Travaux dirigés L3 MASS

Exercice 1 *Tracer le graphe des fonctions suivantes*

$$\begin{array}{rclrcl} f_1(x) & = & \lambda x & f_2(x) & = & \lambda x^2 \\ f_3(x) & = & \lambda x(1-\frac{x}{K}) & f_4(x) & = & \lambda x|x| \\ f_5(x) & = & \lambda x(1-\frac{x}{K})(\frac{x}{L}-1) & \textit{avec} & & K, L > 0, \lambda \in \mathbb{R}-\{0\} \end{array}$$

Déterminer les ensembles $f_i^{-1}(\{0\})$ (les points d'équilibre), et estimer les constantes de Lipschitz de chacune de ces fonctions, sur un intervalle $[a,b]$. régularité de Lipschitz de ces fonctions.

Exercice 2 (Analyse qualitative) *Cet exercice souligne le lien entre l'étude élémentaire des fonctions numériques faites au lycée (et dans l'exercice 1), et l'analyse qualitative de systèmes différentiels.*

On se donne un ouvert $(I \times U)$ de $\mathbb{R}^2$, et une fonction continue $f : (I \times U) \to \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy associé au couple (U, f), et déterminé par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t,\ x(t)) \qquad (t, x(t)) \in (I \times U) \tag{1}$$

Résoudre ce problème revient à trouver une fonction différentiable $x : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et telle que

$$\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in (I \times U) \quad \textit{et} \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$$

On se limitera par la suite au cas autonome : $f(t, x(t)) = f(x(t))$.

1. *Déterminer l'équation de la droite Δ_P, tangente à la courbe*

$$t \in I \to x(t) \in \mathbb{R}$$

en un point $P = (t_0, x_0) \in (I \times U)$.

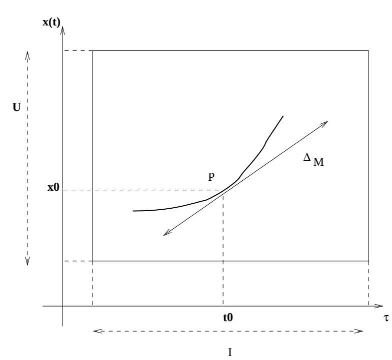

Fig. 1 –

L'application $P \in (I \times U) \mapsto \Delta_P$ est appelée <u>*le champ des tangentes*</u> *à la trajectoire, associée à l'équation (1).*

2. *Déterminer graphiquement les champs des tangentes correspondant aux équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_i\left(x(t)\right) \quad i \in \{1, \ldots, 5\}$$

pour les fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq 5}$ étudiées dans l'exercice 1.
Dans chaque situation :
   - *On explicitera les ensembles des points M où la droite à une pente respectivement nulle, positive, et négative.*
   - *On tracera quelques courbes intégrales $x : I \to \mathbb{R}$, associées à ces champs de tangentes.*

3. *On considère l'équation différentielle (1) associée à la fonction f décrite par le graphe suivant :*

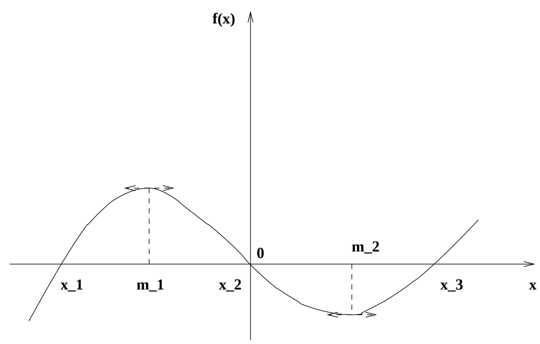

Fig. 2 –

Décrire le champ des tangentes associé, et déterminer les limites lorsque $t \uparrow \infty$ des solutions de (1), dans les cas suivants

$$\begin{array}{lll} 1)\quad x(0) = x_1 & 2)\quad x_1 < x(0) < x_2 & \\ 3)\quad x(0) = x_2 & 4)\quad x_2 < x(0) < x_3 & 5)\quad x(0) = x_3 \end{array}$$

Exercice 3 (Explosion en temps fini) *On considère l'équation de Riccati*

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 \tag{2}$$

1. *Montrer que pour toute solution $t \mapsto x(t)$ non identiquement nulle, nous avons*

$$(2) \Longleftrightarrow d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -dt$$

En déduire que la courbe intégrale de (2), passant par $x(0) > 0$ au temps $t = 0$, est donnée pour tout $t < 1/x(0)$, par la formule

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$

2. *Décrire, et tracer les graphes des solutions de (2), passant respectivement par un point $x(0) > 0$, et par un point $x(0) < 0$.*
3. *Déterminer la solution de (2) passant par un point donné $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ au temps t_0. Comparer les résultats obtenus avec l'analyse qualitative de ce modèle étudiée dans l'exercice 2.*
4. *Analyser les équations différentielles suivantes*

$$\begin{array}{rlcl} 1) & \dfrac{dx}{dt}(t) & = & x^2(t) - 4 \\ 2) & \dfrac{dx}{dt}(t) & = & -\dfrac{1}{2x(t)} \quad \textit{avec} \quad x(t_0) \neq 0, \quad t \geq t_0 \\ 3) & \dfrac{dx}{dt}(t) & = & x^3(t) \\ 4) & \dfrac{dx}{dt}(t) & = & x^3(t) - x(t) \end{array}$$

Exercice 4 (Dynamiques de population) *On considère un modèle d'évolution de population simplifié où les variations de tailles sont proportionnelles à la population existante. Autrement dit, si $x(t)$ désigne le nombre d'individus au temps t, nous avons*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{dx}{dt}(t) = \lambda\ x(t) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 \tag{3}$$

Vérifier que la solution du système différentiel est donnée par la formule exponentielle

$$x(t) = e^{\lambda t}\ x(0)$$

Discuter le comportement en temps long de ces solutions en fonction du signe du paramètre λ. Ces modèles exponentiels sont aussi utilisé en sciences économiques, ainsi qu'en mathématiques financières, pour décrire les évolutions de ressources technologiques, ou encore les variations de taux d'intérêts, et l'évolution de valeurs d'actions financières.

Afin d'intégrer certains freins à la croissance infinie de ces systèmes, tels les limitations environementales pour des modèles de populations, les limitations de ressources naturelles, ou encore les barrières financières, on utilise souvent le modèle logistique suivant, aussi appelé modèle de Verhulst-Pearl.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda\ x(t)\ \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{4}$$

Le paramètre K représente la capacité, et la taille limite du système. On notera que si $x(t)$ est proche de 0, comparé à la valeur K, l'équation (4) est similaire à l'équation (3).

1. *Vérifier que les solutions constantes de (4) sont données par*

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = K$$

2. *En utilisant la décomposition des fractions*

$$\frac{1}{x(1-a\ x)} = \frac{1}{x} + \frac{a}{(1-ax)}$$

valable pour tout $x \notin \{0, 1/a\}$*, montrer que la solution de (4), passant par l'état* $x(0) \notin \{0, K\}$*, au temps* $t = 0$*, est donnée par la formule*

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)]\ e^{-\lambda t}}$$

3. *Étudier, en fonction des signes de* λ *et* $x(0)$*, le comportement en temps long de cette solution. On examinera les limites des courbes intégrales lorsque* $t \uparrow \infty$*, puis lorsque* $t \downarrow -\infty$*.*
4. *On suppose que* $\lambda > 0$*. A quel instant la courbe intégrale passant par* $x(0) \in (0, K/2)$ *admet-elle la plus forte variation.*

Exercice 5 *Les variations de températures à la surface d'un corps sont (en première approximation) proportionnelles à sa température relative ; c'est à dire à l'écart entre sa propre température, et celle de l'environnement. Plus formellement, si* $x(t)$ *désigne la température de ce corps au temps* t*, nous avons*

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda\ \ (x(t) - T) \tag{5}$$

où $T > 0$ *désigne la température de l'environnement, et* $\lambda > 0$ *une constante de refroidissement.*

1. *Montrer que la solution de (5) associée à une condition initiale* $x(0)$ *est donnée par la formule*

$$x(t) = T + (x(0) - T)\ e^{-\lambda t}$$

2. *Vérifier la formule*

$$\lambda\ (t_1 - t_2) = -\log\left(\frac{x(t_1) - T}{x(t_2) - T}\right)$$

3. *Application : Un corps humain est trouvé à minuit dans une chambre d'hotel, et sa température est de* 24^oC*. La température ambiante est supposée constante, et égale à* 20^oC*. Deux heures plus tard, la température du corps est descendue à* 21^oC*. Trouver l'instant où la personne est décédée.*

Exercice 6 (Désintégration) *La plupart des matériaux radioactif se désintègrent à une vitesse proportionnelle à leur masse courante. Plus formellement, si $x(t)$ désigne la quantité du produit au temps t, nous avons*

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda \; x(t) \tag{6}$$

Le paramètre $\lambda > 0$ represente une constante de désintégration, et $x(0)$ la quantité initiale du produit radioactif en question.

1. *Déterminer la demi-vie T (la période) d'un produit radioactif donnée en fonction du paramètre de désintégration. Autrement dit, le paramètre T correspond au temps mis par un produit pour se désintégrer de moitié.*
2. *Le Carbone 14 est un produit radioactif courament utilisé en archéologie pour dater divers objets. Sa demi-vie est de $T_c = 5568 + / - 30$ années. Calculer la constante de désintégration du Carbone 14.*
3. *Un produit radioactif a une demi-vie de 15 jours. Quelle quantité initiale de produit doit-t-on avoir pour qu'il nous reste $30g$ après 30 jours ?*