Travaux dirigés L3 MASS

Exercice 1 *On considère une équation différentielle de type gradient*

$$x' = -V'(x) \tag{1}$$

où $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction C^1. Vérifier graphiquement que les solutions de ce système convergent vers un minima (local ou global) de V, lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 2 (Lemme de Gronwall) *Soit α, β et v, des fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $\beta \geq 0$. On suppose que l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

1. *On note $w : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$w(t) = \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad w'(t) \leq \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t)\ w(t)$$

2. *On note $B : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction primitive de β définie par*

$$B(t) = \int_a^t \beta(s)\ ds$$

Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad (e^{-B} w)'(t) \leq e^{-B(t)} \beta(t)\ \alpha(t)$$

En déduire que

$$\forall t \in [a, b] \qquad w(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ ds$$

3. *Démontrer l'inégalité de Gronwall*

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ \beta(s) \alpha(s) ds$$

Exercice 3 *On considère un système différentiel d'ordre 2*

$$x'' = f(x) \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction localement Lipschitzienne.

1. *Montrer que les solutions constantes sont données par* $x(t) = x_0 \in f^{-1}(\{0\})$, *et vérifier que l'équation (2) peut s'exprimer sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 dans le plan euclidien. Montrer qu'il existe localement une unique solution* x *telle que* $x(t_0) = x_0$, *et* $x'(t_0) = v_0$, *où* (x_0, v_0) *désignent un couple de réel fixés.*
2. *Soit* F *une fonction primitive de* f $(= F')$. *Vérifier que sur tout intervalle de temps où* x' *ne s'annule pas, nous avons*

$$(2) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt} H(x(t), x'(t)) = 0$$

avec la fonction d'énergie $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$H(x, v) = \frac{1}{2}\ v^2 - F(x)$$

Vérifier que l'équation (2) est équivalente au système Hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \quad (\text{avec} \quad y = \frac{dx}{dt}) \end{array} \right.$$

3. *On considère une solution* x *de l'équation (2), telle que* $x(t_0) = x_0$, *et* $x'(t_0) = v_0$, *et évoluant dans une ligne d'énergie*

$$H(x(t), v(t)) = H(x_0, v_0) =_{\text{déf.}} h \in \mathbb{R}$$

   (a) *Vérifier que ces solutions sont telles que*

$$\begin{aligned} 0 \leq [x'(t)]^2 = F_h(x(t)) \quad &=_{\text{déf.}} \quad (v_0)^2 + 2\ [F(x_0) - F(x(t))] \\ &= \quad [v_0]^2 + 2 \int_{x_0}^{x(t)} f(u)\ du \end{aligned}$$

   (b) *En déduire que* x *satisfait la propriété suivante*

$$x'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \geq 0 \\ -\sqrt{F_h(x(t))} & \text{si} \quad x'(t) \leq 0 \end{array} \right.$$

4. *On considére une solution* x *de l'équation (2), telle que* $x(t_0) = x_0$, *et* $x'(t_0) = v_0 > 0$.

   (a) *On suppose que la fonction* $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admet un zéro* $x_h \geq x_0$, *sans d'autres zéro sur l'intervalle* $[x_0, x_h^1]$, *et tel que* $f(x_h) = 0$. *Dans cette situation, vérifier que l'on a les équivalences suivantes au voisinage du point* x_h :

$$f(x) = \mathrm{O}(x - x_h) \quad \text{et} \quad F_h(x) = \mathrm{O}\left((x - x_h)^2\right)$$

   En déduire que la trajectoire $x(t)$ *croît asymptotiquement de* $x(t_0) = x_0$ *à* x_h *lorsque* t *croît de* t_0 *à* $+\infty$.

(b) *On suppose que la fonction* $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admet un zéro* $x_h \geq x_0$*, sans d'autres zéro sur l'intervalle* $[x_0, x_h^1]$*, et tel que* $f(x_h) \neq 0$*. Dans cette situation, vérifier que l'on a l'équivalence suivante au voisinage du point* x_h *:*

$$F_h(x) \simeq f(x_h)\ (x - x_h)$$

En déduire que la trajectoire $x(t)$ *croît de* $x(t_0) = x_0$ *à* $x(t_h) = x_h$ *lorsque* t *croît de*

$$t_h = t_0 + \int_{x_0}^{x_h} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

(c) *On suppose que la fonction* $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admet deux zéro simples* $x_h^1 \leq x_0 \leq x_h^2$*, sans d'autres zéro sur l'intervalle* $[x_h^1, x_h^2]$*, et tels que* $f(x_h^1)$*, et* $f(x_h^2) \neq 0$*. Dans cette situation, vérifier que la trajectoire* $x(t)$ *est périodique, et oscille entre ces deux valeurs* x_h^1*, et* x_h^2*, avec la période*

$$T = 2 \int_{x_h^1}^{x_h^2} \frac{dx}{\sqrt{F_h(x)}}$$

Exercice 4 *On considère le mouvement rectiligne d'un point soumis à l'attraction newtonnienne, et lancé à l'instant initial* t_0 *au point* $x(t_0) = x_0 > 0$*, avec une vistesse* $x'(t_0) = v_0 \neq 0$

$$x'' = -a^2/x^2 \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{3}$$

1. *Montrer que (3) est un système Hamiltonnien avec la fonction* H *définie pour tout* $x > 0$*, et* $v \in \mathbb{R}$ *par*

$$H(x, v) = \frac{1}{2}\ v^2 - \frac{a^2}{x}$$

2. *Vérifier que localement autour de* t_0*, les solutions de (3) sont telles que*

$$[x'(t)]^2 = [x'(t_0)]^2 + 2a^2\ \left[\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t_0)}\right]$$

3. *Discuter le comportement des trajectoires, en fonction des quantités* (x_0, v_0).

Exercice 5 (Équation du pendule linéarisée) *On considère le système différentiel du second ordre*

$$x'' = -a^2\ x \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{4}$$

1. *Déterminer les solutions constantes de (4), et montrer que cette équation différentielle est un système conservatif, plus précisement dont l'intégrale première est donnée par la fonction* H *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + a^2\ \frac{x^2}{2}$$

Montrer qu'en posant $x' = a\ y$*, le couple* (x, y) *est solution d'un système dynamique que l'on écrira.*

2. *Vérifier que localement autour de t_0, les solutions de (4) sont telles que*

$$[x'(t)]^2 = [x'(t_0)]^2 + a^2 \ \left[x(t_0)^2 - x(t)^2\right]$$

3. *Discuter le comportement des trajectoires, en fonction des conditions initiales $(x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) \in (0, \infty)$. Montrer que les solutions non constantes sont périodiques de période $T = (2\pi)/a$.*

4. *Vérifier que les solutions de (4) sont données par intégration directe par la formule*

$$x(t) = x(t_0) \ \cos\left(a[t-t_0]\right) + \frac{x'(t_0)}{a} \ \sin\left(a[t-t_0]\right)$$

Exercice 6 *Le mouvement d'un pendule simple (sans frottements) de masse m suspendu à un fil de longueur l, est déterminé par l'équation*

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \ \sin\theta \tag{5}$$

Dans la formule précédente, nous avons noté g la constante d'accélélartion de la pesanteur. Le paramètre θ représente l'angle orienté que fait le pendule avec la verticale. Cet angle étant 0, lorsque le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessous du point d'attache. L'angle vaut $\pm\pi$ si le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessus du point d'attache.

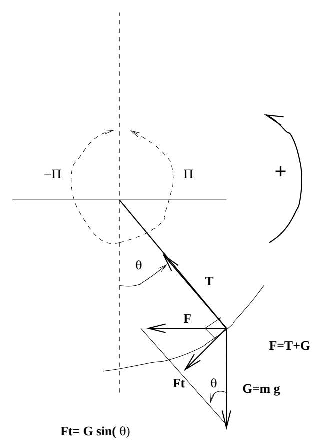

FIG. 1 –

1. *Déterminer les équations du mouvement du couple $(\theta(t), \omega(t))$, avec la variable $\omega(t) = \theta'(t)$, et décrire les points d'équilibre du système.*

2. *Montrer que (5) est un système Hamiltonnien avec la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par*
$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\ ml^2\omega^2 + mlg(1 - \cos\theta)$$
Vérifier que l'Hamiltonien H est positif, et déterminer ses minima.
3. *Déterminer le portrait des phases dans $\mathbb{R}^2$ du pendule. Autrement dit, déterminer les courbes d'équation $H(\theta, \omega) = h$, où h désigne une énergie fixée dans $\mathbb{R}_+$. On distinguera les lignes d'énergie*
$$1) \quad h = 2mgl \qquad 2) \quad h > 2mgl \quad \text{et} \quad 3) \quad 0 < h \leq 2mgl$$
Décrire qualitqtivement dans chaque situation les mouvement du pendule.