TD - L3 MASS [Corrigés]

Problème : Le Modèle de croissance cyclique de Goodwin

Le modèle de croissance cyclique de Goodwin correspond à l'évolution au cours du temps du marché de l'emploi, et des parts de salaires dans le revenu national d'une économie. On note respectivement x_t, et y_t le taux de demande d'emploi, et la part des salaires dans le revenu national au temps t. Ces deux quantités peuvent être déterminées en fonction de cinq paramètres économiques :
Le stock de capital K_t, la production Y_t, l'emploi courant L_t, l'offre de travail N_t, et enfin le taux de salaire réel w_t. En supposant que la demande de travail est déterminée par le plein emploi du capital, nous avons

$$x_t = L_t/N_t \quad \text{et} \quad y_t = w_t L_t/Y_t$$

Nous conviendrons par la suite que les taux de variation de l'emploi et des salaires sont de la forme suivante

$$N'/N = \nu \qquad L'/L = -\beta + K'/K \quad \text{et} \quad w'/w = \pi\ x - \gamma$$

avec $\nu, \beta, \gamma > 0$, et $\pi > (\beta + \gamma)$. On supposera que le capital est proportionnel à la production, et l'investissement K' est égal au profits :

$$K = \frac{1}{h}\ Y \quad \text{et} \quad K' = Y - w\ L \quad \text{avec} \quad h > (\beta + \nu)$$

1. *Vérifier que (x_t, y_t) satisfait le couple d'équations différentielles suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a\ x - bxy \\ y' & = & -c\ y + dxy \end{array} \right.$$

avec un jeu de paramètres (a, b, c, d) que l'on déterminera en fonction de (ν, β, π, h). Déterminer les états stationnaires de ce système.

Solution :
Par définition de $x_t = L_t/N_t$, nous avons tout d'abord

$$x' \quad = \quad \frac{L'}{N} - \frac{L}{N}\ \frac{N'}{N} = \left(\frac{L'}{L} - \frac{N'}{N}\right)\ \frac{L}{N} = x\ \left(\frac{L'}{L} - \frac{N'}{N}\right)$$

En utilisant le fait que

$$N'/N = \nu\ , \quad L'/L = -\beta + K'/K$$

et
$$K'/K = Y/K - w\ L/K = h - yY/K = h - hy = h\ (1-y)$$
on en conclut que
$$x'/x = \beta + h\ (1-y) - \nu = h\ (1-y) - (\beta+\nu)$$
Autrement dit, nous avons
$$x' = a\ x - bxy$$
avec le couple de paramètres :
$$a = h - (\beta+\nu)\ (>0) \quad \text{et} \quad b = h\ (>0)$$
Pour obtenir la seconde équation, on observe que
$$\begin{aligned} y' &= w'\ \frac{L}{N} + w\ \frac{L'}{Y} - \frac{wL}{Y}\ \frac{Y'}{Y} \\ &= \frac{w'}{w}\ \frac{wL}{Y} + \frac{L'}{L}\ \frac{wL}{Y} - \frac{wL}{Y}\ \frac{Y'}{Y} = y\ \left(\frac{w'}{w} + \frac{L'}{L} - \frac{Y'}{Y}\right) \end{aligned}$$
D'autre part, nous avons
$$L'/L = -\beta + K'/K\ , \quad K'/K = Y'/Y = h\ (1-y)$$
et
$$w'/w = \ \pi\ x - \gamma$$
On en conclut que $L'/L = -\beta + h\ (1-y)$, et
$$y'/y = \pi\ x - \gamma - \beta + h\ (1-y) - h\ (1-y) = \pi\ x - (\gamma+\beta)$$
Autrement dit, nous avons
$$y' = -c\ y + dxy$$
avec le couple de paramètres :
$$c = \ (\gamma+\beta)(>0) \quad \text{et} \quad d = \pi\ (>0)$$
En résumé, nous avons montré que (x_t, y_t) satisfait le couple d'équations différentielles
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& a\ x - bxy \\ y' &=& -c\ y + dxy \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rclrcl} a &=& h-(\beta+\nu)\ , & b &=& h \\ c &=& (\gamma+\beta)\ , & d &=& \pi \end{array} \right.$$
Les états stationnaires du système normalisé, sont déterminés par les équations
$$x\ (a\ - by) = 0 \quad \text{et} \quad y\ (-c + dx) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_0, y_0) =_{\text{déf.}} (0,0) \quad \text{et} \quad (x_1, y_1) =_{\text{déf.}} \left(\tfrac{c}{d}, \tfrac{a}{b}\right) = \left(\tfrac{(\gamma+\beta)}{\pi}, 1 - \tfrac{(\beta+\nu)}{h}\right)$$

■

2. *Décrire le système différentiel normalisé correspondant au changement de variables :*

$$\tau = a\ t, \quad u = \frac{d}{c}\ x \quad \text{et} \quad v = \frac{b}{a}\ y$$

Établir dans le plan de phase (u, v), les coordonnées des états stationnaires.

Solution :
Nous avons clairement

$$d\tau = a\ dt$$

et

$$du = \frac{d}{c}\ dx \quad \text{et} \quad dv = \frac{b}{a}\ dy$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{d}{ac}\ \frac{dx}{dt} = \frac{d}{ac}\ (a\ x - bxy) = \frac{d}{c}\ x - \left(\frac{b}{a}\ y\right)\left(\frac{d}{c}\ x\right) \\ &= u\ (1 - v) \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{b}{a^2}\ \frac{dy}{dt} = \frac{b}{a^2}\ (-c\ y + dxy) = -\frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}\ y\right) + \frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}\ y\right)\left(\frac{d}{c}\ x\right) \\ &= -\frac{c}{a}\ v\ (1 - u) \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\frac{dv}{d\tau} = -\alpha\ v\ (1 - u) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{c}{a}$$

En résumé, le système différentiel normalisé est donné par

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= u\ (1 - v) \\ v' &= -\alpha\ v\ (1 - u) \end{aligned} \right. \qquad \text{avec} \quad \alpha = \frac{c}{a} = \frac{(\gamma + \beta)}{h - (\beta + \nu)} (> 0)$$

Les états stationnaires du système normalisé, sont déterminés par les équations

$$u\ (1 - v) = 0 \quad \text{et} \quad v\ (1 - u) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(u, v) = (u_0, v_0) =_{\text{déf.}} (0, 0) \quad \text{et} \quad (u, v) = (u_1, v_1) =_{\text{déf.}} (1, 1)$$

■

3. *Linéariser le système normalisé autour des états stationnaires. Déterminer les types de singularité, et la nature de la stabilité autour de ces points.*

Solution :
Le système normalisé peut s'écrire sous la forme suivante

$$U =_{\text{déf.}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow U' = F(U)$$

avec la fonction

$$F(U) = \begin{pmatrix} F_1(u,v) \\ F_2(u,v) \end{pmatrix} =_{\text{déf.}} \begin{pmatrix} u\ (1-v) \\ -\alpha\ v\ (1-u) \end{pmatrix}$$

– Autour de l'origine $(u_0, v_0) = (0,0)$, le système linéarisé s'exprime sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u \\ -\alpha\ v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont données par

$$\begin{cases} u(\tau) &= u(\tau_0)\ e^{(\tau-\tau_0)} \\ v(\tau) &= v(\tau_0)\ e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

sont de signes opposés

$$\lambda_1 = -\alpha < 0 < \lambda_2 = 1$$

Dans le système linéarisé, l'état stationnaire est donc un col, et les trajectoires s'écartent de cet état. Le portrait de phases correspondant est représenté sur la figure suivante.

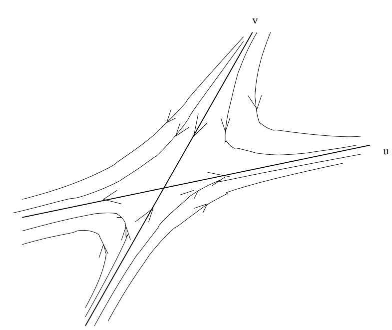

FIG. 1 –

– Autour de l'origine $(u_1, v_1) = (1, 1)$, le système linéarisé s'exprime sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_1, v_1) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_1, v_1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_1, v_1) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_1, v_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_1 \\ v - v_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - v_1) & -u_1 \\ \alpha v_1 & -\alpha(1 - u_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix}$$

sont clairement données

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha}$$

Dans ce système linéarisé, les trajectoires forment des cercles autour du point $(U_1, v_1) = (1, 1)$. L'état stationnaire est dans ce cas, un centre. Pour plus de précisions, on effectue le changement de variables

$$\overline{u}(\tau) = \sqrt{\alpha}\ (u(\tau) - u_1) \quad \text{et} \quad \overline{v}(\tau) = (v(\tau) - u_1)$$

On vérifie aisément, que le couple $(\overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))$ satisfait le couple d'équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \overline{u}' &= \sqrt{\alpha}\ u' = -\sqrt{\alpha}\ (v - 1) = -\sqrt{\alpha}\ \overline{v} \\ \overline{v}' &= v' = \alpha\ (u - 1) = \sqrt{\alpha}\ \overline{u} \end{cases}$$

Autrement dit, nous avons

$$\begin{bmatrix} \overline{u}' \\ \overline{v}' \end{bmatrix} = \overline{M}_1 \begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}$$

avec la matrice antisymétrique $\overline{M}_1$ déterminée par

$$\overline{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

On pose ensuite

$$z_t = \overline{u}_t + i\overline{v}_t$$

Cette trajectoire dans le plan complexe vérifie l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} z' &= \overline{u}' + i\overline{v}' = -\sqrt{\alpha}\overline{v} + i\sqrt{\alpha}\overline{u} \\ &= \left(i\sqrt{\alpha}\right)\ (\overline{u} + i\overline{v}) = i\sqrt{\alpha}\ z \end{aligned}$$

La solution générale est donc donnée par

$$z(\tau) = z(\tau_0)\ e^{i\sqrt{\alpha}(\tau-\tau_0)}$$

En coordonnées polaires $z(\tau) = r(\tau)\ e^{i\theta(\tau)}$, nous avons

$$z' = i\sqrt{\alpha}\ z = \left(\frac{r'}{r} + i\theta'\right)\ r\ e^{i\theta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} r' & = & 0 \\ \theta' & = & \sqrt{\alpha} \end{array} \right.$$

La solution générale s'exprime donc sous la forme suivante

$$r(\tau) = r(\tau_0) \quad \text{et} \quad \theta(\tau) = \theta(\tau_0) + \sqrt{\alpha}\ (\tau - \tau_0)$$

Autrement dit, nous avons

$$z(\tau) = r(\tau)\ e^{i\theta(\tau)} = \left(r(\tau_0)e^{i\theta(\tau_0)}\right)\ e^{i\theta(\tau-\tau_0)} = z(\tau_0)\ e^{i\theta(\tau-\tau_0)}$$

Le portrait de phases correspondant est représenté sur la figure suivante.

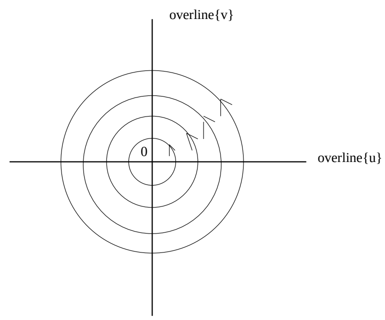

FIG. 2 –

■

4. *Décrire le diagramme des phases correspondant au système normalisé (u, v).*

Solution :
Les courbes intégrales sont déterminées par l'équation suivante :

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/d\tau}{du/d\tau} = \frac{g(u,v)}{f(u,v)}$$

avec

$$g(u,v) = -\alpha\ v\ (1-u) \quad \text{et} \quad f(u,v) = u\ (1-v)$$

Les isoclines nulles sont les courbes dans le plan définies par les équations

$$g(u,v) = -\alpha\ v\ (1-u) = 0 \Longleftrightarrow u = 1 \quad \text{ou} \quad v = 0$$

et

$$f(u,v) = u\ (1-v) = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad \text{ou} \quad v = 1$$

Aux points d'intersection avec ces droites, la trajectoire du système a une tangente respectivement verticale ($f(u,v) = 0$), ou horizontale ($g(u,v) = 0$).

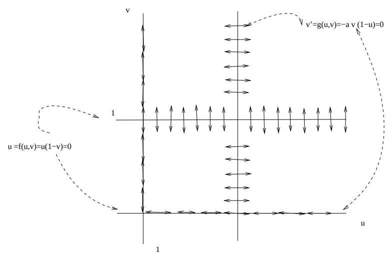

Fig. 3 – Isoclines nulles

Pour plus de précision, on remarque que

$$\frac{dv}{du} = \frac{-\alpha\ v\ (1-u)}{u\ (1-v)} = \frac{-\alpha\ (1/u-1)}{(1/v-1)}$$

Une étude élémentaire des fonctions

$$u \mapsto -\alpha\ (1/u-1) \quad \text{et} \quad v \mapsto \frac{1}{(1/v-1)}$$

nous conduit au diagramme des signes suivant

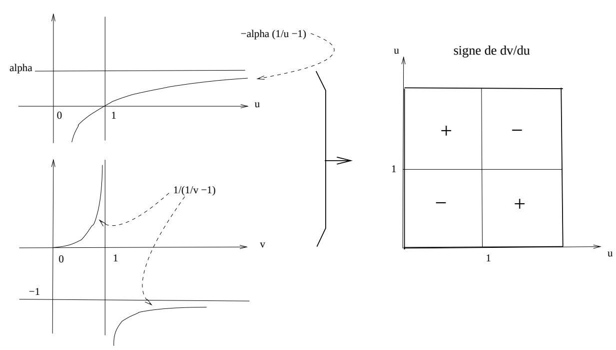

Fig. 4 –

En suivant le champ de vecteurs tangents en tout point à la trajectoire du système, on obtient le diagramme de phase suivant :

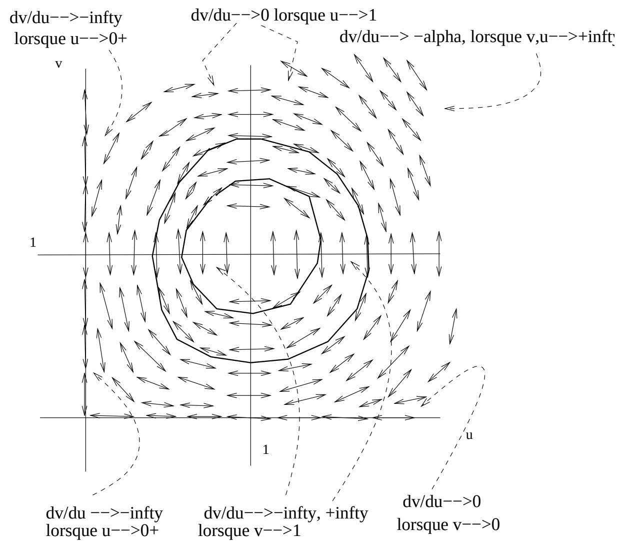

Fig. 5 – Diagramme de phase

■

5. *Montrer que la fonction*

$$H(u,v) = \log\left(u^{\alpha} v\right) - (\alpha u + v) \quad \text{avec} \quad \alpha = c/a$$

est une intégrale première du mouvement.

Solution :
Le système différentiel normalisé est donné par deux équations

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (1) & u' & = & u\,(1-v) \\ (2) & v' & = & -\alpha\, v\,(1-u) \end{array} \right.$$

En multipliant la première par $\alpha\left(\frac{1}{u}-1\right)$, et la seconde par $\left(\frac{1}{v}-1\right)$, on obtient le système d´équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\left(\frac{1}{u}-1\right) u' & = & \alpha\,(1-u)\;(1-v) \\ \left(\frac{1}{v}-1\right) v' & = & -\alpha\;(1-v)\;(1-u) \end{array} \right.$$

En additionnant ces deux équations, on montre que

$$\alpha\left(\frac{u'}{u} - u'\right) + \left(\frac{v'}{v} - v'\right) = \frac{d}{dt}\left[\alpha(\log u - u) + \log v - v\right] = 0$$

Autrement dit, nous avons montré que H est une intégrale première du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left[\log\left(u^{\alpha} v\right)-(\alpha u+v)\right]=\frac{d}{dt} H(u, v)=0$$

La fonction H est constante sur toute trajectoire $(u(\tau), v(\tau))$ solution du système différentiel normalisé. Autrement dit, pour des conditions initiales $(u(\tau_0), v(\tau_0))$ fixées, la trajectoire $(u(\tau), v(\tau))$ suit la courbe intégrale associée à la constante de mouvement $H_0 = H(u(\tau_0), v(\tau_0))$

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \qquad H(u(\tau), v(\tau))=H(u(\tau_0), v(\tau_0))$$

■

6. *Vérifier que l'évolution de l'économie est cyclique. Autrement dit, vérifier que les trajectoires solutions du système différentiel (normalisé) sont périodiques. On analysera les points suivants :*
   – *Les trajectoires ne peuvent sortir du demi-plan supérieur $(\mathbb{R}_+^\star)^2$.*

   Solution :
   Montrons tout d'abord que les trajectoires ne peuvent sortir du demi-plan supérieur $(\mathbb{R}_+^\star)^2$. Lorsque l'une des coordonnées du point initial $u(\tau_0)$, ou $v(\tau_0)$, s'annule, le résultat est immédiat. Supposons par exemple que $u(\tau_0) = 0$. Dans ce cas, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le couple

$$\left\{\begin{array}{lll} u(\tau) & = & u(\tau_0)=0 \\ v(\tau) & = & v(\tau_0)\, e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \end{array}\right.$$

   est l'unique solution passant par le point $(0, v(\tau_0))$. De même, lorsque $v(\tau_0) = 0$, le couple

$$\left\{\begin{array}{lll} u(\tau) & = & u(\tau_0)\, e^{(\tau-\tau_0)} \\ v(\tau) & = & v(\tau_0)=0 \end{array}\right.$$

   est l'unique solution passant par le point $(u(\tau_0), 0)$. Ces deux remarques sont synthétisées par le diagramme suivant.

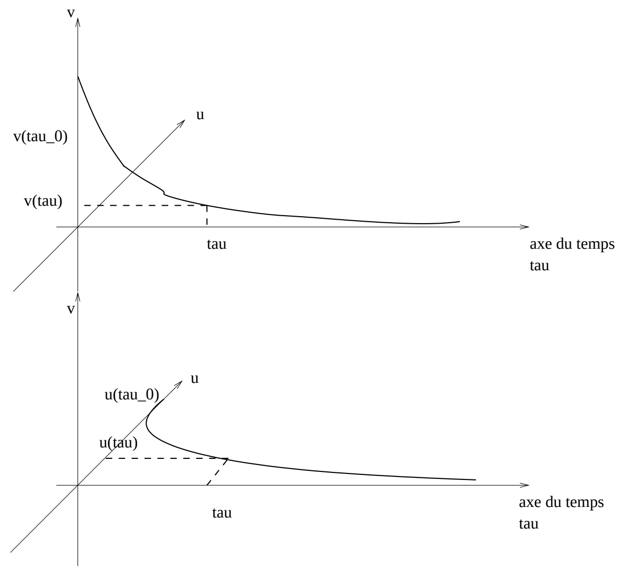

FIG. 6 –

Supposons désormais que $u(\tau_0) > 0$, et $v(\tau_0) > 0$. Dans cette situation, nous avons

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \qquad v(\tau) > 0 \quad \text{et} \quad v(\tau) > 0$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait un temps τ_1 pour lequel $u(\tau_1) = 0$, ou $v(\tau_1) = 0$. Supposons par exemple que $u(\tau_1) = 0$. Dans cette situation, le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(\tau) & = & u(\tau_1) = 0 \\ v(\tau) & = & v(\tau_1)\ e^{-\alpha(\tau-\tau_1)} \end{array} \right.$$

est l'unique solution passant par $(u(\tau_1), v(\tau_1))$. Le fait que $u(\tau) = 0$, pour tout τ contredit notre hypothèse sur $u(\tau_0)(> 0)$. De même, si $v(\tau_1) = 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(\tau) & = & u(\tau_1)\ e^{(\tau-\tau_1)} \\ v(\tau) & = & v(\tau_1) = 0 \end{array} \right.$$

est l'unique solution passant par $(u(\tau_1), v(\tau_1))$. Le fait que $v(\tau) = 0$, pour tout τ contredit notre hypothèse sur $v(\tau_0)(> 0)$. Ce raisonnement par l'absurde montre que

$$(v(\tau_0) > 0 \quad \text{et} \quad v(\tau_0) > 0) \Longrightarrow (\forall \tau \in \mathbb{R} \qquad v(\tau) > 0 \quad \text{et} \quad v(\tau) > 0)$$

■

– *Les trajectoires n'explosent pas en temps fini.*

Solution :
On note simplement que

$$\left(\begin{array}{c} u' = u\ (1-v) = u - uv \\ \text{et} \\ (u,v) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad u' \leq u$$

$$\overset{\text{Gronwall}}{\Longrightarrow} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad u(\tau) \leq u(\tau_0)\ e^{(\tau-\tau_0)}$$

et

$$\left(\begin{array}{c} v' = \alpha uv - \alpha v \\ \text{et} \\ (u,v) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad v' \leq \alpha u\ v$$

$$\overset{\text{Gronwall}}{\Longrightarrow} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad v(\tau) \leq v(\tau_0)\ e^{\alpha\ \int_{\tau_0}^{\tau} u(s)ds}$$

■

– *Les trajectoires initialisées dans le cadran $C_1 = (0,1)^2$, retournent en C_1 en temps fini, en passant successivement par les trois autres quadrants $C_2 = ((1,\infty) \times (0,1))$, $C_3 = (1,\infty)^2$, et $C_4 = ((0,1) \times (1,\infty))$.*

Solution :
Le demi-plan supérieur est divisé en quatre zones

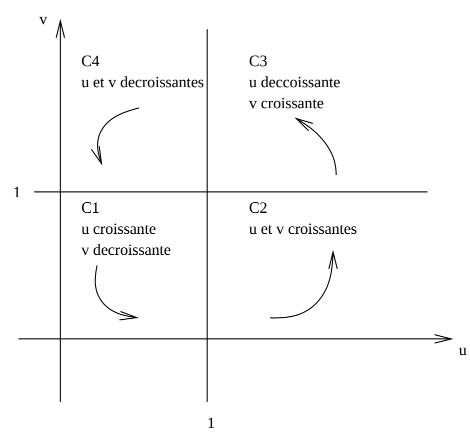

Fig. 7 –

Les propriétés de monotonie des trajectoires dans chaque zone, permettent de vérifier simplement que les trajectoires visitent successivement, et de façon périodique, les quatre quadrants $C1$, C_2, C_3, et

C_4. Supposons par exemple, que les trajectoires initialisées en un point $(u(\tau_0), v(\tau_0)) \in C_1 = (0,1)^2$, ne sortent pas de cette première zone. Dans C_1, la fonction $\tau \mapsto u(\tau)$ est croissante, alors que $\tau \mapsto v(\tau)$ est décroissante. Dans cette situation, nous aurions

$$\lim_{\tau\to\infty}(u(\tau), v(\tau)) = (u^\star, v^\star) \in C_1 = (0,1)^2$$

et

$$\lim_{\tau\to\infty}(u'(\tau), v'(\tau)) = (0,0) \Longrightarrow (u^\star, v^\star) \in \{(0,0),(1,1)\} \notin C_1$$

Ce raisonnement par l'absurde montre qu'il existe un temps fini $\tau_{1,2} < \infty$ maximal pour lequel la solution appartient à cette zone C_1 pour tous les temps $\tau \in [\tau_0, \tau_{1,2})$. Pour $\tau = \tau_{1,2}$, nous avons

$$u(\tau_{1,2}) = 1 \quad \text{et} \quad v(\tau_{1,2}) < 1 \quad (\Rightarrow u'(\tau_{1,2}) > 0 \quad \text{et} \quad v'(\tau_{1,2}) = 0)$$

Un raisonnement analogue, nous montre que qu'il existe un temps fini $\tau_{2,3} < \infty$ maximal pour lequel la solution appartient à cette zone C_2 pour tous les temps $\tau \in (\tau_{1,2}, \tau_{2,3})$. Pour $\tau = \tau_{2,3}$, nous avons

$$u(\tau_{2,3}) > 1 \quad \text{et} \quad v(\tau_{2,3}) = 1 \quad (\Rightarrow u'(\tau_{2,3}) = 0 \quad \text{et} \quad v'(\tau_{2,3}) > 0)$$

Les traversées des deux autres zones se traitent de la même façon, on sort de C_3 pour visiter C_4 au temps $\tau_{3,4}$, et l'on sort de C_4 pour retourner en C_1 au temps $\tau_{4,1}$. En résumé, nous avons montré que les trajectoires visitent périodiquement les régions C_i, avec $i = 1,2,3,4$. ■

– *Les trajectoires passant par un point* $(u(\tau_1), 1)$, *avec* $u(\tau_1) \in (0,1)$, *retournent en temps fini en ce point.*

Solution :
Dans la question précédente, nous avons montré qu'une trajectoire initialisée en $(u(\tau_0), v(\tau_0)) \in C_1$ retourne en C_1 en temps fini, en passant successivement par C_2, C_3, et C_4. Pour vérifier que la trajectoire est périodique, il suffit de vérifier qu'une trajectoire passant par un point $(u(\tau_1), v(\tau_1))$, avec $v(\tau_1) = 1$ et $u(\tau_1) \in (0,1)$, retourne en ce point en un temps fini. Autrement dit, il existe un temps fini $T < \infty$ pour lequel

$$(u(\tau_1 + T), v(\tau_1 + T)) = (u(\tau_1), v(\tau_1)) \in (0,1) \times \{1\}$$

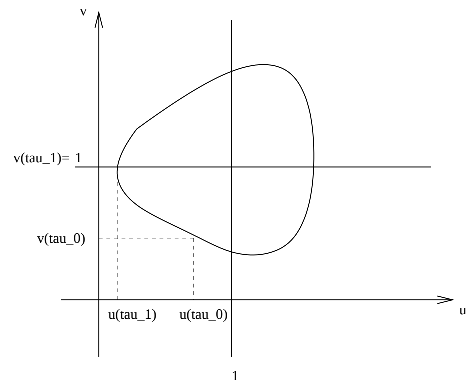

FIG. 8 –

L'existence d'un temps fini T pour lequel $(u(\tau_1+T), v(\tau_1+T)) \in (0,1)\times\{1\}$ a été prouvée à la question précédente. Il nous reste à montrer que $u(\tau_1+T) = u(\tau_1)$. Pour vérifier cette assertion, on observe que la fonction

$$u \mapsto H(u,1) = \alpha \log u - \alpha\ u - 1 = \alpha(\log u - u) - 1$$

est strictement croissante sur $(0,1)$,

$$\forall u \in (0,1) \qquad \frac{d}{du}H(u,1) = \alpha(\frac{1}{u} - 1) > 0$$

(et admet un maximum $H(1,1) = -(\alpha+1)$ au bord supérieur de l'intervalle $u = 1$). On en conclut que la trajectoire repasse nécessairement par le même point à chaque tour :

$$H(u(\tau_1+T),1) = H(u(\tau_1),1) \Longrightarrow u(\tau_1+T) = u(\tau_1)$$

$\blacksquare$

7. *Calculer les moyennes temporelles de $u(\tau)$, et de $v(\tau)$, sur une période.*

Solution :
Sur chaque période, nous avons

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \frac{u'(\tau)}{u(\tau)}\ d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \frac{d}{d\tau}\log u(\tau)\ d\tau = u(\tau_0+T) - u(\tau_0) = 0$$

En utilisant le fait que

$$\frac{u'(\tau)}{u(\tau)} = (1 - v(\tau))$$

on obtient

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+T}(1-v(\tau))d\tau = 0 \Rightarrow \frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} v(\tau)d\tau = 1$$

Par un raisonnement analogue, nous avons

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \frac{v'(\tau)}{v(\tau)}\ d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \frac{d}{d\tau}\log v(\tau)\ d\tau = v(\tau_0+T) - v(\tau_0) = 0$$

En utilisant le fait que

$$\frac{v'(\tau)}{v(\tau)} = -\alpha\ (1-u(\tau))$$

on obtient

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+T}(1-u(\tau))d\tau = 0 \Rightarrow \frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} u(\tau)d\tau = 1$$

$\blacksquare$