TD - L3 MASS

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax+by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx+dy \end{array}\right. \quad \textit{avec} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 > 4\ (ad-bc) \quad (1)$$

1. *On pose* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Vérifier que*

$$(1) \Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$$

   où A désigne une matrice (2×2) que l'on explicitera.

2. *Déterminer les valeurs propres λ_1, et λ_2, de la matrice A en fonction de sa trace* $\mathrm{tr}(A)$, *et de son déterminant* $\mathrm{dét}(A)$.
3. *Soit V_1, et V_2 deux vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, et λ_2. Montrer que (V_1, V_2) forment une base de $\mathbb{R}^2$. Résoudre le système différentiel (1) dans cette base.*
4. *Décrire les portraits de phases, et discuter le comportement des solutions, dans les trois cas suivants :*

$$1)\ \ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad 2)\ \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \qquad 3)\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Exercice 2 *Résoudre et analyser la stabilité des équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{rrcl} 1) & x'' + 5x' + x & = & 0 \\ 2) & x'' + 5x' + 4x & = & 0 \\ 3) & x'' + 4x' + 2x & = & 0 \end{array}$$

Exercice 3 *Résoudre et étudier la stabilité des équations différentielles suivantes*

$$x'' = d\ x' + c\ x \quad \text{avec} \quad (c \wedge d) > 0$$

Exercice 4 *Étudier la stabilité de l'origine pour les équations différentielles dans le plan suivantes*

$$1) \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x \\ \frac{dy}{dt} & = & y \end{array}\right. \quad 2) \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & x-y \\ \frac{dy}{dt} & = & -2x \end{array}\right. \quad 3) \left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x+y \\ \frac{dy}{dt} & = & -y \end{array}\right.$$

Exercice 5 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax+by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx+dy \end{array} \right. \quad \textit{avec} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 = 4\ (ad-bc) \qquad (2)$$

1. *On pose* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Vérifier que* (2) $\Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$, *où* A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera. Vérifier que la matrice* A *a une seule* λ, *et déterminer sa valeur en fonction des paramètres* a, b, c, d.
2. *On note* $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *un vecteur propre associé à la valeur propre* λ, *et l'on considère le vecteur* $W = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$. *Montrer que* (V, W) *forment une base orthogonale de* $\mathbb{R}^2$, *et vérifier que l'on a*
$$(A - \lambda I)W = (b-c)\ V$$
3. *On suppose que* $b = c$. *Montrer que l'on a nécessairement* $a = d$. *Résoudre, et analyser la stabilité et les portraits de phases du système (2) dans la base* (V, W).
4. *On suppose que* $b \neq c$. *Montrer que l'on a nécessairement*
$$\forall n \geq 2 \qquad (A - \lambda I)^n = 0$$
Résoudre, et analyser la stabilité et les portraits de phases du système (2) dans la base (V, W).

Exercice 6 *On considère le système différentiel du second ordre défini par l'équation suivante*

$$x'' + \frac{d^2}{4}\ x = d\ x' \quad \textit{avec} \quad d \neq 0 \qquad (3)$$

1. *Montrer que ce système peut être reformulé en un système différentiel du premier ordre dans le plan, et donner sa forme.*
2. *Résoudre ce système dans une base appropriée.*
3. *Déterminer son portrait de phases, et analyser la stabilité du système en fonction du signe du paramètre* d.

Exercice 7 *On considère l'équation différentielle dans le plan*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax+by \\ \frac{dy}{dt} & = & cx+dy \end{array} \right. \quad \textit{avec} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad (a+d)^2 < 4\ (ad-bc) \qquad (4)$$

1. *On pose* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Vérifier que* (4) $\Longleftrightarrow \frac{dX}{dt} = A\ X$, *où* A *désigne une matrice* (2×2) *que l'on explicitera.*

2. *Vérifier que A n'admet aucune valeur propre réelle, sinon deux valeurs propres complexes conjuguées*

$$\lambda_1 = \alpha + i\ \beta \quad \textit{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\ \beta \quad \text{avec} \quad \beta > 0$$

   Expliciter les valeurs des parties réelles et imaginaires (α, β) en fonction de la trace $\mathrm{tr}(A)$, *et du déterminant* $\mathrm{dét}(A)$.

3. *Soit $(V_1 - iV_2)$, et $(V_1 + iV_2)$ deux vecteurs non nuls du plan complexifié $\mathbb{C}^2$, vecteurs propres du prolongement de A à $\mathbb{C}^2$, et associés aux valeurs propres λ_1, et λ_2 :*

$$A(V_1 - iV_2) = \lambda_1\ (V_1 - iV_2) \quad \big(\text{et} \quad A(V_1 + iV_2) = \overline{\lambda_1}\ (V_1 + iV_2)\big)$$

   Montrer que (V_1, V_2) forment une base de $\mathbb{R}^2$ déterminée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} AV_1 & = & \alpha\ V_1 + \beta\ V_2 \\ AV_2 & = & -\beta\ V_1 + \alpha\ V_2 \end{array} \right.$$

   Déterminer la forme du système différentiel (4) dans cette base.

4. *On note $z(t)$ la trajectoire dans le plan complexe associée à la solution $(Re(z(t)), Im(z(t)))$ de (4) dans la base (V_1, V_2). Vérifier que l'on a*

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1\ z$$

   et déterminer la solution générale de cette équation.

5. *Vérifier qu'en coordonnées polaires $z(t) = r(t)\ e^{i\theta(t)}$, la solution générale est donnée par*

$$r(t) = e^{\alpha t} r(0) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta(0) + \beta t$$

   Discuter les points d'équilibre, la périodicité, et la stabilité du système dans les trois cas suivants :

$$1)\ \ \alpha < 0 \qquad 2)\ \ \alpha = 0 \qquad 3)\ \alpha < 0$$

Exercice 8 *Résoudre et analyser la stabilité des équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x'' + b^2\ x & = & 0\ , \quad \text{avec} \quad b \neq 0 \\ 2) & x'' + x & = & d\ x'\ , \quad \text{avec} \quad d^2 < 4 \end{array}$$