Travaux dirigés L3 MASS [Corrections]

Exercice 1 *Tracer le graphe des fonctions suivantes*

$$\begin{array}{rclcrcl} f_1(x) & = & \lambda x & & f_2(x) & = & \lambda x^2 \\ f_3(x) & = & \lambda x(1-\frac{x}{K}) & & f_4(x) & = & \lambda x|x| \\ f_5(x) & = & \lambda x(1-\frac{x}{K})(\frac{x}{L}-1) & \textit{avec} & & & K, L > 0, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}$$

Déterminer les ensembles $f_i^{-1}(\{0\})$ (les points d'équilibre), et estimer les constantes de Lipschitz de chacune de ces fonctions, sur un intervalle $[a,b]$.

Solution :

1. On a clairement $f_1^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. D'autre part, la dérivée de f_1 est donnée par $f_1'(x) = \lambda$. Par conséquent, la fonction f_1 est globalement Lipschitz de paramètre $|\lambda|$. Plus précisément, on a dans cette situation linéaire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f_1(x) - f_1(y)| = |\lambda| \; |x-y|$$

Les graphes de cette fonction, suivant le signe de λ, sont décrits ci-dessous

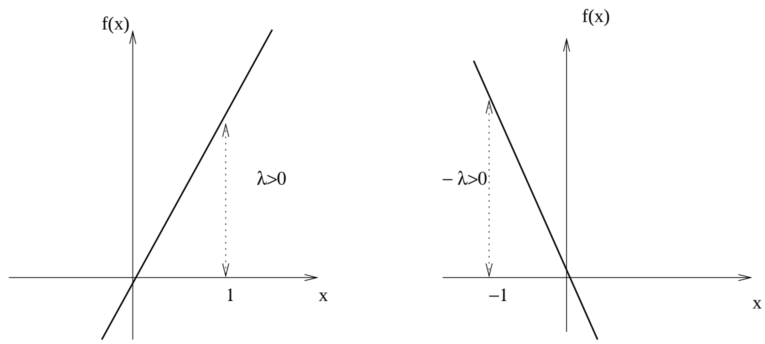


Fig. 1 –

2. On a clairement $f_2^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. D'autre part, la dérivée de f_2 est donnée par $f_2'(x) = 2\lambda\, x$. Par conséquent, la fonction f_2 est localement Lipschitz sur tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}$. On rappelle qu'une partie D de $\mathbb{R}$ est bornée, lorsque qu'il existe un couple de nombres $a \leq b$ tels que $D \subset [a,b]$. Dans cette situation quadratique, nous avons

$$\forall (x,y) \in D^2 (\subset [a,b]^2) \qquad |f_2(x) - f_2(y)| \leq k \; |x-y|$$

avec

$$k = 2\ |\lambda|\ (|a| \vee |b|)$$

Pour vérifier cette assertion, on utilise le fait que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f_2(x) - f_2(y) = \lambda\ (x-y)\ (x+y)$$

et

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad 2a \leq (x+y) \leq 2b \quad (\Rightarrow |x+y| \leq 2(|a| \vee |b|))$$

Les graphes de cette fonction, suivant le signe de λ, sont décrits ci-dessous

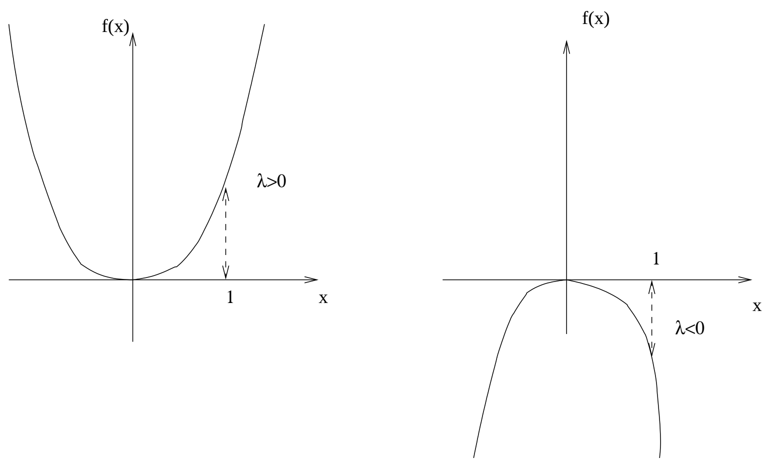


FIG. 2 –

3. On a clairement $f_3^{-1}(\{0\}) = \{0, K\}$. D'autre part, la dérivée de f_3 est donnée par

$$f_3'(x) = \lambda \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \lambda \frac{x}{K} = \lambda \left(1 - \frac{2x}{K}\right)$$

Lorsque $\lambda > 0$, on vérifie aisément que

$$f_3'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{K}{2}$$

Dans cette situation, la fonction f_3 est donc croissante sur $(-\infty, K/2]$, et décroissante sur $[K/2, +\infty)$. Comme précédemment, on montre que la fonction f_3 est localement Lipschitz sur tout intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Pour vérifier cette assertion, on peut aussi utiliser un développement du premier ordre de la fonction f_3 pour montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists \epsilon \in [0,1] \quad \text{t.q.} \quad f_3(x) - f_3(y) = (x-y)\ f_3'(\epsilon x + (1-\epsilon) y)$$

et

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad \forall \epsilon \in [0,1] \quad |f_3'(\epsilon x + (1-\epsilon)y)| \leq |\lambda| \left(1 + \frac{|a| \vee |b|}{K}\right)$$

On obtient ainsi la propriété de Lipschitz locale cherchée

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \qquad |f_3(x) - f_3(y)| \leq k\ |x-y|$$

avec

$$k = |\lambda| \left(1 + \frac{|a| \vee |b|}{K}\right)$$

Les graphes de cette fonction, suivant le signe de λ, sont décrits ci-dessous

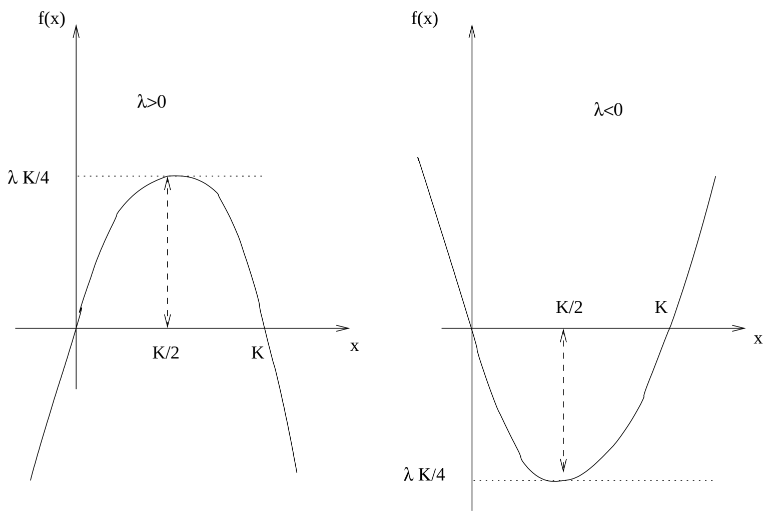


FIG. 3 –

4. On a clairement $f_4^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. D'autre part, la dérivée de f_4 est donnée par

$$\begin{array}{lll} x \geq 0 & \Longrightarrow & f_4(x) = \lambda x^2 \Longrightarrow f_4'(x) = 2\lambda x \\ x \leq 0 & \Longrightarrow & f_4(x) = -\lambda x^2 \Longrightarrow f_4'(x) = -2\lambda x \end{array}$$

On peut à nouveau vérifier que la fonction f_4 est localement Lipschitz sur tout intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Plus précisement, en remarquant que l'on a

$$f_4(x) - f_4(y) = \lambda(x|x| - y|y|) = \lambda[(x-y)|x| + y(|x| - |y|)]$$

on obtient

$$|f_4(x) - f_4(y)| \leq |\lambda|\ [|x-y| \times |x| + |y| \times ||x| - |y||\ ] \leq |\lambda|\ |x-y| \times [|x| + |y|]$$

On en conclut que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad |f_4(x) - f_4(y)| \leq k \ |x-y|$$

avec

$$k = 2|\lambda|(|a| \vee |b|)$$

Les graphes de cette fonction, suivant le signe de λ, sont décrits ci-dessous

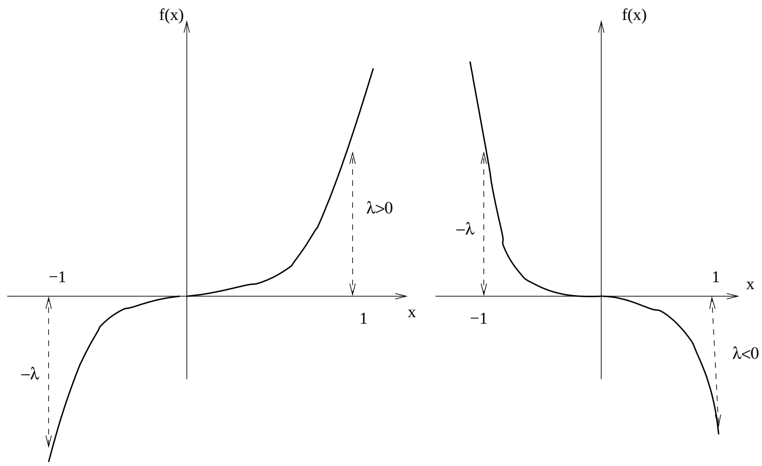


Fig. 4 –

5. On a clairement $f_5^{-1}(\{0\}) = \{0, K, L\}$. D'autre part, la dérivée de f_5 est donnée par

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \lambda\left(1-\frac{x}{K}\right)\left(\frac{x}{L}-1\right) - \lambda\frac{x}{K}\left(\frac{x}{L}-1\right) + \lambda\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{K}\right) \\ &= \lambda\left(-3\frac{x^2}{KL} + 2x\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{L}\right) - 1\right) = -\frac{3\lambda}{KL}\ \left(x^2 - 2x\left(\frac{K+L}{3}\right) + \frac{KL}{3}\right) \end{aligned}$$

Une simple manipulation algèbrique, permet de montrer que

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -\frac{3\lambda}{KL}\left(\left[x - \frac{K+L}{3}\right]^2 - \left[\left(\frac{K+L}{3}\right)^2 - \frac{KL}{3}\right]\right) \\ &= -\frac{3\lambda}{KL}\left(\left[x - \frac{K+L}{3}\right]^2 - \left[\left(\frac{K}{3}\right)^2 + \left(\frac{L}{3}\right)^2 + \frac{KL}{3}\right]\right) \end{aligned}$$

On a donc $(f_5')^{-1}(\{0\}) = \{x_1, x_2\}$ avec

$$0 \ \leq \ x_1 =_{\text{déf.}} \frac{K+L}{3} - \sqrt{\left(\frac{K+L}{3}\right)^2 - \frac{KL}{3}} \ \stackrel{(1)}{\leq} \ (K \wedge L)$$

et

$$(K \wedge L) \overset{(2)}{\leq} x_2 =_{\text{déf.}} \frac{K+L}{3} + \sqrt{\left(\frac{K+L}{3}\right)^2 - \frac{KL}{3}} \overset{(3)}{\leq} (K \vee L)$$

Les inégalités (1), (2), et (3), peuvent se déduire des propriétés de monotonie de f_5 décrites dans la figure suivante, dans le cas ou $K > L$, et $\lambda > 0$.

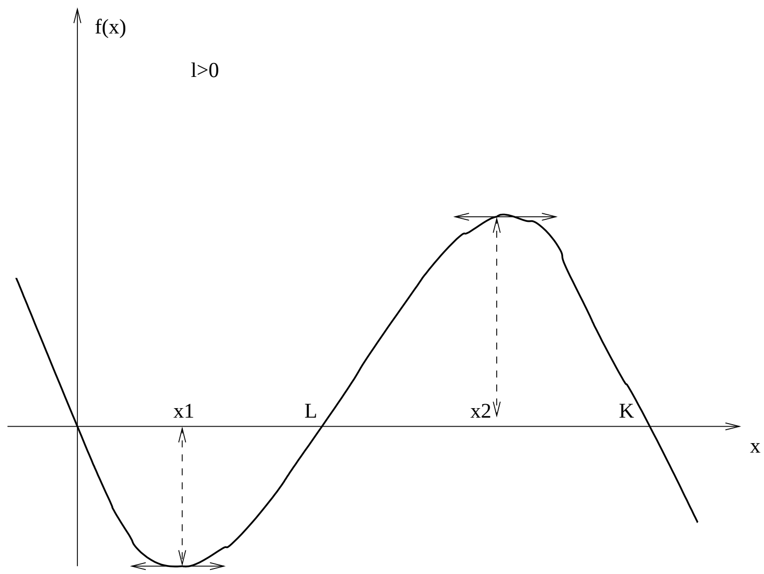


Fig. 5 –

On peut aussi vérifier les inégalités (1), (2), et (3), de façon algébrique. Les paramétres K et L jouant un rôle symétrique, nous supposerons que l'on a $K > L$.

Dans cette situation, pour vérifier la premiére inégalité, on distingue les deux cas $K \leq (2L)$, et $K \geq (2L)$.

– Lorsque $K \leq (2L)$, nous avons

$$x_1 = \tfrac{K+L}{3} - \sqrt{\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3}} \leq L$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3}} \geq \tfrac{K+L}{3} - L = \tfrac{K-2L}{3} \leq 0$$

La dernière assertion étant immédiatement vérifiée, on en conclut que $x_1 \leq L$.

– Lorsque $K \geq (2L)$, nous avons

$$\begin{aligned} x_1 \leq L &\iff \sqrt{\left(\frac{K+L}{3}\right)^2 - \frac{KL}{3}} \geq \frac{K+L}{3} - L \\ &\iff \left(\frac{K+L}{3}\right)^2 - \frac{KL}{3} \geq \left(\frac{K+L}{3} - L\right)^2 \\ &\iff 2L \times \frac{K+L}{3} \geq \frac{KL}{3} + L^2 \Leftrightarrow \frac{LK}{3} \geq \frac{L^2}{3} \end{aligned}$$

La dernière assertion étant clairement vérifiée lorsque $K \geq L$, on en conclut que $x_1 \leq L$.

Pour vérifier la seconde inégalité, on distingue à nouveaux les deux cas $K \leq (2L)$, et $K \geq (2L)$.

– Lorsque $K \leq (2L)$, nous avons

$$x_2 = \tfrac{K+L}{3} + \sqrt{\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3}} \geq L$$

$$\iff$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3}} \geq L - \tfrac{K+L}{3} = \tfrac{2L-K}{3} \leq 0$$

La dernière assertion étant immédiatement vérifiée, on en conclut que $x_2 \geq L$.

– Lorsque $K \geq (2L)$, nous avons

$$\begin{aligned} x_2 \leq L &\iff \left(\frac{K+L}{3}\right)^2 - \frac{KL}{3} \geq \left(L - \frac{K+L}{3}\right)^2 \\ &\iff -\frac{KL}{3} \geq L^2 - 2L \times \frac{K+L}{3} \\ &\iff 2L \times \frac{K+L}{3} \geq L^2 + \frac{KL}{3} \Leftrightarrow \frac{LK}{3} \geq \frac{L^2}{3} \end{aligned}$$

La dernière assertion étant clairement vérifiée lorsque $K \geq L$, on en conclut que $x_2 \geq L$.

Pour vérifier la dernière inégalité, on observe simplement que

$$x_2 = \tfrac{K+L}{3} + \sqrt{\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3}} \leq K$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3}} \leq K - \tfrac{K+L}{3} = \tfrac{2K-L}{3} \left(\geq \tfrac{K-L}{3} \geq 0\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\tfrac{K+L}{3}\right)^2 - \tfrac{KL}{3} \leq \left(K - \tfrac{K+L}{3}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\tfrac{KL}{3} \leq K^2 - 2K \times \tfrac{K+L}{3} \Leftrightarrow 2K \times \tfrac{K+L}{3} \leq K^2 + \tfrac{KL}{3} \Leftrightarrow \tfrac{KL}{3} \leq \tfrac{K^2}{3}$$

La dernière assertion étant immédiatement vérifiée, on en conclut que $x_2 \leq K$.

Lorsque $\lambda > 0$, et $K = L$, on notera que

$$f_5^{-1}(\{0\}) = \{0, K\} \quad \text{et} \quad 0 \leq x_1 = \frac{K}{3} \leq x_2 = K$$

Cette situation est décrite dans le graphique suivant

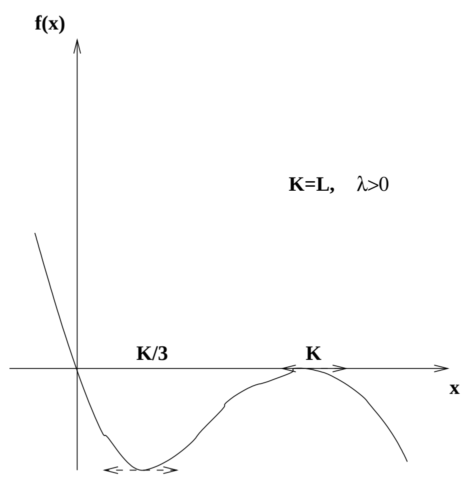


FIG. 6 –

L'étude du cas où $\lambda < 0$, se déduit des précédentes, par une simple symétrie. ∎

Exercice 2 (Analyse qualitative) *Cet exercice souligne le lien entre l'étude élémentaire des fonctions numériques faites au lycée (et dans l'exercice 1), et l'analyse qualitative de systèmes différentiels.*

On se donne un ouvert $(I \times U)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, et une fonction continue* $f : (I \times U) \rightarrow \mathbb{R}$*. On considère le problème de Cauchy associé au couple* (U, f)*, et déterminé par l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \qquad (t, x(t)) \in (I \times U) \tag{1}$$

Résoudre ce problème revient à trouver une fonction différentiable $x : I \rightarrow \mathbb{R}$*, définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*, et telle que*

$$\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in (I \times U) \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$$

On se limitera par la suite au cas autonome : $f(t, x(t)) = f(x(t))$*.*

1. *Déterminer l'équation de la droite* Δ_M*, tangente à la courbe*

$$t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

en un point $M = (t_0, x_0) \in (I \times U)$*.*

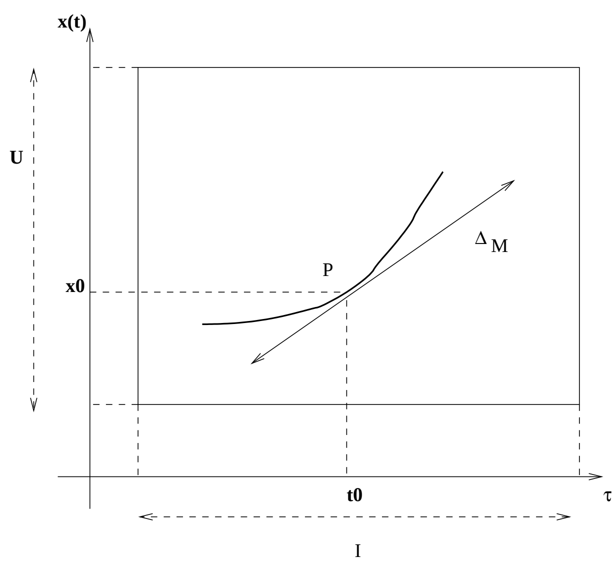


Fig. 7 –

L'application $P \in (I \times U) \mapsto \Delta_P$ *est appelée* <u>*le champ des tangentes*</u> *à la trajectoire, associée à l'équation (1).*

2. *Déterminer graphiquement les champs des tangentes correspondant aux équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_i(x(t)) \quad i \in \{1, \ldots, 5\}$$

pour les fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq 5}$ *étudiées dans l'exercice 1.*
Dans chaque situation :
   - *On explicitera les ensembles des points* M *où la droite à une pente respectivement nulle, positive, et négative.*
   - *On tracera quelques courbes intégrales* $x : I \to \mathbb{R}$*, associées à ces champs de tangentes.*
3. *On considère l'équation différentielle (1) associée à la fonction* f *décrite par le graphe suivant :*

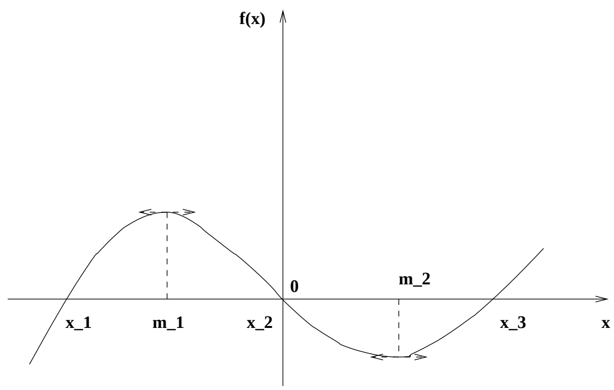


Fig. 8 –

Décrire le champ des tangentes associé, et derterminer les limites lorsque $t \uparrow \infty$ *des solutions de (1), dans les cas suivants*

$$\begin{array}{llllll} 1) & x(0) = x_1 & 2) & x_1 < x(0) < x_2 & & \\ 3) & x(0) = x_2 & 4) & x_2 < x(0) < x_3 & 5) & x(0) = x_3 \end{array}$$

Solution :

1. La droite Δ_P, tangente à la courbe

$$t \in I \to x(t) \in \mathbb{R}$$

en un point $P = (t_0, x_0) \in U$, a pour équation

$$(x - x_0) = f(x_0)\ (t - t_0)$$

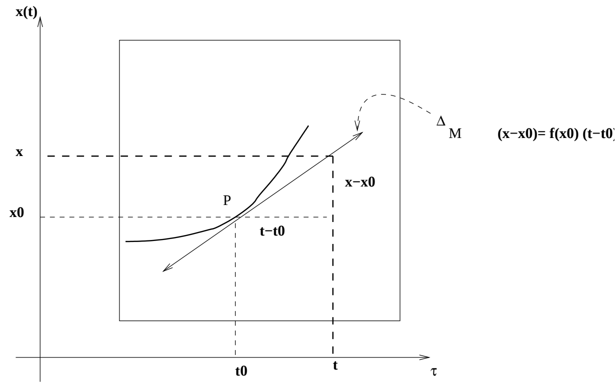


FIG. 9 –

2. (a) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_1\left(x(t)\right) = \lambda x(t)$$

avec $\lambda > 0$, est décrit dans la figure suivante :

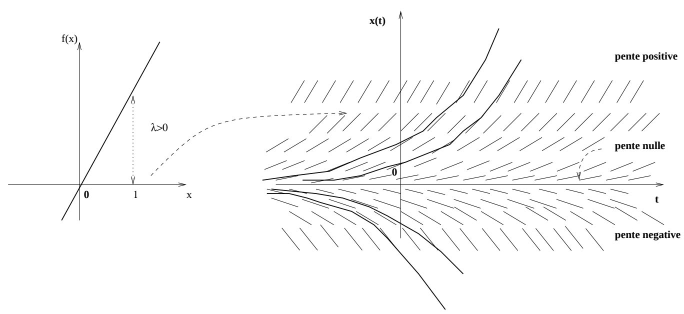


FIG. 10 –

Lorsque $\lambda < 0$, le champ des tangentes est donné par

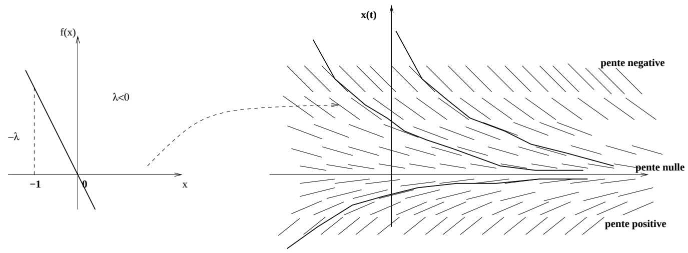


Fig. 11 –

(b) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_2\left(x(t)\right) = \lambda x(t)^2$$

avec $\lambda > 0$, est décrit dans la figure suivante :

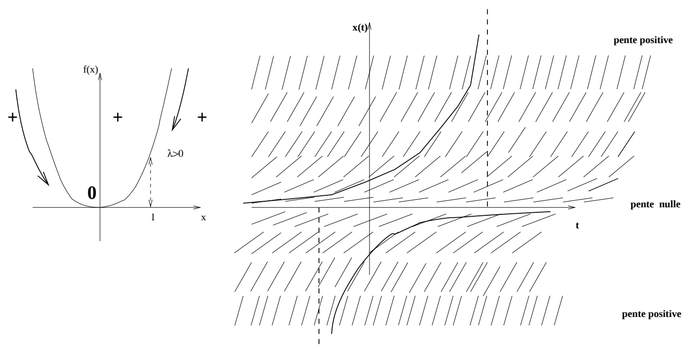


Fig. 12 –

La figure suivante représente le champ des tangentes lorsque $\lambda < 0$

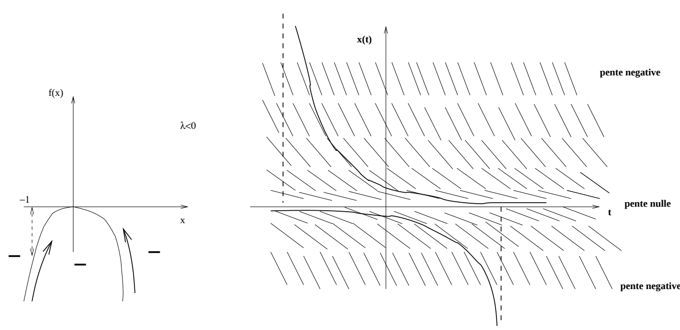


Fig. 13 –

(c) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_3\left(x(t)\right) = \lambda x(t)\ \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

avec $\lambda > 0$, est décrit graphiquement dans la figure ci-dessous :

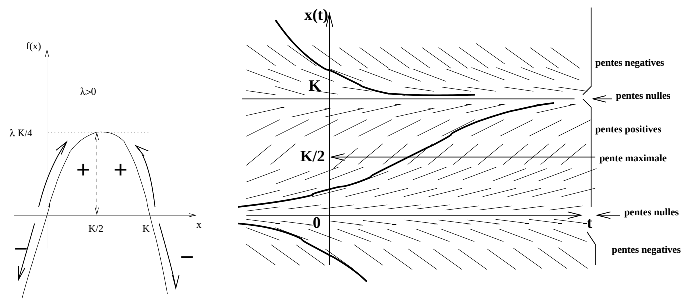


FIG. 14 –

La figure suivante représente le champ des tangentes lorsque $\lambda < 0$

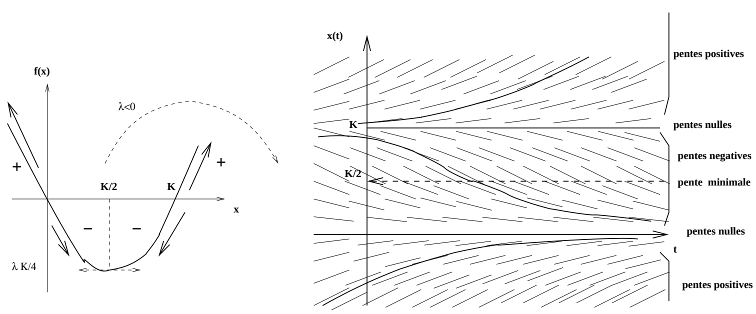


FIG. 15 –

(d) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_4\left(x(t)\right) = \lambda x(t)\ |x(t)|$$

avec $\lambda > 0$, est décrit graphiquement dans la figure ci-dessous :

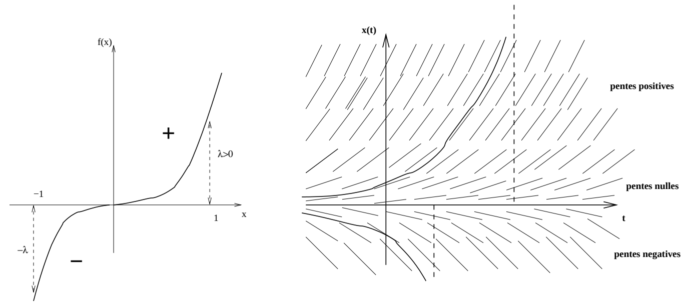


FIG. 16 –

La figure suivante représente le champ des tangentes lorsque $\lambda < 0$

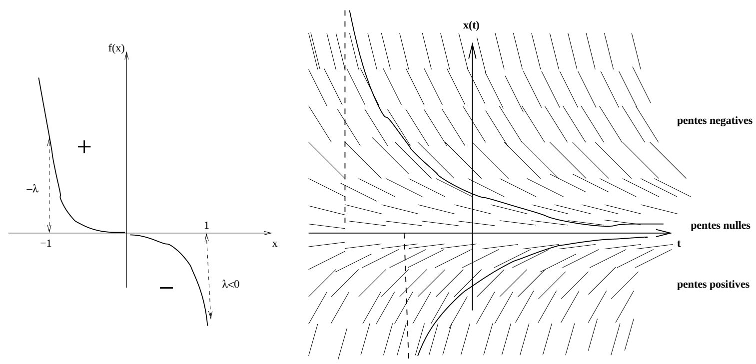


FIG. 17 –

(e) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_5\left(x(t)\right) = \lambda x(t)\ (1 - \frac{x(t)}{K})(\frac{x(t)}{L} - 1)$$

avec $\lambda > 0$, et $K > L$ est décrit graphiquement dans la figure ci-dessous :

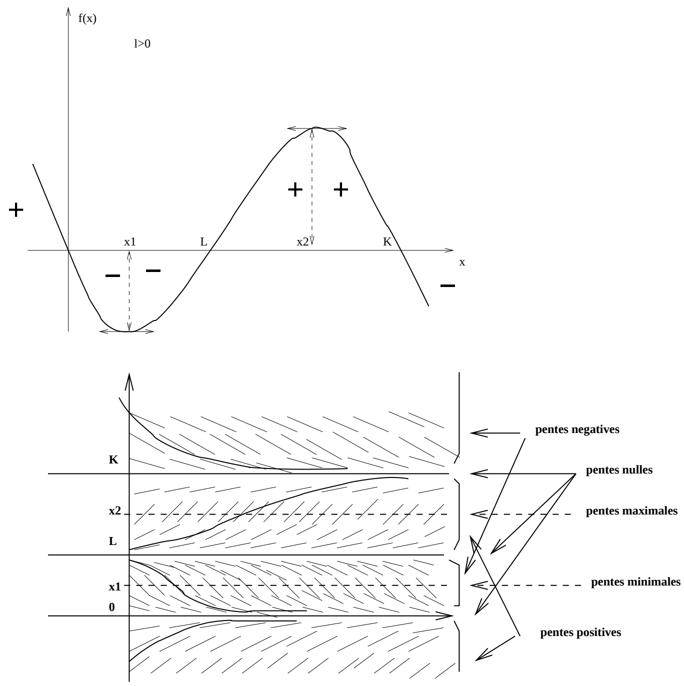


Fig. 18 –

Le diagramme correspondant au cas $\lambda < 0$ se déduit du précédent, par une simple symétrie. La situation où $\lambda > 0$, et $K = L$, est décrite ci-dessous.

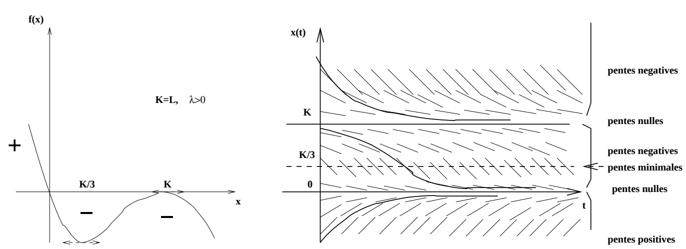
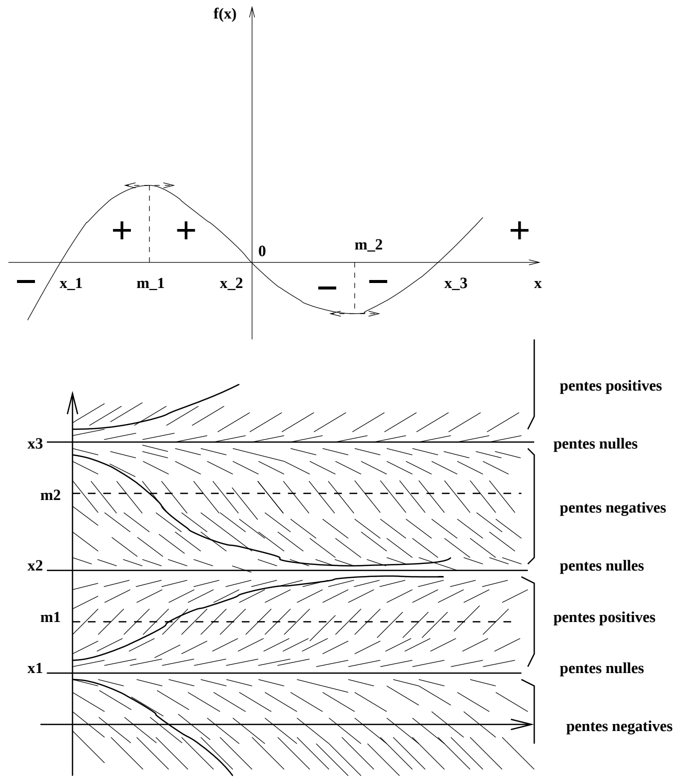


Fig. 19 –

3. Le diagramme suivant résume le comportement en temps long des courbes intégrales du systèmes en fonction de leurs initialisations.



f(x)
+
+
+
0
m_2
−
x_1
m_1
x_2
−
−
x_3
x
pentes positives
x3
pentes nulles
m2
pentes negatives
x2
pentes nulles
m1
pentes positives
x1
pentes nulles
pentes negatives

Fig. 20 –

■

Exercice 3 (Explosion en temps fini) *On considère l'équation de Riccati*

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 \tag{2}$$

1. *Montrer que pour toute solution $t \mapsto x(t)$ non identiquement nulle, nous avons*
$$(2) \Longleftrightarrow d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -dt$$
En déduire que la courbe intégrale de (2), passant par $x(0) > 0$ au temps $t = 0$, est donnée pour tout $t < 1/x(0)$, par la formule
$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$
2. *Décrire, et tracer les graphes des solutions de (2), passant respectivement par un point $x(0) > 0$, et par un point $x(0) < 0$.*
3. *Déterminer la solution de (2) passant par un point donné $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ au temps t_0. Comparer les résultats obtenus avec l'analyse qualitative de ce modèle étudiée dans l'exercice 2.*
4. *Analyser les équations différentielles suivantes*

$$\begin{array}{lrcl}
1) & \frac{dx}{dt}(t) & = & x^2(t) - 4 \\
2) & \frac{dx}{dt}(t) & = & -\frac{1}{2x(t)} \quad \textit{avec} \quad x(t_0) \neq 0, \quad t \geq t_0 \\
3) & \frac{dx}{dt}(t) & = & x^3(t) \\
4) & \frac{dx}{dt}(t) & = & x^3(t) - x(t)
\end{array}$$

Solution :

1. Nous avons vu dans l'exercice 1 que la fonction $f(x) = x^2$ est continue, localement Lipschitz, et l'on a $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à cette équation différentielle. D'après ce théorème, si une fonction $t \mapsto x(t)$ s'annule pour une valeur de t, elle est nécessairement identiquement nulle. Par conséquent, une solution non identiquement nulle, ne s'annule pour aucune valeur de t.

   Pour toute solution non identiquement nulle, nous avons donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -\frac{1}{x(t)^2} \times \frac{dx}{dt}(t) = -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -dt
\end{aligned}$$

Par conséquent, la courbe intégrale de (2), passant par $x(0) > 0$ au temps $t = 0$, est donnée pour tout $t < 1/x(0)$, par la formule

$$\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)} = -t + 0 \iff \frac{1}{x(t)} = -t + \frac{1}{x(0)} = \frac{1 - x(0)t}{x(0)}$$
$$\iff x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$

2. Les graphes des solutions de (2), passant respectivement par un point $x(0) > 0$, et par un point $x(0) < 0$, sont décrits dans la figure suivante :

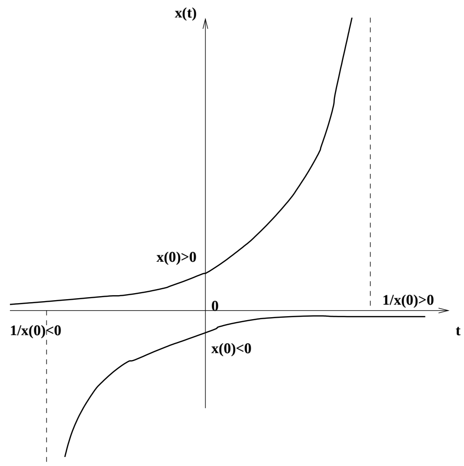


Fig. 21 –

3. D'après la première question, nous avons pour tout $x(t_0) = x_0 \neq 0$

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = (t - t_0) \iff -\frac{x(t_0)}{x(t)} = \frac{x(t_0)(t - t_0) - 1}{x(t_0)}$$
$$\iff x(t) = \frac{x(t_0)}{1 - x(t_0)(t - t_0)}$$

Le dénominateur s'annule pour la valeur $t = t_0 + \frac{1}{x(t_0)}$. La solution cherchée est donc définie soit sur $\left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x(t_0)}\right)$, lorsque $x(t_0) > 0$; soit sur $\left(t_0 + \frac{1}{x(t_0)}, +\infty\right)$, lorsque $x(t_0) < 0$.

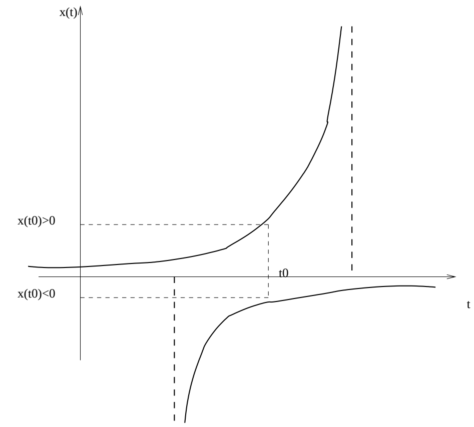


Fig. 22 –

L'analyse qualitative de ce modèle développée dans l'exercice 2 est basée sur l'étude des champs de tangentes associés à l'équation (2)

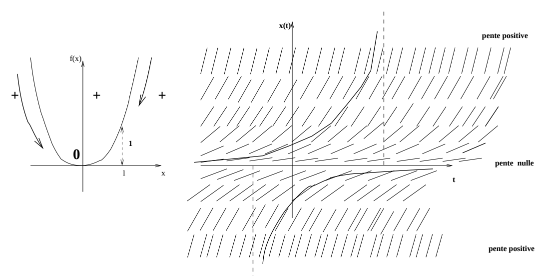


Fig. 23 –

On retrouve bien entendu le même comportement asymptotique des courbes intégrales, avec une explosion en temps fini. Les résultats que nous venons d'obtenir sont plus précis, et ils montrent que l'explosion à lieu au temps $t_e = 1/x(0)$.

4. (a) D'un point de vue qualitatif, les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) = x^2(t) - 4$$

sont décrites dans le diagramme suivant

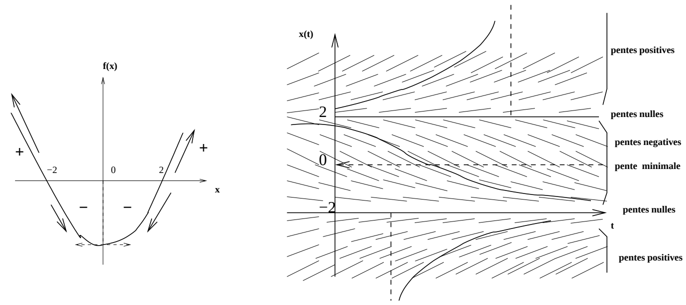


FIG. 24 –

La fonction $f(x) = x^2 - 4$ est continue, localement Lipschitz, et l'on a $f^{-1}(\{0\}) = \{-2, 2\}$. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à cette équation différentielle. D'après ce théorème, si une fonction $t \mapsto x(t)$ prend une valeur $c \in \{-2, 2\}$ pour une valeur de t, elle est nécessairement identiquement égale à c. Par conséquent, une solution non identiquement égale à c, ne prend la valeur c, pour aucune valeur de t. Pour décrire plus précisement ces solutions, on utilise la décomposition des fractions

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-4} &= \frac{1}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2}\end{aligned}$$

valable pour tous les $x \notin \{-2, 2\}$. Nous avons donc, pour toute solution non identiquement égale à 2, ou à -2

$$4\ \frac{dx}{x^2-4} = \frac{dx}{x-2} - \frac{dx}{x+2} = d(4t)$$

Par conséquent, on obtient

$$d \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = d(4t)$$

Par une simple intégration on arrive à la formule suivante

$$\log\left(\frac{x(t)-2}{x(t)+2}\right) - \log\left(\frac{x(t_0)-2}{x(t_0)+2}\right) = 4(t-t_0)$$

En prenant l'exponentielle des deux membres, ceci entraine que

$$(x(t)-2)\,(x(t_0)+2) = (x(t_0)-2)\,(x(t)+2) \times e^{4(t-t_0)}$$

n en conclut que

$$x(t)\left[(x(t_0)+2)-(x(t_0)-2)\ \ e^{4(t-t_0)}\right]$$

$$=2\left[(x(t_0)+2)+(x(t_0)-2)\ \ e^{4(t-t_0)}\right]$$

La solution cherchée est donc donnée par

$$x(t)=2\times\frac{(x(t_0)+2)+(x(t_0)-2)\ \ e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0)+2)-(x(t_0)-2)\ \ e^{4(t-t_0)}}$$

On remarque que le dénominateur s'annule au point t_f déterminé par l'équation suivante

$$\frac{x(t_0)+2}{x(t_0)-2}=e^{4(t_f-t_0)}\Leftrightarrow t_f=t_0+\frac{1}{4}\log\left(\frac{x(t_0)+2}{x(t_0)-2}\right)$$

On notera aussi que

$$\lim_{x_0\to 2^+}\left(t_0+\frac{1}{4}\log\left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)\right)=+\infty$$

et

$$\lim_{x_0\to -2^-}\left(t_0+\frac{1}{4}\log\left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)\right)=-\infty$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} x(t_0)<-2 \quad &\Longrightarrow \quad t_f=t_0+\frac{1}{4}\log\left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)<t_0 \\ x(t_0)>2 \quad &\Longrightarrow \quad t_f=t_0+\frac{1}{4}\log\left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)>t_0 \end{aligned}$$

Dans le cas où $x(t_0)\in(-2,2)$, les quantités $(x(t_0)+2)$ et $(x(t_0)-2)$ sont de signes contraires, et on a

$$\begin{aligned} x(t_0)\in(-2,2) \quad &\Longrightarrow \quad 0<x(t_0)+2<4 \quad \text{et} \quad -4<x(t_0)-2<0 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x(t_0)+2}{x(t_0)-2}<0 \\ &\Longrightarrow \quad (x(t_0)+2)\left(1-\frac{x(t_0)-2}{x(t_0)+2}\ e^{4(t-t_0)}\right)>0 \end{aligned}$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} x(t_0)=-2 \quad &\Longrightarrow \quad (x(t_0)+2)-(x(t_0)-2)\ \ e^{4(t-t_0)}=4e^{4(t-t_0)} \\ x(t_0)=2 \quad &\Longrightarrow \quad (x(t_0)+2)-(x(t_0)-2)\ \ e^{4(t-t_0)}=4 \end{aligned}$$

Par conséquent, si $x(t_0) \in [-2, 2]$, les solutions sont définies sur tout $\mathbb{R}$ avec pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \begin{cases} 2 \times \frac{(x(t_0)+2)+(x(t_0)-2)\ e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0)+2)-(x(t_0)-2)\ e^{4(t-t_0)}} & \text{si} \quad |x(t_0)| \neq 2 \\ -2 & \text{si} \quad x(t_0) = -2 \\ 2 & \text{si} \quad x(t_0) = 2 \end{cases}$$

Lorsque $x(t_0) < -2$, les solutions ne sont définies que sur l'intervalle $(t_f, +\infty)$

$$t \in (t_f, +\infty) \mapsto 2 \times \frac{(x(t_0)+2) + (x(t_0)-2)\ e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0)+2) - (x(t_0)-2)\ e^{4(t-t_0)}}$$

Enfin si $x(t_0) > 2$, les solutions ne sont définies que sur l'intervalle $(-\infty, t_f)$

$$t \in (-\infty, t_f) \mapsto 2 \times \frac{(x(t_0)+2) + (x(t_0)-2)\ e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0)+2) - (x(t_0)-2)\ e^{4(t-t_0)}}$$

(b) D'un point de vue qualitatif les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) = -\frac{1}{2x(t)}$$

sont décrites dans le diagramme suivant

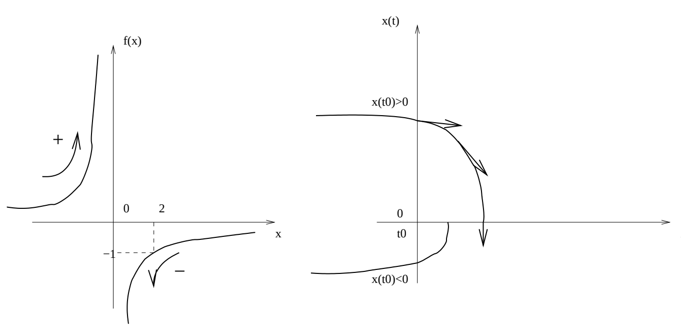


Fig. 25 –

Pour décrire plus précisement ces solutions, on note que pour toute condition initiale $x(t_0) \neq 0$ nous avons donc les équivalences suivantes :

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\frac{1}{2x(t)} \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}x^2(t) = -1$$

Par conséquent, on obtient

$$x^2(t) = x^2(t_0) - (t - t_0) \geq 0 \Longleftrightarrow t < t_f = x^2(t_0) + t_0$$

On en conclut que les solutions de l'équation sont définies pour tous les temps $t \in [-\infty, t_f]$, avec

$$t \in [-\infty, t_f] \quad \mapsto \quad x(t) = \begin{cases} \sqrt{x^2(t_0) - (t - t_0)} & \text{si} \quad x(t_0) > 0 \\ -\sqrt{x^2(t_0) - (t - t_0)} & \text{si} \quad x(t_0) < 0 \end{cases}$$

(c) D'un point de vue qualitatif les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) = x(t)^3$$

sont décrites dans le diagramme suivant

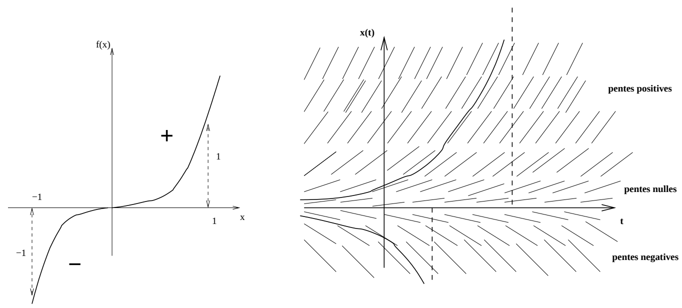


FIG. 26 –

La fonction $f(x) = x^3$ est continue, localement Lipschitz, et l'on a $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique à nouveau à cette équation différentielle. D'après ce théorème, si une fonction $t \mapsto x(t)$ s'annule pour une valeur de t, elle est nécessairement identiquement nulle. Par conséquent, une solution non identiquement nulle, ne s'annule pour aucune valeur de t. Pour décrire plus précisement ces solutions, on note que pour toute condition initiale $x(t_0) \neq 0$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^3 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x^2(t)}\right) = -2$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(t)} - \frac{1}{x(t_0)^2} = -2(t - t_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2(t)} = \frac{1 - 2x(t_0)^2(t - t_0)}{x(t_0)^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2(t) = \frac{x(t_0)^2}{1 - 2x(t_0)^2(t - t_0)} \end{aligned}$$

On remarque que le dénominateur s'annule au point t_f donné par

$$x(t_0)^2(t_f - t_0) = 1/2 \Leftrightarrow t_t = t_0 + \frac{1}{2x^2(t_0)} > 0$$

Par conséquent, les solutions sont définies par

$$t \in [-\infty, t_f) \quad \mapsto \quad x(t) = \begin{cases} \frac{x(t_0)}{\sqrt{1-2x(t_0)^2(t-t_0)}} & \text{si} \quad x(t_0) > 0 \\ -\frac{x(t_0)}{\sqrt{1-2x(t_0)^2(t-t_0)}} & \text{si} \quad x(t_0) < 0 \end{cases}$$

(d) D'un point de vue qualitatif les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) = x^3(t) - x(t) = x(t)\,(x(t)-1)\,(x(t)+1) \qquad (3)$$

sont décrites dans le diagramme suivant

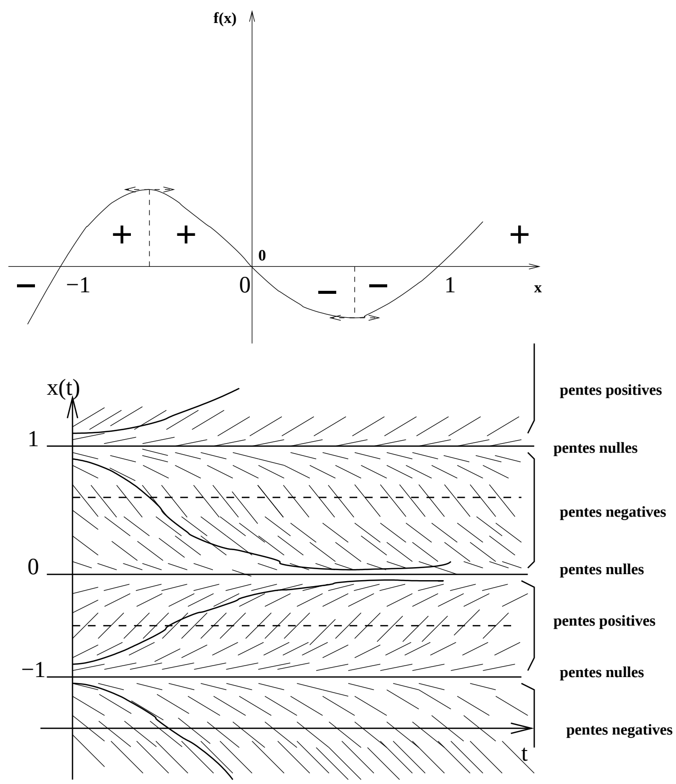


FIG. 27 –

La fonction $f(x) = (x^3 - x)$ est continue, localement Lipschitz, et l'on a $f^{-1}(\{0\}) = \{-1, 0, 1\}$. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à cette équation différentielle. D'après ce théorème, si une fonction $t \mapsto x(t)$ prend une valeur $c \in \{-1, 0, 1\}$ pour une valeur de t, elle est nécessairement identiquement égale à c. Par conséquent, une solution non identiquement égale à c, ne prend la valeur c, pour aucune valeur de t. Pour décrire plus précisement ces solutions, on cherche une décomposition en fraction de la forme

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

Pour trouver les constantes a, b, c, on procède comme suit. On multiplie tout d'abord cette équation par x

$$a + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

On pose ensuite $x = 0$, et on obtient la valeur du premier paramètre

$$x = 0 \Longrightarrow a = -1$$

Pour trouver b, on multiplie la première formule par $(x-1)$

$$\frac{a(x-1)}{x} + b + \frac{c(x-1)}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

On pose ensuite $x = 1$, et on obtient la valeur de b

$$x = 1 \Longrightarrow b = 1/2$$

Pour trouver c, on multiplie la première formule par $(x+1)$

$$\frac{a(x+1)}{x} + \frac{b(x+1)}{x-1} + c = \frac{1}{x(x-1)}$$

On pose ensuite $x = -1$, et on obtient la valeur de c

$$x = -1 \Longrightarrow c = 1/2$$

On en conclut que

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

Par conséquent, pour toute solution de (3) non identiquement égale à une constante $c \in \{-1, 0, 1\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
dt = \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{-dx}{x} + \frac{1}{2}\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{dx}{x+1} \\
&= -d\log x + \frac{1}{2} d\log\left((x-1)(x+1)\right) \\
&= \frac{1}{2} d\log\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} d\log\left(\frac{(x^2-1)}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

En résumé, nous avons donc

$$\frac{d}{dt}\log\left(\frac{(x^2(t)-1)}{x^2(t)}\right)=2$$

Par conséquent, on obtient

$$\log\left(\frac{(x^2(t)-1)}{x^2(t)}\right)-\log\left(\frac{(x^2(t_0)-1)}{x^2(t_0)}\right)=2(t-t_0)$$

ou de façon équivalente

$$1-\frac{1}{x^2(t)}=\left(1-\frac{1}{x^2(t_0)}\right)\times e^{2(t-t_0)}$$

Après simplification, on arrive à la formule

$$\frac{1}{x^2(t)}=1-\left(1-\frac{1}{x^2(t_0)}\right)\times e^{2(t-t_0)}=\frac{x^2(t_0)-(x^2(t_0)-1)\ e^{2(t-t_0)}}{x^2(t_0)}$$

On en conclut que

$$x^2(t)=\frac{x^2(t_0)}{x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}}$$

Le dénominateur est strictement positif pour tout $x(t_0)\in(-1,1)$

$$\forall x(t_0)\in(-1,1)\qquad x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}>0$$

D'autre part, si $x(t_0)\notin(-1,1)$, on a

$$\begin{array}{c} x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}>0 \\ \Updownarrow \\ \frac{x^2(t_0)}{x^2(t_0)-1}>e^{2(t-t_0)} \\ \Updownarrow \\ t<t_f=_{\text{déf.}}t_0+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2(t_0)}{x^2(t_0)-1}\right) \end{array}$$

Les solutions de l'équation (3) sont donc données par

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad x(t)=\begin{cases} \frac{x(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}}} & \text{si}\quad 0<x(t_0)<1 \\ -\frac{x(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}}} & \text{si}\quad -1<x(t_0)<0 \end{cases}$$

et

$$\forall t\in(-\infty,t_f)\qquad x(t)=\begin{cases} \frac{x(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}}} & \text{si}\quad x(t_0)>1 \\ -\frac{x(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+(1-x^2(t_0))\ e^{2(t-t_0)}}} & \text{si}\quad x(t_0)<-1 \end{cases}$$

■

Exercice 4 (Dynamiques de population) *On considère un modèle d'évolution de population simplifié où les variations de tailles sont proportionnelles à la population existante. Autrement dit, si $x(t)$ désigne le nombre d'individus au temps t, nous avons*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{dx}{dt}(t) = \lambda\ x(t) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 \tag{4}$$

Vérifier que la solution du système différentiel est donnée par la formule exponentielle

$$x(t) = e^{\lambda t}\ x(0)$$

Discuter le comportement en temps long de ces solutions en fonction du signe du paramètre λ. Ces modèles exponentiels sont aussi utilisé en sciences économiques, ainsi qu'en mathématiques financières, pour décrire les évolutions de ressources technologiques, ou encore les variations de taux d'intérêts, et l'évolution de valeurs d'actions financières.

Afin d'intégrer certains freins à la croissance infinie de ces systèmes, tels les limitations environementales pour des modèles de populations, les limitations de ressources naturelles, ou encore les barrières financières, on utilise souvent le modèle logistique suivant, aussi appelé modèle de Verhulst-Pearl.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda\ x(t)\ \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{5}$$

Le paramètre K représente la capacité, et la taille limite du système. On notera que si $x(t)$ est proche de 0, comparé à la valeur K, l'équation (5) est similaire à l'équation (4).

1. *Vérifier que les solutions constantes de (5) sont données par*

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = K$$

2. *En utilisant la décomposition des fractions*

$$\frac{1}{x(1 - a\ x)} = \frac{1}{x} + \frac{a}{(1 - ax)}$$

valable pour tout $x \notin \{0, 1/a\}$, montrer que la solution de (5), passant par l'état $x(0) \notin \{0, K\}$, au temps $t = 0$, est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)]\ e^{-\lambda t}}$$

3. *Étudier, en fonction des signes de λ et $x(0)$, le comportement en temps long de cette solution. On examinera les limites des courbes intégrales lorsque $t \uparrow \infty$, puis lorsque $t \downarrow -\infty$.*

4. *On suppose que $\lambda > 0$. A quel instant la courbe intégrale passant par $x(0) \in (0, K/2)$ admet-elle la plus forte variation.*

Solution :
La première question est immédiate. En effet, nous avons

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\ x(0)\right) = \lambda \times e^{\lambda t}\ x(0) = \lambda\ x(t)$$

1. Les solutions constantes de (5) sont clairement données par

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = K$$

Plus précisément, les solutions constantes $x(t) = c$ doivent satisfaire l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda\ x(t)\ \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) = 0 \Longleftrightarrow x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad x(t) = K$$

2. En utilisant la décomposition des fractions

$$\frac{1}{x(1-x/K)} = \frac{1}{x} + \frac{1/K}{(1-x/K)}$$

valable pour tout $x \notin \{0, K\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
(5) \quad \Longleftrightarrow \quad & \frac{dx}{x(1-x/K)} = \lambda dt \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{dx}{x} + \frac{1}{K}\frac{dx}{(1-x/k)} = d(\lambda t) \\
\Longleftrightarrow \quad & d(\log x) - d\log(1-x/K) = d\log\left(\frac{x}{1-x/K}\right) = d(\lambda t) \\
\Longleftrightarrow \quad & -\log\left(\frac{x(t)}{1-\frac{x(t)}{K}}\right) + \log\left(\frac{x(0)}{1-\frac{x(0)}{K}}\right) = \lambda t
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
(5) \quad \Longleftrightarrow \quad & \log\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{K}\right) = -\lambda t + \log\left(\frac{1}{x(0)} - \frac{1}{K}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{K} + e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{x(0)} - \frac{1}{K}\right)
\end{aligned}$$

On en conclut que la solution de (5), passant par l'état $x(0) \notin \{0, K\}$, au temps $t = 0$, est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)]\ e^{-\lambda t}}$$

3. Le comportement asymptotique des courbes intégrales de l'équation logistique, sont résumés dans les figures suivantes. Les diagrammes de gauche représentent les graphes des fonctions

$$f(x) = \lambda\ x\ \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

en fonction du signe du paramètre λ. Dans la situation où $\lambda > 0$, on notera que le point 0 est un état d'équilibre instable, alors que le point K est un état d'équilibre stable, en ce sens où

$$\begin{array}{rccl} \forall \epsilon \in [0, K) & x(0) = \epsilon & \Longrightarrow & \lim_{t\to\infty} x(t) = K \\ \forall \epsilon \in (-\infty, 0) & x(0) = \epsilon & \Longrightarrow & \lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty \end{array}$$

et

$$\forall \epsilon \geq -K \qquad x(0) = K + \epsilon \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = K$$

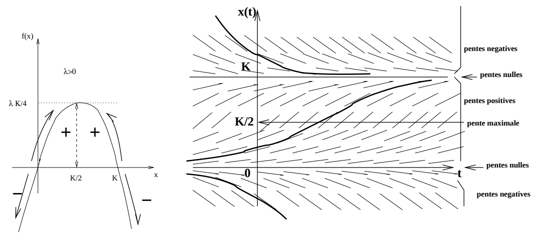


FIG. 28 –

La situation où $\lambda < 0$, est décrite schématiquement dans le diagramme suivant.

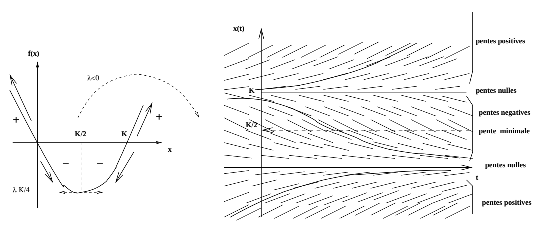


FIG. 29 –

4. La courbe intégrale passant par $x(0) \in (0, K/2)$ atteint sa plus forte variation lorsqu'elle visite l'état $K/2$. Par conséquent, la plus forte variation apparait au temps t_v, avec

$$x(t_v) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)]\ e^{-\lambda t_v}} = K/2$$

On peut calculer cet instant explicitement en notant que

$$\begin{aligned} x(t_v) = K/2 \quad & \Longleftrightarrow \quad x(0) = \frac{x(0)}{2} + \frac{K - x(0)}{2} e^{-\lambda t_v} \\ & \Longleftrightarrow \quad x(0) = [K - x(0)] e^{-\lambda t_v} \\ & \Longleftrightarrow \quad t_v = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{K}{x(0)} - 1 \right) \in (0, \infty) \end{aligned}$$

■

Exercice 5 *Les variations de températures à la surface d'un corps sont (en première approximation) proportionnelles à sa température relative ; c'est à dire à l'écart entre sa propre température, et celle de l'environnement. Plus formellement, si $x(t)$ désigne la température de ce corps au temps t, nous avons*

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda \;\; (x(t) - T) \tag{6}$$

où $T > 0$ désigne la température de l'environnement, et $\lambda > 0$ une constante de refroidissement.

1. *Montrer que la solution de (6) associée à une condition initiale $x(0)$ est donnée par la formule*

$$x(t) = T + (x(0) - T) \; e^{-\lambda t}$$

2. *Vérifier la formule*

$$\lambda \; (t_1 - t_2) = -\log \left(\frac{x(t_1) - T}{x(t_2) - T} \right)$$

3. *Application : Un corps humain est trouvé à minuit dans une chambre d'hotel, et sa température est de $24^o C$. La température ambiante est supposée constante, et égale à $20^o C$. Deux heures plus tard, la température du corps est descendue à $21^o C$. Trouver l'instant où la personne est décédée.*

Solution :

1. Si on pose $y(t) = [x(t) - T]$, alors on a

$$(6) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dt}(t) = -\lambda \; y(t)$$

Dans l'exercice 4, nous avons vu que la solution de ce système est donnée par

$$y(t) = e^{-\lambda t} y(0)$$

On en conclut que

$$[x(t) - T] = e^{-\lambda t}[x(0) - T] \Longleftrightarrow x(t) = T + e^{-\lambda t}[x(0) - T]$$

2. D'après la question précédente, nous avons

$$\frac{[x(t_1)-T]}{[x(t_2)-T]} = \frac{e^{-\lambda t_1}[x(0)-T]}{e^{-\lambda t_1}[x(0)-T]} = e^{-\lambda(t_1-t_2)} \Rightarrow \lambda\,(t_1-t_2) = -\log\frac{x(t_1)-T}{x(t_2)-T}$$

3. D'après les données du problème nous avons $T = 20$, et

$$\begin{aligned} t_1 = 2h \quad \text{et} \quad t_2 = 0h \quad &\Longrightarrow \quad x(t_1) = 21^o\text{C} \quad \text{et} \quad x(t_2) = 24^o\text{C} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{t_1-t_2}\log\frac{x(t_1)-T}{x(t_2)-T} = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda = \log 2 \end{aligned}$$

A l'instant t_d du décés, la température du corps est supposée être égale à 37^oC. Comme précédement, on obtient la formule

$$\lambda(t_d-t_2) = -\log\tfrac{x(t_d)-T}{x(t_2)-T}$$

$$\Downarrow$$

$$t_d = -\tfrac{1}{\log 2}\log\tfrac{37-20}{24-20} = \tfrac{\log 2-\log 17}{\log 2} \leq \tfrac{\log 2-\log 16}{\log 2} = -3h$$

■

Exercice 6 (Désintégration) *La plupart des matériaux radioactif se désintègrent à une vitesse proportionnelle à leur masse courante. Plus formellement, si* $x(t)$ *désigne la quantité du produit au temps* t*, nous avons*

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda \, x(t) \tag{7}$$

Le paramètre $\lambda > 0$ *represente une constante de désintégration, et* $x(0)$ *la quantité initiale du produit radioactif en question.*

1. *Déterminer la demi-vie* T *(la période) d'un produit radioactif donnée en fonction du paramètre de désintégration. Autrement dit, le paramètre* T *correspond au temps mis par un produit pour se désintégrer de moitié.*
2. *Le Carbone 14 est un produit radioactif couramment utilisé en archéologie pour dater divers objets. Sa demi-vie est de* $T_c = 5568 + / - 30$ *années. Calculer la constante de désintégration du Carbone 14.*
3. *Un produit radioactif a une demi-vie de* 15 *jours. Quelle quantité initiale de produit doit-t-on avoir pour qu'il nous reste* $30g$ *après* 30 *jours ?*

Solution :

1. La demi-vie T d'un produit radioactif est déterminée par la formule
$$x(T) = e^{-\lambda T} x(0) = \frac{x(0)}{2} \Longleftrightarrow T = \frac{1}{\lambda} \log 2$$
2. La constante de désintégration du Carbone 14 est approximativement donnée par
$$\lambda_c = \frac{1}{T_c} \log 2 = \frac{1}{5568} \log 2 \simeq 1.244 \times 10^{-4}$$
3. La constante de désintégration d'un produit de demi-vie $T = 16j$ est donnée par
$$\lambda = \frac{1}{T} \log 2 = \frac{1}{15} \log 2$$
La quantité initiale de produit nécessaire pour avoir $30g$ après 30 jours, est clairement donnée par
$$x(30) = e^{-\lambda_c \times 30} x(0) = 30 \Longleftrightarrow x(0) = 30 \times e^{30 \times \frac{\log 2}{15}} = 4 \times 30 = 120g$$