Travaux dirigés L3 MASS

Exercice 1 *On considère une équation différentielle de type gradient*

$$x' = -V'(x) \tag{1}$$

où $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction C^1. Vérifier graphiquement que les solutions de ce système convergent vers un minima (local ou global) de V, lorsque t tends vers l'infini.

Solution :
Pour vérifier cette propriété, il suffit de tracer le champ des tangentes associé à cette équation. ■

Exercice 2 (Lemme de Gronwall) *Soit α, β et v, des fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $\beta \geq 0$. On suppose que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

1. *On note $w : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$w(t) = \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

   Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad w'(t) \leq \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t)\ w(t)$$

2. *On note $B : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction primitive de β définie par*

$$B(t) = \int_a^t \beta(s)\ ds$$

   Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad (e^{-B} w)'(t) \leq e^{-B(t)} \beta(t)\ \alpha(t)$$

   En déduire que

$$\forall t \in [a, b] \qquad w(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}$$

3. *Démontrer l'inégalité de Gronwall*

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ \beta(s) \alpha(s) ds$$

Solution :

1. Par définition de w, et compte tenu du fait que $\beta \geq 0$, nous avons pour tous les $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} w'(t) = \beta(t)\ v(t) &\leq \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t) \times \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds \\ &= \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t)\ w(t) \end{aligned}$$

   Autrement dit, nous avons

$$\forall t \in [a,b] \qquad w'(t) \leq \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t)\ w(t)$$

2. Par définition de B, on obtient sur l'intervalle $[a,b]$

$$\begin{aligned} (e^{-B}w)' &= -B'\ (e^{-B}w) + e^{-B}\ w' \\ &= -\beta\ (e^{-B}w) + e^{-B}\ w' \\ &\leq -\beta\ (e^{-B}w) + e^{-B}\ [\beta\ \alpha + \beta\ w] = e^{-B}\ \beta\ \alpha \end{aligned}$$

   En intégrant cette inégalité entre a et t, on en conclut que

$$\begin{aligned} e^{-B}(t)w(t) - e^{-B}(a)w(a) &= e^{-B}(t)w(t) \\ &\leq \int_a^t e^{-B(s)}\ \beta(s)\ \alpha(s)\ ds \\ &= \int_a^t e^{\int_s^a \beta(r)dr}\ \beta(s)\ \alpha(s)\ ds \end{aligned}$$

   Par conséquent, on obtient l'inégalité

$$\left(e^B(t) = e^{\int_a^t \beta(r)dr} \Longrightarrow \right) \qquad w(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r)dr}\ \beta(s)\ \alpha(s)\ ds$$

3. Par définition de w, on déduit de ce qui précède l'inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds \\ &= \alpha(t) + w(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r)dr}\ \beta(s)\alpha(s)ds \end{aligned}$$

■

Exercice 3 *On considère un système différentiel d'ordre 2*

$$x'' = f(x) \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction localement Lipschitzienne.

1. *Montrer que les solutions constantes sont données par $x(t) = x_0 \in f^{-1}(\{0\})$, et vérifier que l'équation (2) peut s'exprimer sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 dans le plan euclidien. Montrer qu'il existe localement une unique solution x telle que $x(t_0) = x_0$, et $x'(t_0) = x'_0$, où (x_0, x'_0) désignent un couple de réel fixés.*
2. *Soit F une fonction primitive de f $(= F')$. Vérifier que sur tout intervalle de temps où x' ne s'annulle pas, nous avons*

$$(2) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} H(x(t), x'(t)) = 0$$

avec la fonction d'énergie $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\ y^2 - F(x)$$

Vérifier que l'équation (2) est équivalente au système Hamiltonien

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \quad (\text{avec} \quad y = \frac{dx}{dt}) \end{cases}$$

3. *On considère une solution x de l'équation (2), telle que $x(t_0) = x_0$, et $x'(t_0) = x'_0$, et évoluant dans une ligne d'énergie*

$$H(x(t), x'(t)) = H(x_0, x'_0) =_{\text{déf.}} h \in \mathbb{R}$$

   (a) *Vérifier que ces solutions sont telles que*

$$\begin{aligned} 0 \leq [x'(t)]^2 = F_h(x(t)) \quad &=_{\text{déf.}} \quad (x'_0)^2 + 2\ [F(x(t)) - F(x_0)] \\ &= \quad [x'_0]^2 + 2 \int_{x_0}^{x(t)} f(u)\ du \end{aligned}$$

   (b) *En déduire que x satisfait la propriété suivante*

$$x'(t) = \begin{cases} \sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \leq 0 \end{cases}$$

4. *On considére une solution x de l'équation (2), telle que $x(t_0) = x_0$, et $x'(t_0) = x'_0 > 0$.*

   (a) *On suppose que la fonction $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un zéro $x_h \geq x_0$, sans d'autres zéro sur l'intervalle $[x_0, x_h^1]$, et tel que $f(x_h) = 0$. Dans cette situation, vérifier que l'on a les équivalences suivantes au voisinage du point x_h :*

$$f(x) = \mathrm{O}(x - x_h) \quad \text{et} \quad F_h(x) = \mathrm{O}\left((x - x_h)^2\right)$$

   En déduire que la trajectoire $x(t)$ croît asymptotiquement de $x(t_0) = x_0$ à x_h lorsque t croît de t_0 à $+\infty$.

(b) *On suppose que la fonction $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un zéro $x_h \geq x_0$, sans d'autres zéro sur l'intervalle $[x_0, x_h^1]$, et tel que $f(x_h) \neq 0$. Dans cette situation, vérifier que l'on a l'équivalence suivante au voisinage du point x_h :*

$$F_h(x) \simeq f(x_h)\ (x - x_h)$$

En déduire que la trajectoire $x(t)$ croît de $x(t_0) = x_0$ à $x(t_h) = x_h$ lorsque t croît de

$$t_h = t_0 + \int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

(c) *On suppose que la fonction $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet deux zéro simples $x_h^1 \leq x_0 \leq x_h^2$, sans d'autres zéro sur l'intervalle $[x_h^1, x_h^2]$, et tels que $f(x_h^1)$, et $f(x_h^2) \neq 0$. Dans cette situation, vérifier que la trajectoire $x(t)$ est périodique, et oscille entre ces deux valeurs x_h^1, et x_h^2, avec la période*

$$T = 2 \int_{x_h^1}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

Solution :

1. Les solutions constantes sont clairement données par

$$x(t) = x_0 \quad \text{avec} \quad x'(t) = 0 \quad \text{et} \quad x''(t) = 0 = f(x_0)$$

L'équation (2) peut s'exprimer sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 dans le plan euclidien. La méthode consiste à poser $x' = y$, de sorte à avoir

$$(2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =_{\text{déf.}} \begin{pmatrix} y \\ f(x) \end{pmatrix}$$

L'existence locale d'une unique solution (x, y) telle que $x(t_0) = x_0$, et $y(t_0) = x'(t_0) = x_0'$, résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. D'après ce théorème il suffit de s'assurer que la fonction $\mathcal{F}$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour vérifier cette propriété, on se donne un pavé $([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \subset \mathbb{R}^2$. La fonction f étant localement Lipschitz, nous avons

$$\forall x_1, x_2 \in [a_1, b_1] \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

pour une constante k qui dépend de l'intervalle $[a_1, b_1]$. On en déduit que la fonction $\mathcal{F}$ est localement Lipschitz avec

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \mathcal{F}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2} \\ &\leq \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + k^2\ (x_1 - x_2)^2} \\ &\leq (1 \vee k)\ \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} \\ &= (1 \vee k) \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

pour tout $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$.

2. Sur tout intervalle de temps où x' ne s'annulle pas, nous avons clairement l'équivalence suivante

$$(2) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} H(x(t), x'(t)) = x'(t)\,[x''(t) - f(x(t))] = 0$$

Par définition de H, nous avons

$$(2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f(x) \end{array} \right.$$

3. (a) Par définition de H, nous avons

$$H(x(t), x'(t)) = H(x_0, x'_0)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\ [x'(t)]^2 - F(x(t)) = \tfrac{1}{2}\ [x'(t_0)]^2 - F(x(t_0))$$

$$\begin{array}{lll} \Leftrightarrow [x'(t)]^2 = F_h(x(t)) & = & [x'_0]^2 + 2\ [F(x(t)) - F(x_0)] \\ & = & [x'_0]^2 + 2\ \int_{x_0}^{x(t)}\ f(u)\ du \end{array}$$

   (b) De la question précédente, on en déduit clairement que

$$x'(t) = \left\{ \begin{array}{rl} \sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \leq 0 \end{array} \right.$$

4. D'après nos hypothèses, la solution examinée est telle que $x(t_0) = x_0$, et $x'(t_0) = x'_0 > 0$. Par conséquent, au voisinage du point t_0, nous avons

$$x'(t) = \sqrt{F_h(x(t))}\ (> 0) \Rightarrow \frac{x'(t)}{\sqrt{F_h(x(t))}} = 1$$

Par conséquent, on obtient au voisinage du point t_0, la formule implicite

$$(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{\sqrt{F_h(x(s))}}\ ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

Cette formule exprime le fait que la trajectoire considérée croît de x_0 à $x(t)$, lorsque le temps croît de t_0 à t.

   (a) En développant les fonctions f, et F_h au voisinage du point x_h, nous avons :

$$f(x_h) = 0 = F_h(x_h) = F'_h(x_h)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(x_h) + \mathrm{O}(x - x_h) = \mathrm{O}(x - x_h) \\ F_h(x) & = & F_h(x_h) + F'_h(x_h)(x - x_h) + \mathrm{O}\left((x - x_h)^2\right) \\ & = & \mathrm{O}\left((x - x_h)^2\right) \end{array}$$

Ces équivalences permettent de montrer que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$ représentant le temps que met la trajectoire pour passer de x_0 à x_h est divergente

$$\int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} = +\infty$$

Par conséquent, la trajectoire croît asymptotiquement de $x(t_0) = x_0$ à x_h lorsque t croît de t_0 à $+\infty$.

(b) Supposons que la fonction $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette un zéro $x_h \geq x_0$, sans d'autres zéro sur l'intervalle $[x_0, x_h^1]$, et tel que $f(x_h) \neq 0$. Dans cette situation, au voisinage du point x_h, nous avons

$$F_h(x) \simeq F_h(x_h) + F_h'(x_h)\ (x - x_h) = 2f(x_h)\ (x - x_h)$$

On peut noter que pour tout x dans voisinage du point x_h, avec $x \leq x_h$, nous avons

$$0 \leq F_h(x) \simeq 2f(x_h)\ \underbrace{(x - x_h)}_{\text{négatif}} \Longrightarrow f(x_h) < 0$$

Cette remarque souligne le fait que la trajectoire change de sens après son passage au point x_h.

D'après ce qui précède, on en conclut que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$, représentant le temps que met la trajectoire pour passer de x_0 à x_h, est convergente

$$\int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} < \infty$$

Par conséquent, la trajectoire $x(t)$ croît de $x(t_0) = x_0$ à $x(t_h) = x_h$ lorsque t croît de t_0 à

$$t_h = t_0 + \int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

(c) Supposons que la fonction $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette deux zéro simples $x_h^1 \leq x_0 \leq x_h^2$, sans d'autres zéro sur l'intervalle $[x_h^1, x_h^2]$, et tels que $f(x_h^1)$, et $f(x_h^2) \neq 0$. Dans cette situation, la trajectoire croît de $x(t_0) = x_0$ à $x(t_h^2) = x_h^2$ lorsque t croît de t_0 à

$$t_h^2 = t_0 + \int_{x_0}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

A cet instant, le mouvement change de sens

$$x''(t_h^2) = f(x_h^2) < 0 \Rightarrow x'(t_h^2 + 0) < 0$$

et la trajectoire décroît

$$x'(t) = -\sqrt{F_h(x(t))}$$

de $x(t_h^2) = x_h^2$ à $x(t_h^1) = x_h^1$ lorsque t croît de t_h^2 à

$$t_h^1 = t_h^2 + \int_{t_h^2}^{t_h^1} \frac{-x'(s)}{\sqrt{F_h(x(s))}}\, ds = t_h^2 + \int_{x_h^1}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

On peut noter que pour tout x dans voisinage du point x_h^1, avec $x \geq x_h^1$, nous avons

$$0 \leq F_h(x) \simeq f(x_h^1)\ \underbrace{(x - x_h)}_{\text{positif}} \Longrightarrow f(x_h^1) > 0$$

Cette remarque montre que la trajectoire change à nouveau de sens après son passage au point x_h^1

$$x''(t_h^1) = f(x_h^1) > 0 \Rightarrow x'(t_h^1 + 0) > 0$$

La trajectoire croît alors à nouveau

$$x'(t) = +\sqrt{F_h(x(t))}$$

de $x(t_h^1) = x_h^1$ à $x(t_0) = x_0$ lorsque t croît de t_h^1 à

$$t_0' = t_h^1 + \int_{t_h^1}^{t_0'} \frac{+x'(s)}{\sqrt{F_h(x(s))}}\, ds = t_h^1 + \int_{x_h^1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

Le temps T mis par la trajectoire pour retourner en x_0 est donné par la formule

$$\begin{aligned}
T &= t_0' - t_0 \\
&= (t_h^2 - t_0) + (t_h^1 - t_h^2) + (t_0' - t_h^1) \\
&= \int_{x_0}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} + \int_{x_h^1}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} + \int_{x_h^1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} \\
&= 2\int_{x_h^1}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}
\end{aligned}$$

En itérant ce procédé, on construit une solution période oscillant entre ces deux valeurs x_h^1, et x_h^2, avec la période T.

■

Exercice 4 *On considère le mouvement rectiligne d'un point soumis à l'attraction newtonnienne, et lancé à l'instant initial t_0 au point $x(t_0) = x_0 > 0$, avec une vistesse $x'(t_0) = x'_0 \neq 0$*

$$x'' = -a^2/x^2 \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{3}$$

1. *Montrer que (3) est un système Hamiltonnien avec la fonction H définie pour tout $x > 0$, et $y \in \mathbb{R}$ par*

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\, y^2 - \frac{a^2}{x}$$

2. *Vérifier que localement autour de t_0, les solutions de (3) sont telles que*

$$[x'(t)]^2 = [x'(t_0)]^2 + 2a^2 \left[\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t_0)}\right]$$

3. *Discuter le comportement des trajectoires, en fonction des quantités (x_0, x'_0).*

Solution :

1. Sur tout intervalle de temps où x', et x ne s'annullent pas, nous avons

$$\frac{d}{dt} H(x(t), x'(t)) = x'(t) \left[x''(t) + \frac{a^2}{x(t)^2}\right] = 0$$

2. Par définition de H, nous avons

$$H(x(t), x'(t)) = H(x_0, x'_0)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\, [x'(t)]^2 - \tfrac{a^2}{x(t)} = \tfrac{1}{2}\, [x'(t_0)]^2 - \tfrac{a^2}{x(t_0)}$$

$$\Leftrightarrow [x'(t)]^2 = F_h(x(t)) =_{\text{déf.}} [x'_0]^2 + 2\, a^2 \left[\tfrac{1}{x(t)} - \tfrac{1}{x_0}\right]$$

3. Le comportement des trajectoires du système dépend de la nature des zéro de la fonction

$$F_h(x) = \left[[x'_0]^2 - \frac{2a^2}{x_0}\right] + \frac{2\, a^2}{x}$$

   Trois cas se présentent :

   (a) $x'_0 \geq a\sqrt{2/x_0} (> 0)$: Dans ce cas, la fonction F_h est strictement positive, et l'on a

$$x'(t_0) = x'_0 > 0 \Rightarrow \forall t \geq t_0 \qquad x'(t) = \sqrt{F_h(x(t))} > 0$$

   Par conséquent, la trajectoire $x(t)$ croît de x_0 à $+\infty$, lorsque t croît de t_0 à $+\infty$.

(b) $0 < x'_0 < a\sqrt{2/x_0}$: Dans ce cas, la fonction F_h s'annule au point x_1 déterminé par

$$0 < x_1 = \frac{x_0}{1 - x_0[x'_0]^2/(2a^2)} < x_0$$

Dans cette situation, la trajectoire $x(t)$ croît de x_0 à x_1, lorsque t croît de t_0 à

$$t_1 = t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(s)\;ds}{\sqrt{F_h(x(s))}} = t_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

On notera que pour tout x dans voisinage du point x_1, avec $x \leq x_1$, nous avons

$$0 \leq F_h(x) \simeq 2f(x_1)\ \underbrace{(x - x_1)}_{\text{négatif}} \Longrightarrow f(x_1) < 0$$

Cette remarque montre que la trajectoire change de sens après son passage au point x_1

$$x''(t_1) = f(x_1) < 0 \Rightarrow x'(t_1 + 0) < 0$$

et l'on a locallement autour de t_1

$$\forall t \geq t_1 \qquad x'(t) = -\sqrt{F_h(x(t))} < 0$$

Par conséquent, la trajectoire $x(t)$ décroît de x_1 à 0, lorsque t croît de t_1 à

$$t'_0 = t_1 + \int_{x_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

On notera que l'on a à l'impact du sol

$$x'(t'_0) = -\lim_{t \to t'_0} \sqrt{F_h(x(t))} = -\lim_{x \to 0,\ x > 0} \sqrt{F_h(x)} = -\infty$$

$\blacksquare$

Exercice 5 (Équation du pendule linéarisée) *On considère le système différentiel du second ordre*

$$x'' = -a^2 \; x \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{4}$$

1. *Déterminer les solutions constantes de (4), et montrer que cette équation différentielle est un système conservatif, plus précisement dont l'intégrale première est donnée par la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + a^2 \; \frac{x^2}{2}$$

   Montrer qu'en posant $x' = a \; y$, le couple (x, y) est solution d'un système dynamique que l'on écrira.
2. *Vérifier que localement autour de t_0, les solutions de (4) sont telles que*

$$[x'(t)]^2 = [x'(t_0)]^2 + a^2 \; \left[x(t_0)^2 - x(t)^2\right]$$

3. *Discuter le comportement des trajectoires, en fonction des conditions initiales $(x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, x'_0) \in (0, \infty)$. Montrer que les solutions non constantes sont périodiques de période $T = (2\pi)/a$.*
4. *Vérifier que les solutions de (4) sont données par intégration directe par la formule*

$$x(t) = x(t_0) \; \cos\left(a[t - t_0]\right) + \frac{x'(t_0)}{a} \; \sin\left(a[t - t_0]\right)$$

Solution :

1. L'unique solution constante est clairement donnée par

$$x(t) = 0 \quad \text{avec} \quad x'(t) = 0 \quad \text{et} \quad x''(t) = 0 = -a^2 \; x(t)$$

   Sur tout intervalle de temps où x', et x ne s'annullent pas, nous avons

$$\frac{d}{dt} H(x(t), x'(t)) = x'(t) \left[x''(t) + \frac{a^2}{x(t)}\right] = 0$$

   Si on pose $x' = a \; y$, alors on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & a \; y \\ y' & = & x''/a = -a \; x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & a \\ -a & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$$

   le couple (y, v) est solution d'un système dynamique que l'on écrira.
2. Par définition de H, nous avons

$$\begin{aligned} & H(x(t), x'(t)) = H(x_0, x'_0) \\ & \Leftrightarrow \tfrac{[x'(t)]^2}{2} + a^2 \; \tfrac{x^2(t)}{2} = \tfrac{[x'(t_0)]^2}{2} + a^2 \; \tfrac{x^2(t_0)}{2} \\ & \Leftrightarrow [x'(t)]^2 = F_h(x(t)) =_{\text{déf.}} [x'_0]^2 + a^2 \; \left[x_0^2 - x(t)^2\right] \; (\geq 0) \end{aligned}$$

3. Le comportement des trajectoires du système dépend de la nature des zéro de la fonction

$$F_h(x) = [x'_0]^2 + a^2 \ \left[x_0^2 - x^2\right] = a^2 \times \left(\left([x'_0/a]^2 + x_0^2\right) - x^2\right)$$

Les zéro x_1^+, et x_1^-, de F_h sont clairement donnés par

$$x_1^- = -x_1^+ < x_0 < x_1^+ = \sqrt{[x'_0/a]^2 + x_0^2}$$

Comme d'habitude, on notera que l'on a

$$x'(t) = \begin{cases} \sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \leq 0 \end{cases}$$

D'après nos hypothèses, nous avons

$$x'(t_0) = x'_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_1^- < 0 < x_0 < x_1^+$$

On en conclut que la trajectoire $x(t)$ croît de x_0 à x_1^+, lorsque t croît de t_0 à

$$t_1^+ = t_0 + \int_{t_0}^{t_1^+} \frac{x'(s)\ ds}{\sqrt{F_h(x(s))}} = t_0 + \int_{x_0}^{x_1^+} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

Ensuite trajectoire change de sens. Plus précisément, pour tout x dans voisinage du point x_1, avec $x \leq x_1^+$, nous avons

$$0 \leq F_h(x) \simeq 2f(x_1^+) \ \underbrace{(x - x_1^+)}_{\text{négatif}} \Longrightarrow f(x_1^+) < 0$$

et l'on a locallement autour de t_1^+

$$\forall t \geq t_1^+ \qquad x'(t) = -\sqrt{F_h(x(t))} < 0$$

Par conséquent, la trajectoire $x(t)$ décroît du point x_1^+ au point x_1^-, lorsque t croît de t_1^+ à

$$t_1^- = t_1^+ - \int_{x_1^+}^{x_1^-} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} = t_1^+ + \int_{x_1^-}^{x_1^+} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

A cet instant, la trajectoire croît alors à nouveau

$$x'(t) = +\sqrt{F_h(x(t))}$$

de $x(t_1^-) = x_1^-$ à x_0, lorsque t croît de t_1^- à

$$t'_0 = t_1^- + \int_{x_1^-}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

Le temps T mis par la trajectoire pour retourner en x_0 est donné par la formule

$$\begin{aligned} T &= t_0' - t_0 \\ &= (t_1^+ - t_0) + (t_1^- - t_1^+) + (t_0' - t_1^-) \\ &= \int_{x_0}^{x_1^+} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} + \int_{x_1^-}^{x_1^+} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} + \int_{x_1^-}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} \\ &= 2\int_{x_1^-}^{x_1^+} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} \end{aligned}$$

En itérant ce procédé, on construit une solution période oscillant entre ces deux valeurs x_1^-, et x_1^+, avec la période T.
Pour calculer T on procède comme suit. On note tout d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} F_h(x) &= a^2 \times \left(\left([x_0'/a]^2 + x_0^2\right) - x^2\right) \\ &= a^2 \times \left([x_1^+]^2 - x^2\right) = \left(\frac{a}{x_1^+}\right)^2 \times \left(1 - \left(\frac{x}{x_1^+}\right)^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$T = 2\int_{-x_1^+}^{x_1^+} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}} = \frac{2}{a} \int_{-x_1^+}^{x_1^+} \frac{x_1^+ \times dx}{\sqrt{1 - \left(x/x_1^+\right)^2}}$$

Un simple changement de variable

$$u = x/x_1^+ \Rightarrow dx = x_1^+ \times du$$

permet de montrer que

$$T = \frac{2}{a} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Il reste à poser

$$u = \sin\theta \in [-1, 1] \quad \text{avec} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow du = \sin\theta \; d\theta = \sqrt{1-u^2} \; d\theta$$

pour conclure que

$$T = \frac{2}{a} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{a}$$

4. Il suffit de noter que l'on a

$$x'(t) = -a \; x(t_0) \; \sin\left(a[t-t_0]\right) + a \; \frac{x'(t_0)}{a} \; \cos\left(a[t-t_0]\right)$$

et

$$x''(t) = -a^2\ x(t_0)\ \cos\left(a[t-t_0]\right) + -a^2\ \frac{x'(t_0)}{a}\ \sin\left(a[t-t_0]\right) = -a^2 \times x(t)$$

On retrouve bien entendu le fait que les trajectoires sont périodiques de période $T = 2\pi/a$

$$x(t_0 + 2\pi/a) = x(t_0)\ \cos\left(2\pi\right) + \frac{x'(t_0)}{a}\ \sin\left(2\pi\right) = x(t_0)$$

$\blacksquare$

Exercice 6 *Le mouvement d'un pendule simple (sans frottements) de masse m suspendu à un fil de longueur l, est déterminé par l'équation*

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\ \sin\theta \tag{5}$$

Dans la formule précédente, nous avons noté g la constante d'accélélartion de la pesanteur. Le paramètre θ représente l'angle orienté que fait le pendule avec la verticale. Cet angle étant 0, lorsque le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessous du point d'attache. L'angle vaut $+/-\pi$ si le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessus du point d'attache.

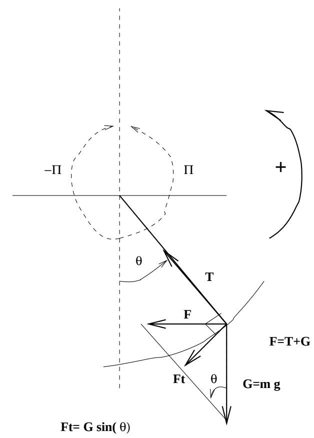

Fig. 1 –

1. *Déterminer les équations du mouvement du couple $(\theta(t), \omega(t))$, avec la variable $\omega(t) = \theta'(t)$, et décrire les points d'équilibre du système.*
2. *Montrer que (5) est un système Hamiltonnien avec la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par*
$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\ ml^2\omega^2 + mlg(1-\cos\theta)$$
Vérifier que la fonction d'énergie H est positive, et déterminer ses minima.
3. *Déterminer le portrait des phases dans $\mathbb{R}^2$ du pendule. Autrement dit, déterminer les courbes d'équation $H(\theta, \omega) = h$, où h désigne une énergie fixée dans $\mathbb{R}_+$. On distinguera les lignes d'énergie*
$$1)\quad h = 2mgl \qquad 2)\quad h > 2mgl \quad \text{et} \quad 3)\quad 0 < h \leq 2mgl$$
Décrire qualitqtivement dans chaque situation les mouvement du pendule.

Solution :

1. Les équations du mouvement du couple $(\theta(t), \omega(t))$, avec la variable $\omega(t) = \theta'$, sont données par
$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\ \sin\theta \end{cases}$$
Les points d'équilibre sont les couples de points (θ, ω) pour lesquels on a
$$\left(\frac{d\theta}{dt} =\right) \omega = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\omega}{dt} =\right) - \frac{g}{l}\ \sin\theta = 0$$
Il existe donc deux type de points d'équilibre :
   (a) Les points $P = (\theta, \omega)$ de coordonnées
$$\theta = 0 \text{ modulo}(2\pi) \quad \text{et} \quad \omega = 0$$
   (b) Les points $Q = (\theta, \omega)$ de coordonnées
$$\theta = \pi \text{ modulo}(2\pi) \quad \text{et} \quad \omega = 0$$

2. Par définition de H, nous avons
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\theta(t), \theta'(t)) &= ml^2\theta'(t)\ \theta''(t) + mlg\ \theta'(t) \sin(\theta(t)) \\ &= ml^2\theta'(t)\ \left[\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t))\right] = 0 \end{aligned}$$
La fonction d'énergie H est clairement positive, et les points d'energie nulle sont les points $P = (\theta, \omega)$ de coordonnées
$$\theta = 0 \text{ modulo}(2\pi) \quad \text{et} \quad \omega = 0$$
Le pendule initialisé à la verticale avec un angle $\theta(t_0) = 0$ modulo(2π), et "lancé" sans vitesse $\omega(t_0) = 0$ reste bien entendu au même endroit.

3. (a) Lignes d'énergie $H(\theta, \omega) = h = 2mgl$: Ces lignes sont caractérisées par les équations
$$\begin{aligned} H(\theta, \omega) = 2mgl &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ ml^2\omega^2 + mlg(1 - \cos\theta) = 2mgl \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ ml^2\omega^2 = mlg(1 + \cos\theta) \\ &\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{2g}{l}(1 + \cos\theta) \\ &\Leftrightarrow \omega = +/- \sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos\theta)} \end{aligned}$$
Ces lignes d'énergie sont décrites dans la figure suivante

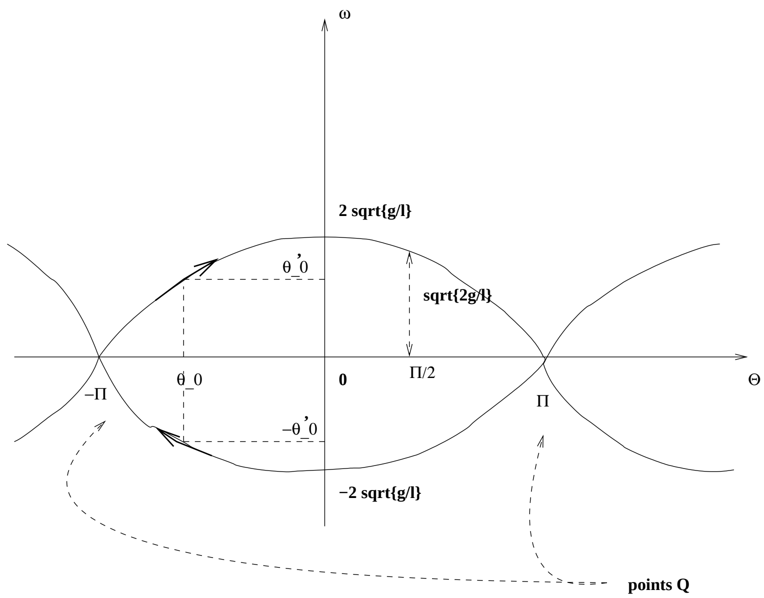

FIG. 2 – Lignes d'énergie $H(\theta, \omega) = 2mgl$

Dans cette situation, les solutions $\theta(t)$, initialisées en

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

avec

$$H(\theta_0, \theta'_0) = 2mgl \Leftrightarrow [\theta'_0]^2 = \frac{2g}{l}(1 + \cos\theta_0)$$

vérifient la propriété suivante

$$[\theta'(t)]^2 = F_h(\theta(t)) =_{\text{déf.}} \tfrac{2g}{l}(1 + \cos\theta(t)) \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\theta'(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos\theta(t))} & \text{si} \quad \theta'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos\theta(t))} & \text{si} \quad \theta'(t) \leq 0 \end{cases}$$

La fonction F_h s'annule aux points $\theta = \pi$ modulo(2π), et ces points sont tels que $\sin\theta = 0$. Par conséquent, une trajectoire initialisé sur l'un des points

$$Q = (\theta_0 = \pi \text{ modulo}(2\pi), \theta'_0 = 0)$$

reste en ce point. Tout autre solution avec $-\pi < \theta_0 < \pi$ fait en temps infini un seul tour partant de $t = -\infty$ de sa position d'équilibre instable $-\pi$, en passant par θ_0 au temps t_0, et en revenant à sa position d'équilibre instable $+\pi$ pour $t = \infty$. Le mouvement à lieu dans le sens trigonométrique, lorsque $\theta'_0 > 0$; et dans le sens inverse du sens trigonométrique, lorsque $\theta'_0 < 0$.

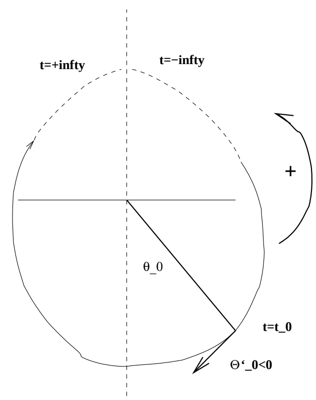

FIG. 3 –

(b) Lignes d'énergie $H(\theta, \omega) = h > 2mgl$: Ces lignes sont caractérisées par les équations

$$\begin{aligned}
H(\theta,\omega) = h \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\, ml^2\omega^2 + mlg(1-\cos\theta) = h \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\, ml^2\omega^2 = \underbrace{(h-2mgl)}_{>0} + mlg\,\underbrace{(1+\cos\theta)}_{\geq 0} \\
&\Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{2}{ml^2}\,[(h-2mgl) + mlg(1+\cos\theta)] \\
&\Leftrightarrow \quad \omega = +/- \sqrt{\frac{2}{ml^2}\,[(h-2mgl) + mlg(1+\cos\theta)]}
\end{aligned}$$

On notera que l'on a

$$\omega^2 = \frac{2}{ml^2}\,[(h-2mgl) + mlg(1+\cos\theta)] > \frac{2g}{l}(1+\cos\theta)$$

Ces lignes d'énergie sont décrites dans la figure suivante

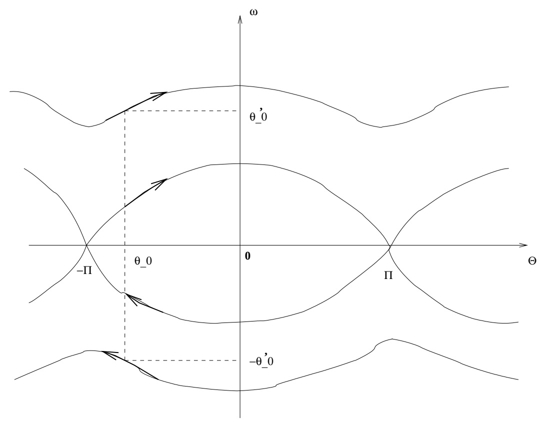

Fig. 4 –

Dans cette situation, les solutions $\theta(t)$, initialisées en

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

avec

$$H(\theta_0, \theta'_0) = \frac{1}{2}\, ml^2[\theta'_0]^2 + mlg(1 - \cos\theta_0) = h > 2mgl$$

vérifient la propriété suivante

$$[\theta'(t)]^2 = F_h(\theta(t)) =_{\text{déf.}} \tfrac{2}{ml^2}\left[(h - 2mgl) + mlg(1 + \cos\theta(t))\right] > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\theta'(t) = \begin{cases} \sqrt{F_h(\theta(t))} & \text{si} \quad \theta'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{F_h(\theta(t))} & \text{si} \quad \theta'(t) \leq 0 \end{cases}$$

Les vitesses de ces trajectoires étant strictement positives à chaque instant, l'angle $\theta(t)$ ne peut varier que de façon monotone. Les solutions $\theta(t)$ évoluent donc de manière croissante, lorsque $\theta'_0 > 0$; et de manière décroissante, lorsque $\theta'_0 < 0$. Lors de ses mouvements le pendule tourne un nombre illimité de fois. Le mouvement à lieu dans le sens trigonométrique, lorsque $\theta'_0 > 0$; et dans le sens inverse du sens trigonométrique, lorsque $\theta'_0 < 0$.

(c) Lignes d'énergie $0 < H(\theta, \omega) = h \leq 2mgl$: Ces lignes sont caractérisées par les équations

$$
\begin{aligned}
H(\theta,\omega) = h \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\, ml^2\omega^2 + mlg(1-\cos\theta) = h \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\, ml^2\omega^2 = mlg\left[\frac{h}{mgl} - (1-\cos\theta)\right] \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\, ml^2\omega^2 = mlg\left[\cos\theta - \left(1 - \frac{h}{mgl}\right)\right] \\
& \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g}{l}\left[\cos\theta - \left(1 - \frac{h}{mgl}\right)\right] \\
& \Leftrightarrow \quad \omega = +/- \sqrt{\frac{2g}{l}\left[\cos\theta - \left(1 - \frac{h}{mgl}\right)\right]}
\end{aligned}
$$

On notera que l'on a

$$0 < h \leq 2mgl \Leftrightarrow 0 < h/(mgl) \leq 2 \Leftrightarrow -1 < \left(1 - \frac{h}{mgl}\right) < 1$$

On en déduit que ces lignes d'energie sont telles que

$$\omega^2 = F_h(\theta) =_{\text{déf.}} \frac{2g}{l}\left[\cos\theta - \left(1 - \frac{h}{mgl}\right)\right] > 0$$

Ces lignes d'énergie sont décrites dans la figure suivante

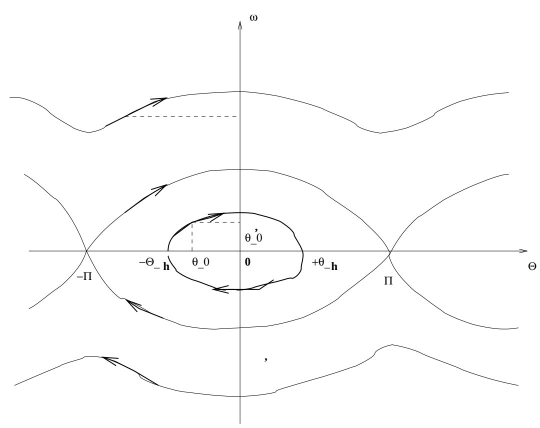

FIG. 5 –

Les zéro θ_h, et $-\theta_h$, de F_h sont clairement donnés par

$$-\pi < -\theta_h < 0 < \theta_h = \arccos\left(1 - \frac{h}{mgl}\right) < \pi \qquad (\text{modulo}(2\pi))$$

On notera dans ce cas que l'on a

$$\sin(-\theta_h) < 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta_h > 0$$

Dans cette situation, les solutions $\theta(t)$, initialisées en

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

avec $H(\theta_0, \theta'_0) = h$, vérifient la propriété suivante

$$\theta'(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2g}{l}\left[\cos\theta - \cos\theta_h\right]} & \text{si} \quad \theta'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{2g}{l}\left[\cos\theta - \cos\theta_h\right]} & \text{si} \quad \theta'(t) \leq 0 \end{cases}$$

Dans cette situation, les trajectoires sont périodiques , et oscillent entre les deux valeurs $-\theta_h$ et θ_h. Le mouvement à lieu dans le sens trigonométrique, lorsque $\theta'_0 > 0$; et dans le sens inverse du sens trigonométrique, lorsque $\theta'_0 < 0$. La période T est donnée par la formule suivante

$$T = 2\int_{-\theta_h}^{\theta_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

■