TD - L3 MASS [Corrigés]

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax + by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx + dy \end{array} \right. \qquad \textit{avec} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 > 4\ (ad - bc) \quad (1)$$

1. *On pose* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Vérifier que*

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$$

   où A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera.*

2. *Déterminer les valeurs propres* λ_1, *et* λ_2, *de la matrice* A *en fonction de sa trace* $\mathrm{tr}(A)$, *et de son déterminant* $\mathrm{dét}(A)$.

3. *Soit* V_1, *et* V_2 *deux vecteurs propres associés aux valeurs propres* λ_1, *et* λ_2. *Montrer que* (V_1, V_2) *forment une base de* $\mathbb{R}^2$. *Résoudre le système différentiel (1) dans cette base.*

4. *Décrire les portraits de phases, et discuter le comportement des solutions, dans les trois cas suivants :*

$$1)\ \ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad 2)\ \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \qquad 3)\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Solution :

1. On a clairement

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\begin{array}{rcl} p(\lambda) & = & \mathrm{dét}(A - \lambda I) = \mathrm{dét} \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \\ & = & (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = (ad - bc) - \lambda\ (a + d) + \lambda^2 \\ & = & \lambda^2 - \lambda\ \mathrm{tr}(A) + \mathrm{dét}(A) \\ & = & \left(\lambda - \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{2} \right) - \dfrac{1}{4} \times \left(\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A) \right) \end{array}$$

D'après nos hypothèses, nous avons

$$\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A) = (a+d)^2 - 4\ (ad - bc) > 0$$

Les valeurs propres λ_1, et λ_2, de la matrice A sont donc données par

$$\left(\frac{\mathrm{tr}(A) - |\mathrm{tr}(A)|}{2} <\right)\ \lambda_1 = \frac{\mathrm{tr}(A) - \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

et

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \frac{\mathrm{tr}(A) + \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

3. Si les vecteurs V_1 et V_2 n'étaient pas indépendants, nous aurions

$$V_1 = \gamma V_2, \quad \gamma \neq 0 \Rightarrow AV_1 = \lambda_1 V_1 = \gamma A V_2 = \lambda_2(\gamma V_2) = \lambda_2 V_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

On obtiendrait ainsi une contradiction avec le fait que $\lambda_1 < \lambda_2$. On en conclut que le couple de vecteurs (V_1, V_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.

On notera par la suite $\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur X dans la base (V_1, V_2). On rappelle que

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\ E_1 + y\ E_2$$

dans la base canonique $(E_1, E_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Si $V_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$, et $V_1 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$ désignent les coordonnées de V_1,et V_2 dans la base (E_1, E_2), On obtient la formule de changement de base

$$\begin{aligned}
X &= x\ E_1 + y\ E_2 \\
&= \overline{x}\ V_1 + \overline{y}\ V_2 \\
&= \overline{x}\ [v_{1,1}\ E_1 + v_{1,2}\ E_2] + \overline{y}\ [v_{2,1}\ E_1 + v_{2,2}\ E_2] \\
&= [v_{1,1}\overline{x} + v_{2,1}\overline{y}]\ E_1 + [v_{1,2}\overline{x} + v_{2,2}\overline{y}]\ E_2 \\
&= \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = [V_1, V_2]\ \overline{X}
\end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons

$$X = P\ \overline{X} \quad \text{avec} \quad P = [V_1, V_2]$$

L'indépendance entre V_1 et V_2 nous assure que P est inversible

$$\mathrm{dét}(P) = v_{1,1}v_{2,2} - v_{2,1}v_{1,2} \neq 0$$

Dans la base (V_1, V_2), l'action de la matrice A correspond à l'opération de la matrice $P^{-1}AP$. On a en effet

$$\overline{(AX)} = P^{-1}(AX) = P^{-1}AP\overline{X} = \overline{A}\ \overline{X} \Leftrightarrow \overline{A} = P^{-1}AP$$

Il nous reste à noter que

$$\begin{aligned} AP\overline{X} &= A[V_1, V_2] \left[\begin{array}{c} \overline{x} \\ \overline{y} \end{array} \right] = A(\overline{x}V_1 + \overline{y}V_2) = \overline{x}\ AV_1 + \overline{y}\ AV_2 \\ &= \lambda_1\overline{x}\ V_1 + \lambda_2\overline{y}\ V_2 = [V_1, V_2] \left[\begin{array}{c} \lambda_1\overline{x} \\ \lambda_2\overline{y} \end{array} \right] \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \overline{X} \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans cette base de vecteurs propres (V_1, V_2), le système différentiel s'exprime sous la forme suivante

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = P^{-1}AP\overline{X} = \overline{A}\ \overline{X}$$

Autrement dit, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d\overline{x}}{dt} & = & \lambda_1\ \overline{x} \\ \frac{d\overline{y}}{dt} & = & \lambda_2\ \overline{y} \end{array} \right.$$

Les solutions de (1) dans la base (V_1, V_2) sont de ce fait données par

$$\begin{array}{lcl} \overline{x}(t) & = & e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0) \\ \overline{y}(t) & = & e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0) \end{array}$$

Dans la base canonique originelle (E_1, E_2), la solution générale est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} X(t) &= \left[\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right] = P\overline{X}(t) = [V_1, V_2] \left[\begin{array}{c} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{array} \right] = \overline{x}(t)\ V_1 + \overline{y}(t)\ V_2 \\ &= [e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0)]\ V_1 + [e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0)]\ V_2 \end{aligned}$$

avec

$$\left[\begin{array}{c} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{array} \right] = P^{-1} \left[\begin{array}{c} x(0) \\ y(0) \end{array} \right]$$

4. (a) Dans les deux premiers cas 1) et 2), les valeurs propres λ_1 et λ_2 ont le même signe, et l'on a $(\lambda_1 - \lambda_2) < 0$. Dans cette situation, en supposant que les conditions initiales $\overline{x}(0)$, et $\overline{y}(0)$, sont non nulles, nous avons

$$\frac{\overline{x}(t)}{\overline{y}(t)} = \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)}\ e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)}\ e^{-|\lambda_1-\lambda_2|t} \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\frac{\overline{y}(t)}{\overline{x}(t)} = \frac{\overline{y}(0)}{\overline{x}(0)}\ e^{|\lambda_2-\lambda_1|t}$$

$$\stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} +\infty & \text{si} & \overline{x}(0), \text{ et } \overline{y}(0) \text{ ont le même signe} \\ -\infty & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

On notera dans ce cas que les trajectoires de phases sont données par

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \frac{\overline{y}}{\overline{x}} \Longleftrightarrow \overline{y}(\overline{x}) = \text{Cte} \times |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1} \quad \text{et la droite} \quad \overline{x} = 0$$

Pour vérifier cette équivalence, on remarquera que l'on a pour les $\overline{x} > 0$

$$\overline{y}(\overline{x}) = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1} = C\ \overline{x}\ ^{\lambda_2/\lambda_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\tfrac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\ C\ |\overline{x}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1} = \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \tfrac{1}{\overline{x}}\ \left(C\ |\overline{x}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) = \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \tfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$$

Deux cas de figures peuvent se présenter :

– Si les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ sont toutes deux négatives, l'origine est un *point d'équilibre ω-stable et attractif*. On dit que c'est un *noeud attractif ou un puits*. Dans cette situation, nous avons

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \implies 0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

et dans ce cas, les courbes intégrales $\overline{x} \mapsto \overline{y}(\overline{x}) = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1}$ sont tangentes en l'origine à l'axe déterminé par le vecteur propre V_2 associé à la plus grande des valeurs propres λ_2. Le portrait de phases correspondant est représenté sur la figure suivante

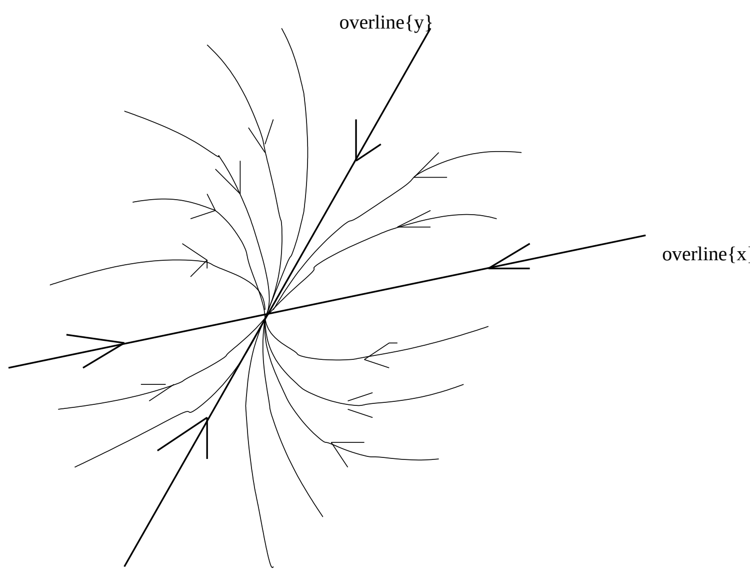

FIG. 1 –

– Si les valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ sont toutes deux positives, l'origine est *un point d'équilibre α-stable et répulsif.* On dit aussi que c'est un *noeud répulsif ou une source.* Dans cette situation, nous avons

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \implies 1 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

et dans ce cas, les courbes intégrales $\overline{x} \mapsto \overline{y}(\overline{x}) = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1}$ sont tangentes en l'origine à l'axe déterminé par le vecteur propre V_1 associé à la plus petite des valeurs propres λ_1. Le portrait de phases correspondant est représenté sur la figure suivante

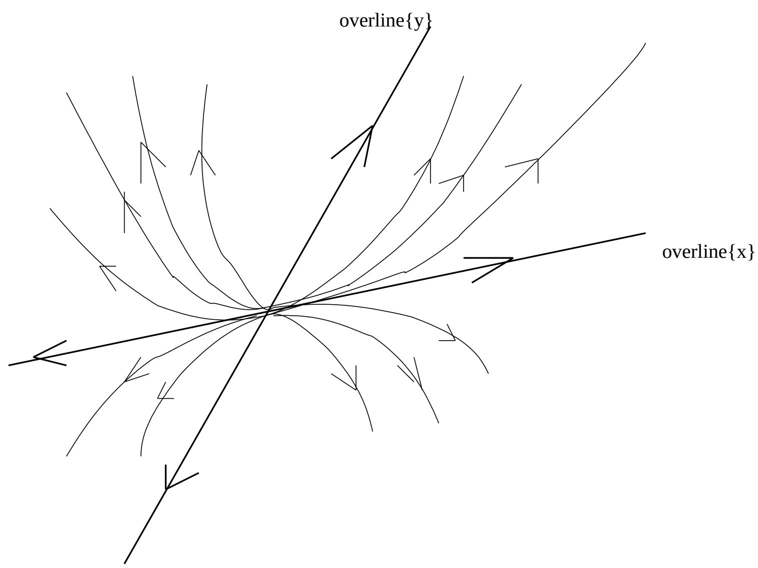

FIG. 2 –

(b) Lorsque les valeurs propres sont de signes opposés $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, et si $\overline{x}(0) \neq 0$, nous avons

$$0 \xleftarrow{+\infty\leftarrow t} \overline{x}(t) = e^{-|\lambda_1|t}\ \overline{x}(0) \xrightarrow{t\to-\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \overline{x}(0) > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \overline{x}(0) < 0 \end{cases}$$

De même, si $\overline{y}(0) \neq 0$, nous avons

$$0 \xleftarrow{-\infty\leftarrow t} \overline{y}(t) = e^{|\lambda_2|t}\ \overline{y}(0) \xrightarrow{t\to+\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \overline{y}(0) > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \overline{y}(0) < 0 \end{cases}$$

Dans cette situation, nous avons aussi

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \implies \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < -1 \iff -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| > 1$$

et dans ce cas, les courbes intégrales sont données par

$$\overline{x} \in \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \overline{y}(\overline{x}) = C\ |\overline{x}|^{\lambda_2/\lambda_1} = C\ \frac{1}{|\overline{x}|^{|\lambda_2/\lambda_1|}}$$

Le portrait de phases correspondant est représenté sur la figure suivante

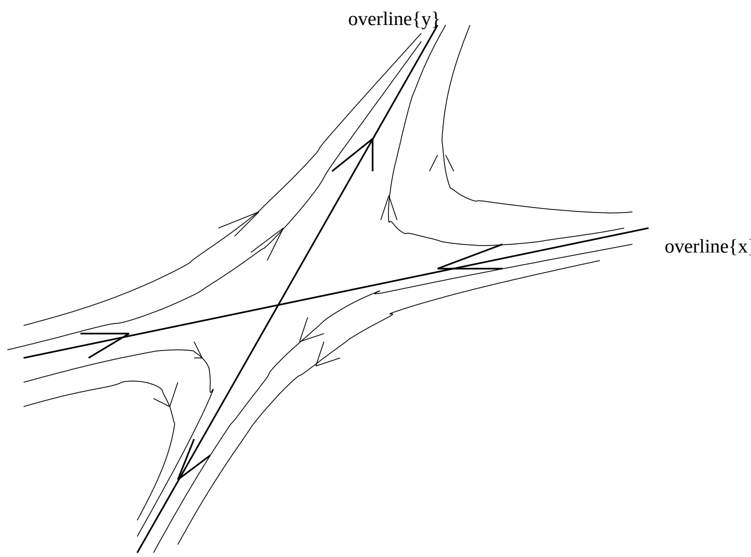

Fig. 3 –

On notera pour conclure que l'origine n'est ni α-stable, ni ω-stable, ni attractive, ni répulsive. On dit dans ce cas de figure que c'est *col*.

∎

Exercice 2 *Résoudre et analyser la stabilité des équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x'' + 5x' + x & = & 0 \\ 2) & x'' + 5x' + 4x & = & 0 \\ 3) & x'' + 4x' + 2x & = & 0 \end{array}$$

Solution :

Les trois systèmes se résolvant de façon analogue, nous donnerons une preuve détaillée uniquement dans le premier cas.

1. On commence par noter que le premier système peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre dans le plan

$$x'' + 5x' + x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -5y - x \end{array} \right. \tag{2}$$

Ainsi, si on pose $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$, on obtient

$$(2) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\mathrm{tr}(A) = -5 \quad \text{et} \quad \mathrm{dét}(A) = 1$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

de A sont données par

$$\lambda_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < \lambda_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} < 0$$

On en conclut que l'origine est un noeud attractif (ou encore un puits). Pour résoudre ce système, il convient de calculer des vecteurs propres V_1, et V_2, associés à ces valeurs propres λ_1, et λ_2. Les vecteurs propres $V_1 = \left[\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{array} \right]$ associés à λ_1 sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{array} \right] = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \left[\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{array} \right]$$

Autrement dit, il suffit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_{1,2} & = & \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ v_{1,1} \\ -v_{1,1} - 5v_{1,2} & = & \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ v_{1,2} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow v_{1,2} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}\ v_{1,1}$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{array} \right]$$

On procède de façon analogue pour trouver un vecteur propre $V_2 = \left[\begin{array}{c} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{array} \right]$ associé ‘a la valeur propre λ_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{array} \right] = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \left[\begin{array}{c} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{array} \right]$$

Dans cette situation, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_{2,2} & = & \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ v_{1,1} \\ -v_{2,1} - 5v_{2,2} & = & \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ v_{1,2} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow v_{2,2} = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ v_{1,2}$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{array} \right]$$

Il nous reste à calculer l'inverse P^{-1} de la matrice de changement de base

$$P = (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} & \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour cela on observe que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u + v & = & x \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ u + \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ v & = & y \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{5+\sqrt{21}}{2}\ u + \frac{5+\sqrt{21}}{2}\ v & = & \frac{5+\sqrt{21}}{2}\ x \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ u + \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ v & = & y \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{5-\sqrt{21}}{2}\ u + \frac{5-\sqrt{21}}{2}\ v & = & \frac{5-\sqrt{21}}{2}\ x \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ u + \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ v & = & y \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & -\frac{1}{\sqrt{21}} \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\ x + y \right) \\ v & = & \frac{1}{\sqrt{21}} \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\ x + y \right) \end{array} \right.$$

On en conclut que

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{21}} \times \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & -1 \\ \frac{5+\sqrt{21}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (2) est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} X(t) &= [e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0)]\ V_1 + [e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0)]\ V_2 \\ &= [e^{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ t}\ \overline{x}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} + [e^{\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ t}\ \overline{y}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \times \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & -1 \\ \frac{5+\sqrt{21}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\sqrt{21}}[e^{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\ t}\ (\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ x(0) - x'(0))] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{21}}[e^{\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ t}\ (\frac{5+\sqrt{21}}{2}\ x(0) + x'(0))] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{e^{-\frac{5t}{2}}}{\sqrt{21}} \times \Big(& e^{-\frac{\sqrt{21}}{2}\ t} \left[\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\ x(0) - x'(0) \right] \\ & + e^{\frac{\sqrt{21}}{2}\ t} \left[\frac{5+\sqrt{21}}{2}\ x(0) + x'(0) \right] \Big) \end{aligned}$$

2. Le second système peut s'écrire

$$x'' + 5x' + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -5y - 4x \end{cases} \tag{3}$$

Ainsi, si on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on obtient

$$(3) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\mathrm{tr}(A) = -5 \quad \text{et} \quad \mathrm{dét}(A) = 4$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

de A sont données par

$$\lambda_1 = -4 < \lambda_2 = -1 < 0$$

L'origine est à nouveau un noeud attractif (ou encore un puits).

Les vecteurs propres $V_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$ associés à λ_1 sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ -4v_{1,1} - 5v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4v_{1,1} \\ -4v_{1,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations se réduisent à la même équation

$$v_{1,2} = -4v_{1,1} \quad (\Leftrightarrow -4v_{1,1} - (5-4)\ v_{1,2} = 0)$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

De même, les vecteurs propres $V_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$ sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2,2} \\ -4v_{2,1} - 5v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{2,1} \\ -v_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations se réduisent à la même équation

$$v_{2,2} = -v_{2,1} \quad (\Leftrightarrow -4v_{2,1} - (5-1)\ v_{2,2} = 0)$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'inverse P^{-1} de la matrice de changement de base

$$P = (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

est déterminé par les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u + v & = & x \\ 4\ u + v & = & -y \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{rcl} 4\ u + 4\ v & = & 4\ x \\ -4\ u - \ v & = & y \end{array} \right. \\ \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} -u - v & = & -x \\ 4\ u + v & = & -y \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & -\left(x+y\right)/3 \\ v & = & \left(4x+y\right)/3 \end{array} \right.$$

On en conclut que

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (3) est donnée par la formule suivante

$$X(t) \quad = \quad [e^{-4t}\ \overline{x}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + [e^{-t}\ \overline{y}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x(0)+y(0))/3 \\ (4x(0)+y(0))/3 \end{bmatrix}$$

On obtient finalement

$$x(t) \quad = \quad -\frac{e^{-4t}}{3}\ (x(0)+x'(0)) + \frac{e^{-t}}{3}\ (4x(0)+x'(0))$$

3. Le dernier système peut s'écrire

$$x'' + 4x' + 2x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -4y - 2x \end{array} \right. \tag{4}$$

Ainsi, si on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on obtient

$$(4) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\mathrm{tr}(A) = -4 \quad \text{et} \quad \mathrm{dét}(A) = 2$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

de A sont données par

$$\lambda_1 = -(2+\sqrt{2}) < \lambda_2 = -(2-\sqrt{2}) < 0$$

L'origine est encore un noeud attractif (ou encore un puits).

Les vecteurs propres $V_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$ associés à λ_1 sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ -2v_{1,1} - 4v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2+\sqrt{2})v_{1,1} \\ -(2-\sqrt{2})v_{1,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations se réduisent à la même équation

$$v_{1,2} = -(2+\sqrt{2})v_{1,1}$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -(2+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

De même, les vecteurs propres $V_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$ associés à $\lambda_2 = -1$ sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2,2} \\ -2v_{2,1} - 4v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2-\sqrt{2})v_{2,1} \\ -(2-\sqrt{2})v_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations se réduisent à la même équation

$$v_{2,2} = -(2+\sqrt{2})v_{2,1}$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -(2-\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

L'inverse P^{-1} de la matrice de changement de base

$$P = (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -(2+\sqrt{2}) & -(2-\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

est déterminé par les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u + v & = & x \\ (2+\sqrt{2})\ u + (2-\sqrt{2})v & = & -y \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{rcl} -(2+\sqrt{2})\ u - (2+\sqrt{2})\ v & = & -(2+\sqrt{2})\ x \\ (2+\sqrt{2})\ u + (2-\sqrt{2})v & = & -y \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{rcl} -(2-\sqrt{2})\ u - (2-\sqrt{2})\ v & = & -(2-\sqrt{2})\ x \\ (2+\sqrt{2})\ u + (2-\sqrt{2})v & = & -y \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & -\big((2-\sqrt{2})\ x + y\big)\,/(2\sqrt{2}) \\ v & = & \big((2+\sqrt{2})\ x + y\big)\,/(2\sqrt{2}) \end{array} \right.$$

On en conclut que

$$P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} -(2-\sqrt{2}) & -1 \\ (2+\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (4) est donnée par la formule suivante

$$X(t)$$

$$= [e^{-(2+\sqrt{2})t}\ \overline{x}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ -(2+\sqrt{2})) \end{bmatrix} + [e^{-(2-\sqrt{2})t}\ \overline{y}(0)] \begin{bmatrix} 1 \\ -(2-\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} -(2-\sqrt{2}) & -1 \\ (2+\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\ x(0) - \frac{y(0)}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(\sqrt{2}+1)}{2}\ x(0) + \frac{y(0)}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$x(t)$$

$$= e^{-2t} \times \left[-e^{-\sqrt{2}t}\ (\tfrac{(\sqrt{2}-1)x(0)}{2} + \tfrac{x'(0)}{2\sqrt{2}}) + e^{+\sqrt{2}t}\ (\tfrac{(\sqrt{2}+1)x(0)}{2} + \tfrac{x'(0)}{2\sqrt{2}}) \right]$$

$$= e^{-2t} \times \left[x(0)\ \tfrac{e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}}{2} + \left(\sqrt{2}x(0) + \tfrac{x'(0)}{\sqrt{2}}\right)\ \tfrac{e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}}{2} \right]$$

$$= e^{-2t} \times \left[x(0)\ \cosh(\sqrt{2}t) + \left(\sqrt{2}x(0) + \tfrac{x'(0)}{\sqrt{2}}\right)\ \sinh(\sqrt{2}t) \right]$$

■

Exercice 3 *Résoudre et étudier la stabilité des équations différentielles suivantes*

$$x'' = d\ x' + c\ x \quad \text{avec} \quad (c \wedge d) > 0$$

Solution :
On commence par noter que le premier système peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre dans le plan

$$x'' = d\ x' + c\ x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & d\ y + c\ x \end{array} \right. \tag{5}$$

Ainsi, si on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on obtient

$$(5) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$\operatorname{tr}(A) = d \quad \text{et} \quad \text{dét}(A) = -c$$

On en conclut que les valeurs propres

$$\frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A)}}{2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4c}}{2}$$

de A sont données par

$$\lambda_1 = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4c}{d^2}\right)}\right) < 0 < \lambda_2 = \frac{d}{2}\left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4c}{d^2}\right)}\right)$$

On en conclut que l'origine est un col.

Les vecteurs propres $V_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$ associés à λ_1 sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ cv_{1,1} + dv_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\ v_{1,1} \\ \lambda_1\ v_{1,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations se réduisent à la même équation

$$v_{1,2} = \lambda_1\ v_{1,1}$$

Pour vérifier cette assertion, on notera par exemple que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = d \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 = -c$$

On obtient ainsi que

$$v_{1,2} = \lambda_1\ v_{1,1} \Rightarrow c\ v_{1,1} + (d - \lambda_1)\ v_{1,2} = v_{1,1}[c + \lambda_1 \lambda_2] = 0$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

De même, les vecteurs propres $V_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$ associés à λ_2 sont donnés par l'équation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2,2} \\ cv_{2,1} + dv_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \ v_{2,1} \\ \lambda_2 \ v_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ces deux équations se réduisent à la même équation

$$v_{2,2} = \lambda_2 \ v_{2,1}$$

Pour vérfier cette assertion, on notera à nouveau que

$$v_{2,2} = \lambda_2 \ v_{2,1} \Rightarrow c \ v_{2,1} + (d - \lambda_2) \ v_{2,2} = v_{2,1}[c + \lambda_1 \lambda_2] = 0$$

Il nous suffit donc de choisir par exemple

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 étant distinctes, les vecteurs (V_1, V_2) forment une base du plan. L'inverse de la matrice de changement de base $P = [V_1, V_2]$ est donnée par la formule

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de (4) est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} & X(t) \\ & = [e^{\lambda_1 t} \ \overline{x}(0)] \ \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1) \end{bmatrix} + [e^{\lambda_2 t} \ \overline{y}(0)] \ \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \ x(0) - \frac{y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ x(0) + \frac{y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$
\begin{aligned}
& x(t) \\
& = [e^{\lambda_1 t}\ \overline{x}(0)] + [e^{\lambda_2 t}\ \overline{y}(0)] \\
& = e^{\lambda_1 t}\ \left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\ x(0) - \tfrac{x'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) + e^{\lambda_2 t}\ \left(-\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ x(0) + \tfrac{x'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \\
& = \frac{\lambda_2\ e^{\lambda_1 t} - \lambda_1\ e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \times x(0) + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \times x'(0)
\end{aligned}
$$

■

Exercice 4 *Étudier la stabilité de l'origine pour les équations différentielles dans le plan suivantes*

$$1)\ \left\{\begin{array}{lcl}\frac{dx}{dt} & = & 2x\\ \frac{dy}{dt} & = & y\end{array}\right. \quad 2)\ \left\{\begin{array}{lcl}\frac{dx}{dt} & = & x-y\\ \frac{dy}{dt} & = & -2x\end{array}\right. \quad 3)\ \left\{\begin{array}{lcl}\frac{dx}{dt} & = & 2x+y\\ \frac{dy}{dt} & = & -y\end{array}\right.$$

Solution :
Si on pose $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$, ces équations différentielles dans le plan s' expriment sous la forme suivante

$$\frac{dX}{dt} = A\ X$$

avec selon les cas :

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Dans le premier cas, les valeurs propres de A

$$0 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 2$$

   sont toutes deux positives. Dans cette situation, l'origine est un un point d'équilibre α-stable et répulsif (ou encore un noeud répulsif ou une source).

2. Dans les autres cas, les valeurs propres sont données par la formule

$$\frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \mathrm{dét}(A)}}{2}$$

   Pour les équations différentielles (2) ou (3), nous avons

$$\mathrm{tr}(A) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{dét}(A) = -2$$

   Dans les deux cas, les valeurs propres sont donc données par

$$\lambda_1 = -1 < 0 < \lambda_2 = 2$$

   et l'origine est un col.

■

Exercice 5 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax+by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx+dy \end{array} \right. \quad \textit{avec} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 = 4\ (ad-bc) \quad (6)$$

1. *On pose* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$*. Vérifier que* (6) $\Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$*, où* A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera. Vérifier que la matrice* A *a une seule* λ*, et déterminer sa valeur en fonction des paramètres* a,b,c,d*.*
2. *On note* $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *un vecteur propre associé à la valeur propre* λ*, et l'on considère le vecteur* $W = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$*. Montrer que* (V,W) *forment une base orthogonale de* $\mathbb{R}^2$*, et vérifier que l'on a*
$$(A-\lambda I)W = (b-c)\ V$$
3. *On suppose que* $b=c$*. Montrer que l'on a nécessairement* $a=d$*. Résoudre, et analyser la stabilité et les portraits de phases du système (6) dans la base* (V,W)*.*
4. *On suppose que* $b \neq c$*. Montrer que l'on a nécessairement*
$$\forall n \geq 2 \qquad (A-\lambda I)^n = 0$$
Résoudre, et analyser la stabilité et les portraits de phases du système (6) dans la base (V,W)*.*

Solution :

1. On a clairement
$$(6) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
Le polynôme caractéristique de A est donné par
$$p(\lambda) \quad = \quad \left(\lambda - \frac{\text{tr}(A)}{2}\right) - \frac{1}{4} \times \left(\text{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A)\right)$$
D' après nos hypothèses, nous avons
$$\text{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A) = (a+d)^2 - 4\ (ad-bc) = 0$$
On en conclut que A admet une valeur propre double réelle définie par
$$\lambda = \frac{\text{tr}(A)}{2} = \frac{a+d}{2}$$

2. On commence par remarquer que le produit scalaire $\langle V, W\rangle$ entre les deux vecteurs V et W est nul

$$\langle V, W\rangle = v_1 \times (-v_2) + v_2 \times v_1 = 0 \iff V \perp W$$

Par conséquent le couple (V, W) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur propre V associé à la valeur propre λ est caractérisé par les équations suivantes :

$$(A - \lambda I)V = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

On a donc

$$(A - \lambda I)V = 0 \iff \begin{cases} \frac{d-a}{2}\ v_1 = b\ v_2 \\ \frac{d-a}{2}\ v_2 = -c\ v_1 \end{cases}$$

On déduit de ces propriétés la formule recherchée

$$(A - \lambda I)W = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b\ v_1 + \frac{d-a}{2}\ v_2 \\ \frac{d-a}{2}\ v_1 - c\ v_2 \end{pmatrix} = (b-c)\ V$$

Pour conclure, on pourra noter que la matrice de changement de base est antisymétrique

$$P =_{\text{déf.}} [V, W] = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}$$

et son inverse est simplement donné par

$$P^{-1} = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{pmatrix}$$

3. Lorsque $b = c$, la matrice A est diagonalisable. Plus précisément, si l'on note respectivement par $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, et

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = P^{-1}X$$

les coordonnées canoniques, et celles associées à la base (V, W), alors nous avons

$$\begin{aligned} \overline{A}\ \overline{X} &= (P^{-1}AP)\ \overline{X} = (P^{-1}A)\ [V, W] \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = (P^{-1}A)(\overline{x}\ V + \overline{y}\ W) \\ &= P^{-1}(\overline{x}\ AV + \overline{y}\ AW) = P^{-1}(\lambda\ \overline{x}\ V + \lambda\ \overline{y}\ W) \\ &= P^{-1}[V, W] \begin{bmatrix} \lambda\ \overline{x} \\ \lambda\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\overline{A} = P^{-1}AP \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On note ensuite que

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0 \Leftrightarrow a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc = 0$$

Par conséquent, sous notre jeu d'hypothèses nous avons

$$\begin{aligned} b = c \quad &\Longrightarrow \quad (a-d)^2 + 4bc = (a-d)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad a = d\ , \quad \lambda = \frac{a+d}{2} = a\ , \quad \text{et} \quad (P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation différentielle (6) s'écrit au moyen des coordonnées

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = P^{-1}X$$

associées à la base (V, W)

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \overline{X}$$

La solution générale est

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = e^{ta}\ \overline{x}(0) \\ \overline{y}(t) = e^{ta}\ \overline{y}(0) \end{cases}$$

Les courbes intégrales de (6) sont données par

$$\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\lambda\ \overline{y}}{\lambda\ \overline{x}} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} \Longrightarrow \right) \quad \overline{y}(\overline{x}) = C\ \overline{x} \quad \text{et} \quad \overline{x} = 0$$

Pour vérifier cette dernière assertion, on notera par exemple que pour les $\overline{x} > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d\overline{y}}{\overline{y}} = \frac{d\overline{x}}{\overline{x}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \log \overline{y} = \log\left(\overline{x} \times C\right) \Longleftrightarrow \overline{y}(\overline{x}) = C\ \overline{x} \end{aligned}$$

Le portrait de phases correspondant est représenté sur la figure suivante

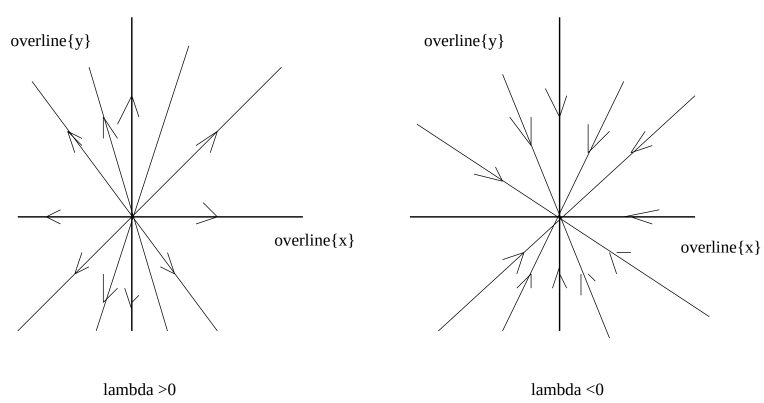

FIG. 4 –

4. Supposons que l'on ait $b \neq c$. Dans cette situation, on remarque que

$$(A - \lambda I)W = (b - c)\ V \Longrightarrow\ (A - \lambda I)^2 W = (b - c)\ (A - \lambda I)V = 0$$

Par conséquent, pour tout $v, w \in \mathbb{R}$, nous avons

$$(A - \lambda I)^2 (v\ V + w\ W) = 0$$

Le couple de vecteur (V, W) formant une base du plan, on en conclut aisément que $(A - \lambda I)^2 = 0$, et a fortiori

$$\forall n \geq 2 \qquad (A - \lambda I)^n = 0$$

Lorsque $b \neq c$, la matrice A n'est pas diagonalisable. Plus précisément, dans la base (V, W) nous avons

$$P =_{\text{déf.}} [V, W] \quad \overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} =_{\text{déf.}} P^{-1} X = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \overline{A}\ \overline{X} &= (P^{-1}AP)\ \overline{X} = (P^{-1}A)\ [V, W] \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = (P^{-1}A)(\overline{x}\ V + \overline{y}\ W) \\
&= P^{-1}(\overline{x}\ AV + \overline{y}\ AW) = P^{-1}(\lambda\ \overline{x}\ V + \lambda\ \overline{y}\ W + (b-c)\ \overline{y}\ V) \\
&= P^{-1}[V, W] \begin{bmatrix} \lambda\ \overline{x} + (b-c)\ \overline{y} \\ \lambda\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & (b-c) \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha = (b - c) \neq 0$$

L'équation différentielle (6) s'écrit au moyen des coordonnées

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = P^{-1} X$$

associées à la base (V, W)

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = \overline{A}\ \overline{X} \quad \text{avec} \quad \overline{A} = (P^{-1}AP) \tag{7}$$

On notera que

$$\begin{aligned}
(\overline{A} - \lambda I)^2 &= (P^{-1}AP - \lambda I)^2 = [P^{-1}(A - \lambda I)P][P^{-1}(A - \lambda I)P] \\
&= P^{-1}(A - \lambda I)^2 P = 0
\end{aligned}$$

De même, on montre que

$$\forall n \geq 2 \qquad (\overline{A} - \lambda I)^n = 0$$

Par conséquent, nous avons

$$e^{t(\overline{A}-\lambda I)} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\ (\overline{A}-\lambda I)^n = I + t\ (\overline{A}-\lambda I)$$

La solution générale de (7) est de ce fait donnée par la formule

$$\begin{aligned}\overline{X}(t) &= e^{t\overline{A}}\ \overline{X}(0) = e^{\lambda t} \times e^{t(\overline{A}-\lambda I)}\overline{X}(0) \\ &= e^{\lambda t} \times \left[I + t\ (\overline{A}-\lambda I)\right]\ \overline{X}(0)\end{aligned}$$

Il nous reste a remarquer que

$$(\overline{A}-\lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & (b-c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient finalement la formule plus explicite suivante

$$\overline{X}(t) = \begin{bmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{bmatrix} = e^{\frac{a+d}{2}\ t} \begin{bmatrix} \overline{x}(0) + \overline{y}(0)\ (b-c)\ t \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix}$$

On notera que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\overline{y}(t)$ reste de signe constant, alors que $\overline{x}(t)$ change de signe dès que $\overline{y}(0) \neq 0$. Dans cette situation (i.e. lorsque $\overline{y}(0) \neq 0$), nous avons

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= e^{\frac{a+d}{2}\ t}\ \overline{y}(0)\ \times \left[\frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + (b-c)\ t\right] \\ &= \overline{y}(t) \times \left[\frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + (b-c)\ t\right]\end{aligned}$$

Supposons par exemple que $b > c$. Dans cette situation, $\overline{x}(t)$ et $\overline{y}(t)$ sont du même signe pour tous les temps

$$t > t_e = -\frac{1}{(b-c)}\ \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)}$$

et de signes opposés aux temps $t \leq t_e$. On notera que l'on a

$$\overline{y}(0) \neq 0 \Longrightarrow \frac{\overline{x}(t)}{\overline{y}(t)} = \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + (b-c)\ t \xrightarrow{t\to+\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad b > c \\ -\infty & \text{si} \quad b < c \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t\to-\infty} \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad b > c \\ +\infty & \text{si} \quad b < c \end{cases}$$

Pour déterminer les courbes intégrales dus système, on examine le cas $\overline{y}(0) = 1$. Dans cette situation, nous avons

$$\overline{y}(t) = e^{\lambda t} \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\ \log \overline{y}(t)$$

et par conséquent

$$\overline{x}(t) = \overline{y}(t) \times \left[\frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + (b-c)\ \frac{1}{\lambda}\ \log \overline{y}(t) \right]$$

En posant $\alpha = (b-c)$ et $\beta = \overline{x}(0)$, on en déduit que les courbes intégrales sont donc données par les équations

$$\overline{x} = \beta\ \overline{y} + \frac{\alpha}{\lambda}\ \overline{y}\ \log|\overline{y}|$$

Le portrait des phases lorsque $\alpha/\lambda < 0$ est représenté par la figure suivante :

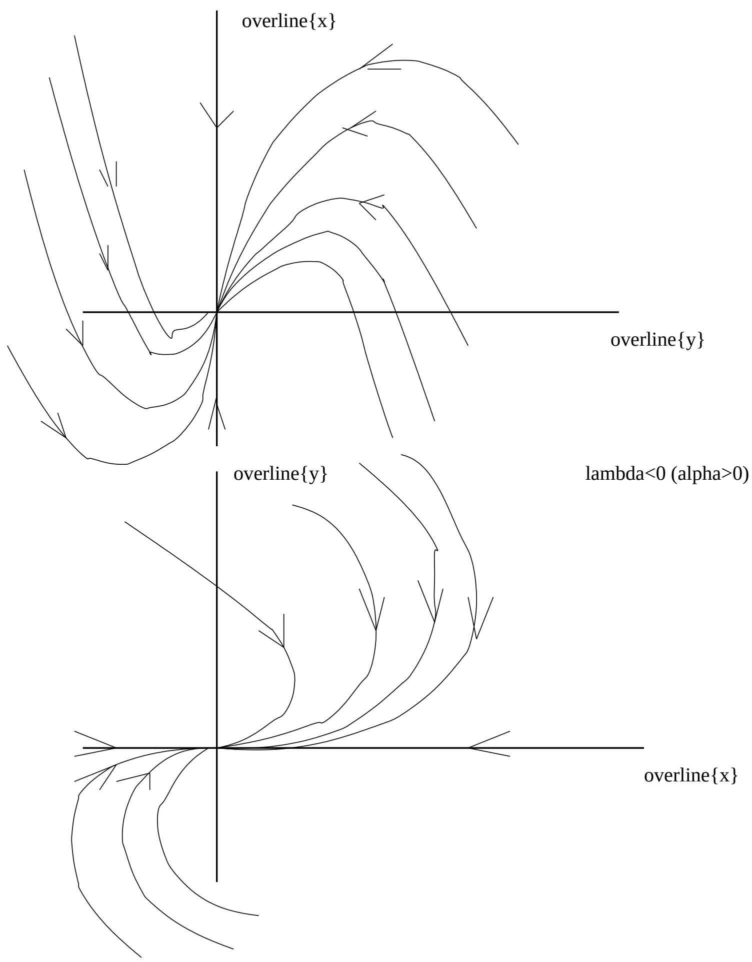

Fig. 5 –

Lorsque la valeur propre est strictement positive $\lambda > 0$, l'origine est un point d'équilibre α-stable, et répulsif (on dit encore que c'est un noeud impropre répulsif ou une source). Inversement, lorsque la valeur propre est strictement négative $\lambda < 0$, l'origine est un point d'équilibre ω-stable, et attractif (on dit encore que c'est un noeud impropre attractif ou un puits).

Lorsque $b > c$, les portrait des phases correspondant aux cas $\lambda < 0$, $\lambda > 0$, sont représentés par les figures suivantes :

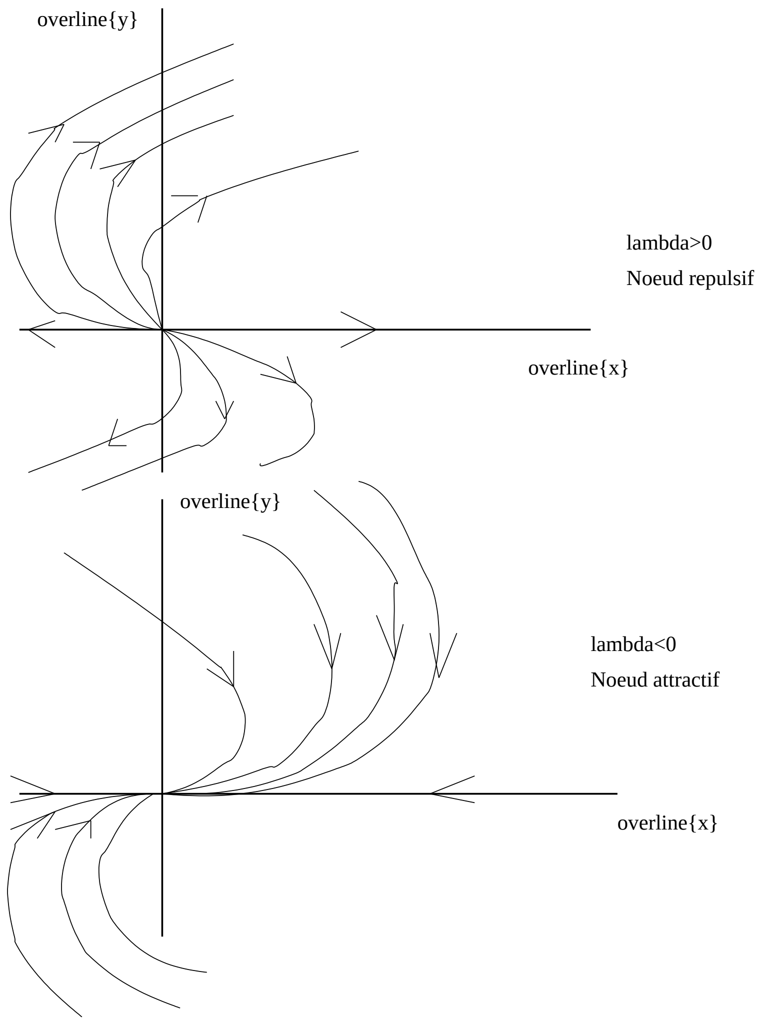

Fig. 6 –

∎

Exercice 6 *On considère le système différentiel du second ordre défini par l'équation suivante*

$$x'' + \frac{d^2}{4}\ x = d\ x' \quad \textit{avec} \quad d \neq 0 \tag{8}$$

1. *Montrer que ce système peut être reformulé en un système différentiel du premier ordre dans le plan, et donner sa forme.*
2. *Résoudre ce système dans une base appropriée.*
3. *Déterminer son portrait de phases, et analyser la stabilité du système en fonction du signe du paramètre d.*

Solution :

1. On a clairement

$$(8) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ x'' & = & d\ x' - \frac{d^2}{4}\ x = d\ y - \frac{d^2}{4}\ x \end{array} \right.$$

Ainsi, si l'on pose $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, alors on obtient

$$(8) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{4} & d \end{pmatrix}$$

On notera que l'on a

$$\mathrm{tr}(A) = d \quad \text{et} \quad \text{dét}(A) = \frac{d^2}{4} \Rightarrow \mathrm{tr}(A)^2 - 4\ \text{dét}(A) = 0$$

On en conclut que A admet une valeur propre double réelle définie par

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} = \frac{d}{2}$$

2. Pour résoudre ce système, il convient de trouver un vecteur propre $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre λ. Pour cela on note que

$$AV = \lambda V \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_2 & = & \frac{d}{2}\ v_1 \\ -\frac{d^2}{4}\ v_1 + d\ v_2 & = & \frac{d}{2}\ v_2 \end{array} \right.$$

Ces deux équations étant équivalente à la même équation

$$v_2 = \frac{d}{2}\ v_1$$

on peut par exemple choisir le vecteur $V = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{d}{2} \end{bmatrix}$. On pose ensuite $W = \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, de sorte à obtenir une base orthogonale (V, W) du plan.

La matrice de changement de base $P = [V, W]$, et son inverse sont donnés par les formules suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{1+\frac{d^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A dans la base (V, W) est donnée par

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= P^{-1}AP = \frac{1}{1+\frac{d^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{4} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+\frac{d^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & 1 \\ \frac{d^2}{4} & \frac{d^3}{8}+d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+\frac{d^2}{4}} \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\left(1+\frac{d^2}{4}\right) & \left(1+\frac{d^2}{4}\right)^2 \\ 0 & \frac{d}{2}\left(1+\frac{d^2}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & \left(1+\frac{d^2}{4}\right) \\ 0 & \frac{d}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On note ensuite que

$$(\overline{A} - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \left(1+\frac{d^2}{4}\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 \Rightarrow \forall n \geq 2 \quad (\overline{A} - \lambda I)^n = 0$$

La solution générale de l'équation différentielle dans la base (V, W) est donnée par la formule

$$\begin{aligned}
\overline{X}(t) &= e^{t\overline{A}}\ \overline{X}(0) = e^{\lambda t} \times e^{t(\overline{A}-\lambda I)}\overline{X}(0) = e^{\lambda t} \times \left[I + t\ (\overline{A} - \lambda I)\right]\ \overline{X}(0) \\
&= e^{\frac{dt}{2}} \times \left[\begin{pmatrix} 1 & \left(1+\frac{d^2}{4}\right)\ t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{bmatrix} \overline{x}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix} \\
&= e^{\frac{dt}{2}} \times \begin{bmatrix} \overline{x}(0) + \left(1+\frac{d^2}{4}\right)\ t\ \overline{y}(0) \\ \overline{y}(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. On notera que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\overline{y}(t)$ reste de signe constant, alors que $\overline{x}(t)$ change de signe dès que $\overline{y}(0) \neq 0$. Dans cette situation (i.e. lorsque $\overline{y}(0) \neq 0$), nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= e^{\frac{d}{2}\ t}\ \overline{y}(0)\ \times \left[\frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + \left(1+\frac{d^2}{4}\right)\ t\right] \\
&= \overline{y}(t) \times \left[\frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + \left(1+\frac{d^2}{4}\right)\ t\right]
\end{aligned}$$

Les quantités $\overline{x}(t)$ et $\overline{y}(t)$ sont du même signe pour tous les temps

$$t > t_e = -\frac{1}{1+\frac{d^2}{4}}\ \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)}$$

et de signes opposés aux temps $t \leq t_e$. On notera que l'on a

$$\overline{y}(0) \neq 0 \Longrightarrow \frac{\overline{x}(t)}{\overline{y}(t)} = \frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + \left(1 + \frac{d^2}{4}\right)\ t \ \begin{array}{l} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty \\ \\ \xrightarrow{t \to -\infty} -\infty \end{array}$$

Pour déterminer les courbes intégrales dus système, on examine le cas $\overline{y}(0) = 1$. Dans cette situation, nous avons

$$\overline{y}(t) = e^{\lambda t} \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\ \log \overline{y}(t)$$

et par conséquent

$$\overline{x}(t) = \overline{y}(t) \times \left[\frac{\overline{x}(0)}{\overline{y}(0)} + \left(1 + \frac{d^2}{4}\right)\ \frac{2}{d}\ \log \overline{y}(t)\right]$$

En posant $\beta = \overline{x}(0)$, on en déduit que les courbes intégrales sont donc données par les équations

$$\overline{x} = \beta\ \overline{y} + \left(\frac{2}{d} + \frac{d}{2}\right)\ \overline{y}\ \log|\overline{y}|$$

Le portrait des phases lorsque $d < 0$ ($\Leftrightarrow \left(\frac{2}{d} + \frac{d}{2}\right) < 0$) est représenté par la figure suivante :

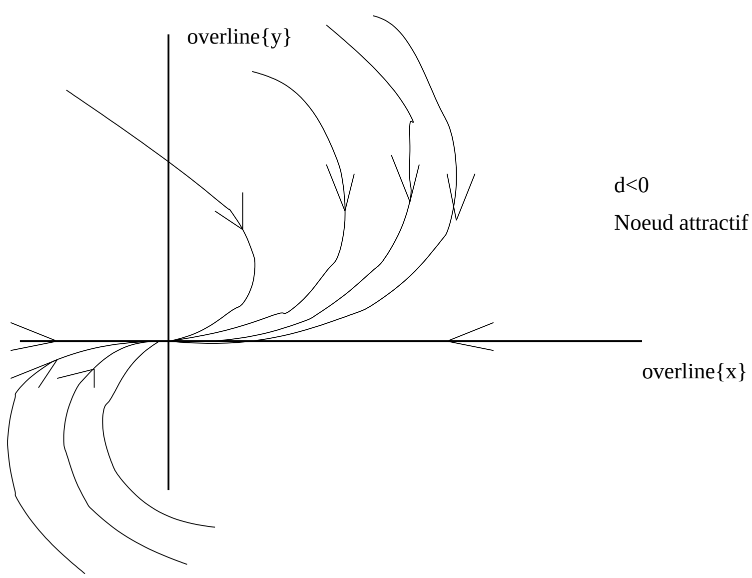

FIG. 7 –

Lorsque $d > 0$, la valeur propre est strictement positive $\lambda = \frac{d}{2} > 0$, et l'origine est un point d'équilibre α-stable, et répulsif (on dit encore que c'est un noeud impropre répulsif ou une source). Inversement, lorsque $d < 0$, la valeur propre est strictement négative $\lambda < 0$, et l'origine est un point d'équilibre ω-stable, et attractif (on dit encore que c'est un noeud impropre attractif ou un puits).

Les portrait des phases correspondant aux cas $d < 0$, $d > 0$, sont représentés par les figures suivantes :

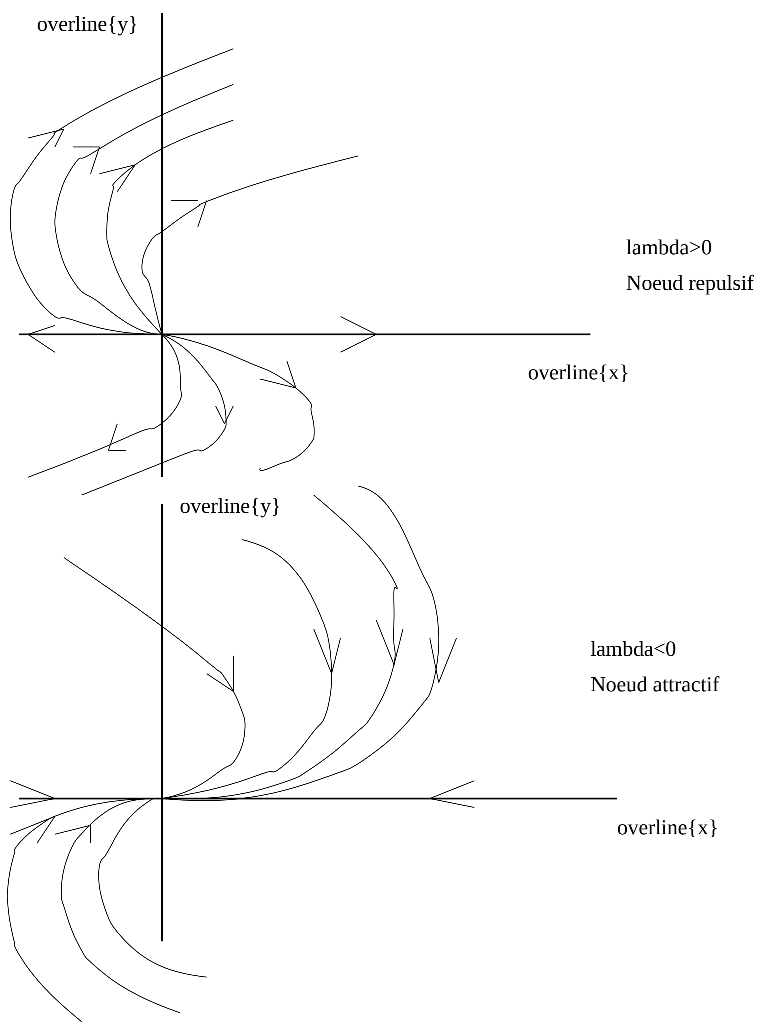

Fig. 8 –

■

Exercice 7 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax+by \\ \frac{dy}{dt} &= cx+dy \end{cases} \quad \textit{avec} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 < 4\ (ad-bc) \quad (9)$$

1. *On pose* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Vérifier que* (9) $\Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$, *où* A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera.*
2. *Vérifier que* A *n'admet aucune valeur propre réelle, sinon deux valeurs propres complexes conjuguées*

$$\lambda_1 = \alpha + i\ \beta \quad \textit{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\ \beta \quad \text{avec} \quad \beta > 0$$

Expliciter les valeurs des parties réelles et imaginaires (α, β) *en fonction de la trace* $\mathrm{tr}(A)$, *et du déterminant* $\mathrm{dét}(A)$.

3. *Soit* $(V_1 - iV_2)$, *et* $(V_1 + iV_2)$ *deux vecteurs non nuls du plan complexifié* $\mathbb{C}^2$, *vecteurs propres du prolongement de* A *à* $\mathbb{C}^2$, *et associés aux valeurs propres* λ_1, *et* λ_2 *:*

$$A(V_1 - iV_2) = \lambda_1\ (V_1 - iV_2) \quad \big(\text{et} \quad A(V_1 + iV_2) = \overline{\lambda}_1\ (V_1 + iV_2)\big)$$

Montrer que (V_1, V_2) *forment une base de* $\mathbb{R}^2$ *déterminée par les équations*

$$\begin{cases} AV_1 &= \alpha\ V_1 + \beta\ V_2 \\ AV_2 &= -\beta\ V_1 + \alpha\ V_2 \end{cases}$$

Déterminer la forme du système différentiel (9) dans cette base.

4. *On note* $z(t)$ *la trajectoire dans le plan complexe associée à la solution* $(Re(z(t)), Im(z(t)))$ *de (9) dans la base* (V_1, V_2). *Vérifier que l'on a*

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1\ z$$

et déterminer la solution générale de cette équation.

5. *Vérifier qu'en coordonnées polaires* $z(t) = r(t)\ e^{i\theta(t)}$, *la solution générale est donnée par*

$$r(t) = e^{\alpha t} r(0) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta(0) + \beta t$$

Discuter les points d'équilibre, la périodicité, et la stabilité du système dans les trois cas suivants :

$$1)\ \ \alpha < 0 \qquad 2)\ \ \alpha = 0 \qquad 3)\ \alpha > 0$$

Solution :

1. On a clairement

$$(9) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$p(\lambda) \quad = \quad \left(\lambda - \frac{\mathrm{tr}(A)}{2}\right) + \frac{1}{4} \times \left(4\ \mathrm{dét}(A) - \mathrm{tr}(A)^2\right)$$

D' après nos hypothèses, nous avons

$$4\ \mathrm{dét}(A) - \mathrm{tr}(A)^2 = 4\ (ad - bc) - (a + d)^2 > 0$$

Par conséquent, nous avons

$$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{\mathrm{tr}(A)}{2}\right) - \left(i \times \frac{\sqrt{4\ \mathrm{dét}(A) - \mathrm{tr}(A)^2}}{2}\right)^2$$

Les valeurs propres λ_1, et λ_2, de la matrice A sont donc données par

$$\lambda_1 = \alpha + i\ \beta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\ \beta$$

avec

$$\alpha = \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{4\ \mathrm{dét}(A) - \mathrm{tr}(A)^2}}{2} > 0$$

3. Par définition des vecteurs $(V_1 - iV_2)$ et $(V_1 + iV_2)$ nous avons

$$A(V_1 - iV_2) = \lambda_1\ (V_1 - iV_2) \quad \text{et} \quad A(V_1 + iV_2) = \overline{\lambda}_1\ (V_1 + iV_2)$$

Par conséquent, nous avons

$$A(V_1 - iV_2) = \lambda_1\ (V_1 - iV_2) = (\alpha + i\ \beta)\ (V_1 - iV_2)$$

On obtient ainsi la formule

$$AV_1 - iAV_2 = [\alpha V_1 + \beta V_2] + i[\beta V_1 - \alpha V_2]$$

On en conclut que le couple (V_1, V_2) est déterminé par les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AV_1 & = & \alpha\ V_1 + \beta\ V_2 \\ AV_2 & = & -\beta\ V_1 + \alpha\ V_2 \end{array} \right.$$

Si V_1 et V_2 n'étaient pas indépendants, les vecteurs $(V_1 - iV_2)$ et $(V_1 + iV_2)$ ne le seraient pas non plus. Ceci conduirait à une contradiction avec le fait que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont distinctes (on rappelle que $\beta > 0$).

On notera par la suite $U = \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right]$ les coordonnées d'un vecteur X dans la base (V_1, V_2). Autrement dit, nous avons

$$X = P\ U \quad \text{avec} \quad P = [V_1, V_2]$$

où $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur X dans la base canonique. Dans la base (V_1, V_2), l'action de la matrice A correspond à l'opération de la matrice $P^{-1}AP$. On a en effet

$$P^{-1}(AX) = P^{-1}APU = A_U\ U \Leftrightarrow A_U = P^{-1}AP$$

Il nous reste à noter que

$$\begin{aligned} APU &= A[V_1, V_2] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A(u\ V_1 + v\ V_2) = u\ AV_1 + v\ AV_2 \\ &= u\ (\alpha V_1 + \beta V_2) + v\ (-\beta V_1 + \alpha V_2) = [V_1, V_2] \begin{bmatrix} \alpha\ u - \beta\ v \\ \beta\ u + \alpha\ v \end{bmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \overline{X} \end{aligned}$$

On en conclut que dans la base (V_1, V_2) la matrice devient antisymétrique

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Dans cette base, le système différentiel (9) s'exprime donc sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= \alpha\ u - \beta\ v \\ \frac{dv}{dt} &= \beta\ u + \alpha\ v \end{cases}$$

4. On note $z(t) = u(t) + i\ v(t)$ la trajectoire dans le plan complexe associée à la solution de (9) dans la base (V_1, V_2). D' après ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{du}{dt} + i\ \frac{dv}{dt} = (\alpha\ u - \beta\ v) + i\ (\beta\ u + \alpha\ v) \\ &= u\ (\alpha + i\beta) + v\ (-\beta + i\ \alpha) = u\ (\alpha + i\beta) + iv\ (\beta\ i + \alpha) \\ &= (\alpha + i\beta) \times (u + i\ v) = \lambda_1\ z \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation est clairement donnée par

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\lambda_1 t} z(0) = e^{(\alpha + i\beta)t}\ (u(0) + i\ v(0)) \\ &= e^{\alpha t} \times [(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))\ (u(0) + i\ v(0))] \\ &= e^{\alpha t} \times [(\cos(\beta t)\ u(0) - \sin(\beta t)\ v(0)] \\ &\quad + i\ e^{\alpha t} \times [(\sin(\beta t)\ u(0) + \cos(\beta t)\ v(0)] \end{aligned}$$

En d'autres termes nous avons

$$\begin{cases} u(t) &= e^{\alpha t} \times [(\cos(\beta t)\ u(0) - \sin(\beta t)\ v(0)] \\ v(t) &= e^{\alpha t} \times [(\sin(\beta t)\ u(0) + \cos(\beta t)\ v(0)] \end{cases}$$

On notera que ces solutions sont périodiques de période

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

5. En coordonnées polaires $z(t) = r(t)\ e^{i\theta(t)}$, nous avons

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\ e^{i\theta} + i\ \frac{d\theta}{dt}\ z = z(t)\ \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} + i\ \frac{d\theta}{dt}\right) = z\ \ (\alpha + i\beta)$$

Par conséquent, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} r' & = & \alpha\ r \\ \theta' & = & \beta \end{array}\right.$$

la solution générale est donnée par

$$r(t) = e^{\alpha t} r(0) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta(0) + \beta t$$

Afin de déterminer le portrait de phases, on observe que

$$\theta(t) = \theta(0) + \beta t \Longrightarrow t = \frac{1}{\beta}\left(\theta(t) - \theta(0)\right)$$

On obtient ainsi que

$$r(t) = e^{\alpha t} r(0) = r(0)\ \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\ [\theta(t) - \theta(0)]\right)$$

- Lorsque $\alpha = 0$, les lignes de phases sont données (dans la base (V_1, V_2)) par des cercles centrées en l'origine. L'origine est ici un point singulier appelé *un centre*.

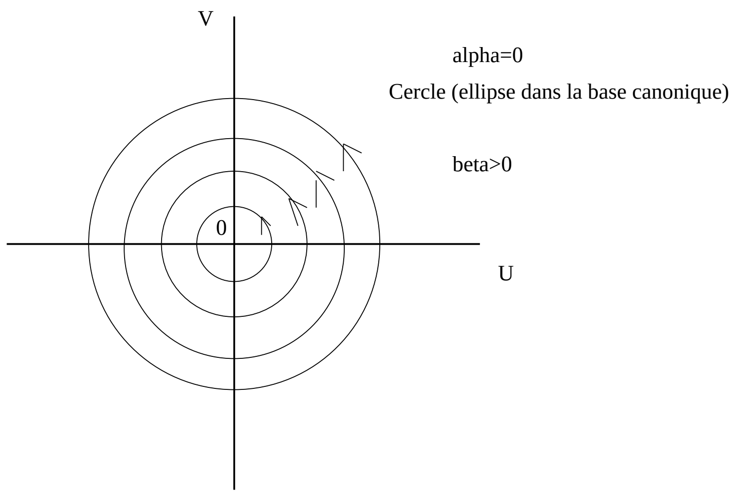

Fig. 9 –

- Lorsque $\alpha \neq 0$, les lignes de phases sont des spirales logarithmiques s'enroulant autour de l'origine. Ce point singulier est dans ce cas de figure appelé *un foyer*. Lorsque $\alpha > 0$, l'origine est un point d'équilibre répulsif. Inversement, lorsque $\alpha < 0$, l'origine est un point d'équilibre attractif.

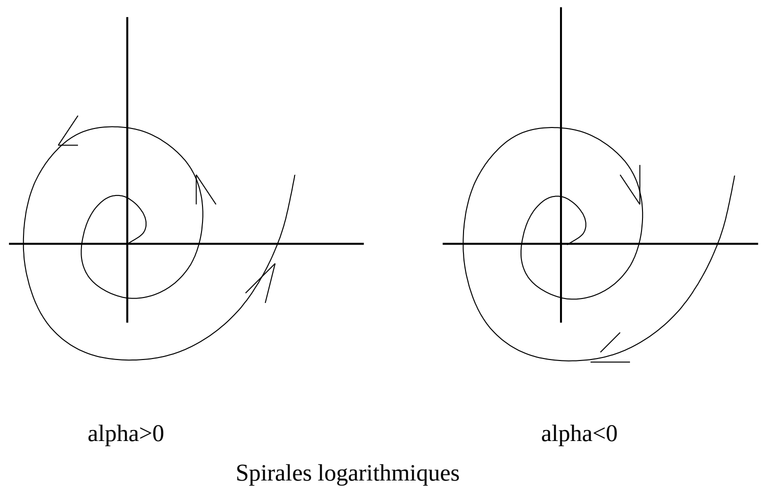

FIG. 10 –

■

Exercice 8 *Résoudre et analyser la stabilité des équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x'' + b^2\ x & = & 0\ , \quad \text{avec} \quad b \neq 0 \\ 2) & x'' + x & = & d\ x'\ , \quad \text{avec} \quad d^2 < 4 \end{array}$$

Solution :

1. Sans perte de généralité, nous conviendrons que $a > 0$. On a clairement dans ce cas,

$$(1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & b\ y \\ y' & = & x''/b = -b\ x \end{array} \right.$$

Ainsi, si l'on pose $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$, alors on obtient

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1, et λ_2, de la matrice A sont donc données par

$$\lambda_1 = \alpha + i\ \beta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\ \beta$$

avec

$$\alpha = \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{4\ \text{dét}(A) - \mathrm{tr}(A)^2}}{2} = b\ > 0$$

Autrement dit, nous avons

$$\lambda_1 = i\ b \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -i\ b$$

Si l'on pose $z(t) = x(t) + iy(t)$, on obtient

$$\frac{dz}{dt} \quad = \quad \frac{dx}{dt} + i\ \frac{dy}{dt} = b\ y - i\ b\ x = (-ib)\ (x+iy) = (-ib)\ z$$

La solution générale de cette équation est clairement donnée par

$$z(t) = e^{-ibt}z(0) = e^{-ibt}\ (x(0)+i\ y(0)) = (\cos(bt) - i \sin(bt))\ (x(0)+i\ y(0))$$

En d'autres termes nous avons

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(bt)\ x(0) + \sin(bt)\ x'(0) \\ (\ y(t) & = & -\sin(bt)\ x(0) + \cos(bt)\ y(0)\ ) \end{array} \right.$$

On notera que ces solutions sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{b}$, et les lignes de phases sont données (dans la base (V_1, V_2)) par des cercles centrées en l'origine.

2. On a clairement

$$(2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & x'' = d\, x' - x = -x + d\, y \end{array} \right.$$

Ainsi, si l'on pose $X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$, alors on obtient

$$(2) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X \quad \text{avec} \quad A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & d \end{array} \right)$$

Les valeurs propres λ_1, et λ_2, de la matrice A sont donc données par

$$\lambda_1 = \alpha + i\ \beta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\ \beta$$

avec $\alpha = \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} = \frac{d}{2}$, et

$$\beta = \frac{\sqrt{4\ \text{dét}(A) - \mathrm{tr}(A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 - d^2}}{2} = \sqrt{1 - (d/2)^2} > 0$$

On notera que l' on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Pour résoudre cette équation, il convient de chercher un couple de vecteurs (V_1, V_2) tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} AV_1 & = & \alpha\ V_1 + \beta\ V_2 \\ AV_2 & = & -\beta\ V_1 + \alpha\ V_2 \end{array} \right.$$

Un simple calcul algébrique montre que les vecteurs

$$V_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \alpha + \beta \end{array} \right] \quad \text{et} \quad V_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \alpha - \beta \end{array} \right]$$

sont solution de ce système d'équations. L'inverse de la matrice de changement de base $P = [V_1, V_2]$ est donné par

$$P^{-1} = \frac{1}{2\beta} \left(\begin{array}{cc} (\beta - \alpha) & 1 \\ \beta + \alpha & -1 \end{array} \right)$$

Un calcul élémentaire montre que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cc} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{array} \right)$$

Dans cette base, le système différentiel (2) s'exprime donc sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{du}{dt} & = & \alpha\ u - \beta\ v \\ \frac{dv}{dt} & = & \beta\ u + \alpha\ v \end{array} \right.$$

La solution générale de cette équation est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & e^{\alpha t} \times [(\cos(\beta t)\ u(0) - \sin(\beta t)\ v(0)] \\ v(t) & = & e^{\alpha t} \times [(\sin(\beta t)\ u(0) + \cos(\beta t)\ v(0)] \end{array} \right.$$

– Lorsque $d = 0$, les lignes de phases sont données (dans la base (V_1, V_2)) par des cercles centrées en l'origine. L'origine est ici un point singulier appelé *un centre*.
– Lorsque $d \neq 0$, les lignes de phases sont des spirales logarithmiques s'enroulant autour de l'origine. Ce point singulier est dans ce cas de figure appelé *un foyer*. Lorsque $d > 0$, l'origine est un point d'équilibre répulsif. Inversement, lorsque $d < 0$, l'origine est un point d'équilibre attractif.

$\blacksquare$