \right)$$

Exemple $\hookrightarrow \eta_n = \text{Loi}(X'_0, \dots, X'_n \mid \text{sans intersections})$

$X' = \text{Marche aléatoire} \in \mathbb{Z}^d$ & $G_n(X'_0, \dots, X'_n) = 1_{\{X'_0, \dots, X'_{n-1}\}}(X'_n)$

Flots de mesures de Feynman-Kac

$$\eta_n \xrightarrow{\text{Correction/mise à jour}} \hat{\eta}_n = \Psi_{G_n}(\eta_n) \xrightarrow{\text{Prédiction/exploration}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n M_{n+1}$$

Formule de transport non linéaire

$$\Psi_{G_n}(\eta_n) = \eta_n S_{n,\eta_n}$$

avec

$$S_{n,\eta_n}(x, \cdot) := \epsilon_n G_n(x) \delta_x + (1 - \epsilon_n G_n(x)) \Psi_{G_n}(\eta_n)$$

↓

$$\eta_{n+1} = \eta_n (S_{n,\eta_n} M_{n+1}) := \eta_n K_{n+1,\eta_n}$$

Chaines de Markov non linéaire $\eta_n = \text{Loi}(\bar{X}_n)$

- **Équation de transport non linéaire :**

$$\eta_{n+1} = \eta_n K_{n+1, \eta_n}$$

avec la collection de proba de transition :

$$K_{n+1, \eta_n} = S_{n, \eta_n} M_{n+1}$$

- **Transitions locales :**

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \in dx_n \mid \bar{X}_{n-1}) = K_{n, \eta_{n-1}}(\bar{X}_{n-1}, dx_n) \quad \text{avec} \quad \eta_{n-1} = \text{Loi}(\bar{X}_{n-1})$$

- **Mesure de McKean (processus canonique) :**

$$\mathbb{P}_n(d(x_0, \dots, x_n)) = \eta_0(dx_0) K_{1, \eta_0}(x_0, dx_1) \dots K_{n, \eta_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)$$

Pb de simulation \Rightarrow Interprétation particulière de type champ moyen

- Chaîne Markov $\xi_n = (\xi_n^1, \dots, \xi_n^N) \in E_n^N$ t.q.

$$\eta_n^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{\xi_n^i} \underset{N \uparrow \infty}{\simeq} \eta_n$$

- Transitions locales "approchées" ($\forall 1 \leq i \leq N$)

$$\xi_{n-1}^i \rightsquigarrow \xi_n^i \sim K_{n, \eta_{n-1}^N}(\xi_{n-1}^i, dx_n)$$

Figure schématique : $\xi_n \in E_n^N \rightsquigarrow \xi_{n+1} \in E_{n+1}^N$

$$\begin{array}{ccc}
 \xi_n^1 & \xrightarrow{K_{n+1, \eta_n^N}} & \xi_{n+1}^1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \xi_n^i & \longrightarrow & \xi_{n+1}^i \\
 \vdots & & \vdots \\
 \xi_n^N & \longrightarrow & \xi_{n+1}^N
 \end{array}$$

Idée intuitive :

$$\eta_n^N \simeq_{N \uparrow \infty} \eta_n \implies K_{n+1, \eta_n^N} \simeq_{N \uparrow \infty} K_{n+1, \eta_n} \implies \xi^i \sim \text{copies i.i.d. de } \bar{X}$$

$$\Downarrow$$

Mesure McKean particulière

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\xi_0^i, \dots, \xi_n^i)} \longrightarrow_{N \uparrow \infty} \text{Loi}(\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n)$$

Feynman-Kac \Leftrightarrow Algorithme stochastique de type génétique

$$\begin{bmatrix} \xi_n^1 \\ \vdots \\ \xi_n^i \\ \vdots \\ \xi_n^N \end{bmatrix} \xrightarrow{S_{n,\eta_n^N}} \begin{bmatrix} \widehat{\xi}_n^1 & \xrightarrow{M_{n+1}} & \xi_{n+1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{\xi}_n^i & \xrightarrow{\quad} & \xi_{n+1}^i \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{\xi}_n^N & \xrightarrow{\quad} & \xi_{n+1}^N \end{bmatrix}$$

Acceptation/Rejet-Selection : [horloges géométriques]

$$S_{n,\eta_n^N}(\xi_n^i, dx)$$

$$:= \epsilon_n G_n(\xi_n^i) \delta_{\xi_n^i}(dx) + (1 - \epsilon_n G_n(\xi_n^i)) \sum_{j=1}^N \frac{G_n(\xi_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(\xi_n^k)} \delta_{\xi_n^j}(dx)$$

Ex. : $G_n = 1_A \rightsquigarrow G_n(\xi_n^i) = 1_A(\xi_n^i)$

QQ Avantages

- Modèle de champ moyen = **linéarisation/perturbation stoch.** :

$$\eta_n^N = \eta_{n-1}^N K_{n, \eta_{n-1}^N} + \frac{1}{\sqrt{N}} W_n^N$$

avec $W_n^N \simeq W_n$ Champs gaussiens centrés et \perp .

- $\eta_n = \eta_{n-1} K_{n, \eta_{n-1}}$ stable \Rightarrow non propagation des erreurs locales
 \Rightarrow **control uniforme des erreurs globales / temps**
- "Pas besoin" d'étudier la cv à l'équilibre de modèles MCMC.
- Grille/Maillage stochastique adaptatif.
- Non linéarité du syst. \rightsquigarrow interactions bénéfiques.
- Algo. naturel et facile a simuler, etc.

Théorie "asymptotique" TCL, PGD, PDM, ... (n, N). QQ exemples :

- Processus empiriques :

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{N \geq 1} \sqrt{N} \mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{F}_n}^p) < \infty$$

- Inégalités de concentration uniformes :

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{P}(|\eta_n^N(f_n) - \eta_n(f_n)| > \epsilon) \leq c \exp -(N\epsilon^2)/(2\sigma^2)$$

En coll. : A. Guionnet $\sup_{n \geq 0}$ (IHP 2001) et M. Ledoux $\sup_{\mathcal{F}_n}$ (JTP 2000)

- Propagations du chaos (en coll. avec Patras, Rubenthaler (AAP 08-09) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{n,q}^N &:= \text{Loi}(\xi_n^1, \dots, \xi_n^q) \\ &\simeq \eta_n^{\otimes q} + \frac{1}{N} \partial^1 \mathbb{P}_{n,q} + \dots + \frac{1}{N^k} \partial^k \mathbb{P}_{n,q} + \frac{1}{N^{k+1}} \partial^{k+1} \mathbb{P}_{n,q}^N \end{aligned}$$

avec $\sup_{N \geq 1} \|\partial^{k+1} \mathbb{P}_{n,q}^N\|_{\text{tv}} < \infty$ et $\sup_{n \geq 0} \|\partial^1 \mathbb{P}_{n,q}\|_{\text{tv}} \leq c q^2$.

- 1 Introduction, motivations
- 2 Interprétations particulières de mesures de Feynman-Kac
- 3 Calcul des Cte de normalisation**
 - Formule multiplicative
 - Quelques exemples
 - Analyse de la convergence
- 4 Quelques références

Problème : Calcul des mesures non normalisées

$$\gamma_n(f) := \mathbb{E} \left(f_n(X_n) \prod_{0 \leq p < n} G_p(X_p) \right) \underset{N \uparrow \infty}{\simeq} \gamma_n^N(f) := ???$$

Remarque clé :

$$\eta_n(G_n) \gamma_n(1) = \gamma_n(G_n) = \gamma_{n+1}(1)$$

⇒ Formule multiplicative \rightsquigarrow estimation particulière **non biaisée**

$$\begin{aligned} \gamma_n(1) &= \prod_{0 \leq p < n} \eta_p(G_p) \longleftarrow_{N \uparrow \infty} \gamma_n^N(1) := \prod_{0 \leq p < n} \eta_p^N(G_p) \\ &\downarrow \\ \gamma_n(f) &:= \gamma_n(1) \times \eta_n(f) \longleftarrow_{N \uparrow \infty} \gamma_n^N(f) := \gamma_n^N(1) \times \eta_n^N(f) \end{aligned}$$

*Rmq. : Si G_n s'annule en certains points (ex. $G_n = 1_A$) alors l'algo peut d'arrêter
⇒ convention = estimation par 0.*

2 Exemples : formules de Feynman-Kac

- **Confinement dans un tube:**

$$\gamma_n(1) \stackrel{G_n \equiv 1_A}{=} \mathbb{P}(\cap_{0 \leq p < n} X_p \in A) \simeq_{N \uparrow \infty} \gamma_n^N(1) := \prod_{0 \leq p < n} \eta_p^N(A)$$

- **Marches sans intersection :**

$$\gamma_{n+1}(1) = \mathbb{P}(\forall p < q \leq n \quad X_p \neq X_q) = \frac{1}{(2d)^n} \text{Card} \{ \text{Marches } \not\cap \text{ de lg} = n \}$$
$$\simeq_{N \uparrow \infty}$$

$$\gamma_{n+1}^N(1) := \prod_{0 \leq p \leq n} \text{potentiel empirique moyen au temps } p$$

Avec différentes stratégies :

- 1 Transitions trajectorielles et G -détection d'intersections
- 2 Trans. locales sans intersections et \widehat{G} -proba d'intersections futures.
- 3 ...

+2 Exemples : Mesures de Boltzmann-Gibbs statiques

- **Fct de partition :** ($G_n = e^{-(\beta_{n+1}-\beta_n)V}$) et ($\eta_n M_n = \eta_n$) $\Rightarrow d\eta_n \propto e^{-\beta_n V} d\lambda$

$$(\rightsquigarrow \text{ Remarque : } \lambda(e^{-\beta_n V}) = \lambda(G_n \times e^{-\beta_{n-1} V}) = \eta_n(G_n) \lambda(e^{-\beta_{n-1} V}))$$

\Downarrow

$$\lambda(e^{-\beta_n V}) = \gamma_n(1) \simeq_{N \uparrow \infty} \gamma_n^N(1) := \prod_{0 \leq p < n} \eta_p^N(e^{-(\beta_{p+1}-\beta_p)V})$$

- **Volumes et cardinaux :**

$$(G_n = 1_{A_{n+1}}) \quad \text{et} \quad (\eta_n M_n = \eta_n) \implies \eta_n(dx) \propto 1_{A_{n+1}} \lambda(dx)$$

\Downarrow

$$\lambda(A_n) = \gamma_n(1) \simeq_{N \uparrow \infty} \gamma_n^N(1) := \prod_{0 \leq p \leq n} \eta_p^N(A_{p+1})$$

- Théorie asymptotique : fluctuations et déviations

En coll. : A. Guionnet (AAP 99, SPA 98) et L. Miclo (SP 2000)

- Théorie **non asymptotique** : calcul de biais et estimations de variance

- ① Dév. polynomial (*en coll. avec Patras & Rubenthaler (AAP 09)*) :

$$\mathbb{E} \left((\gamma_n^N)^{\otimes q}(F) \right) =: \mathbb{Q}_{n,q}^N(F) = \gamma_n^{\otimes q}(F) + \sum_{1 \leq k \leq (q-1)(n+1)} \frac{1}{N^k} \partial^k \mathbb{Q}_{n,q}(F)$$

[Hyp. \sim Algo. génétique simple $\epsilon_n = 0$ & potentiel > 0]

- ② Est. des variances (*coll. avec Cerou & Guyader Hal-INRIA nov.08*) :

$$\mathbb{E} \left([\gamma_n^N(f_n) - \gamma_n(f_n)]^2 \right) \leq c \frac{n}{N} \times \gamma_n(1)^2$$

Hyp. + souples \supset :

- Champ moyen qq avec taux acceptance $\forall \epsilon_n \geq 0$.
- Fonction potentiel ≥ 0 (\supset fonctions indicatrices).
- Cas trajectoriel $X_n = (X_0', \dots, X_n')$, avec X_n' "assez mélangeant".

- 1 Introduction, motivations
- 2 Interprétations particulières de mesures de Feynman-Kac
- 3 Calcul des Cte de normalisation
- 4 Quelques références**

Méthodes particulières & Méthodes de Monte Carlo "séquentielles"

- Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle systems, Springer (2004) ⊕ Refs.
- (avec L. Miclo) Branching and Interacting Particle Systems Approximations of Feynman-Kac Formulae. *Séminaire de Probabilités XXXIV, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, Vol. 1729, 1-145 (2000).*
- (avec Doucet A. et Jasra A.) Sequential Monte Carlo Samplers. JRSS B (2006).
- (avec A. Doucet) On a class of genealogical and interacting Metropolis models. *Sém. de Proba. 37 (2003).*
- (avec F. Patras et S. Rubenthaler) Coalescent tree based functional representations for some Feynman-Kac particle models, à paraître dans : *Annals of Applied Probability (2009)*

● Simulation particulière de lois d'importance

- (avec J. Garnier) Genealogical Particle Analysis of Rare events. *Annals of Applied Probab.*, 15-4 (2005).
- (avec J. Garnier) Simulations of rare events in fiber optics by interacting particle systems. *Optics Communications*, Vol. 267 (2006).

● Processus de branchements

- (avec P. Lezaud) Branching and interacting particle interpretation of rare event proba.. *Stochastic Hybrid Systems : Theory and Safety Critical Applications*, eds. H. Blom and J. Lygeros. Springer (2006).
- (avec F. Cerou, Le Gland F., Lezaud P.) Genealogical Models in Entrance Times Rare Event Analysis, *Alea*, Vol. I, (2006).

● Proceedings Conf. RESIM 2006

- (avec A. M. Johansen et A. Doucet) Sequential Monte Carlo Samplers for Rare Events
- (avec F. Cerou, A. Guyader, F. LeGland, P. Lezaud et H. Topart) Some recent improvements to importance splitting

Modèles d'absorption

- (avec L. Miclo) Particle Approximations of Lyapunov Exponents Connected to Schrodinger Operators and Feynman-Kac Semigroups. ESAIM Probability & Statistics, vol. 7, pp. 169-207 (2003).
- (avec A. Doucet) Particle Motions in Absorbing Medium with Hard and Soft Obstacles. Stochastic Analysis and Applications, vol. 22 (2004).

+ récents preprints

- (avec F. Cerou et A. Guyader) A non asymptotic variance theorem for unnormalized Feynman-Kac particle models (HAL-INRIA 2008).
- (avec A. Doucet et A. Jasra) On Adaptive Resampling Procedures for Sequential Monte Carlo Methods (HAL-INRIA 2008).