TD - Licence 3 MASS

Exercice 1 *On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués sont plus rentables que les actif risqués (i.e. $b < h < r$). C'est le cas de conjonctures économiques où les comptes épargnes bancaires ont des taux plus élevés que les rendements d'actions plus risquées. Développer une stratégie d'arbitrage dans ce marché financier.*

Exercice 2 *On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués et risqués sont tels que*

$$b < r < h$$

Décrire explicitement la mesure martingale $\mathbb{P}^\star$ sur Ω.

Exercice 3 *Montrer que l'existence de $\mathbb{P}^\star$ entraine qu'un investisseur ne peut arbitrer le marché financier.*

Exercice 4 *On considère un marché financier CRR avec des rendements d'actifs tels que $b < r < h$. La statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique* **à tendance à la hausse***, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_1$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

De même, la statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique **à tendance à la baisse***, et en perpétuels cracks boursiers, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_1$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

Existe-t-il des opportunités d'arbitrage dans de tels marchés financiers ?

Dans un marché **viable** de type CRR, un conseiller financier propose une option de fonction de paiement à l'échéance n, donnée par la v.a.

$$f = (S_n^2 - K)_+$$

où K désigne un prix d'exercice fixé.

Exercice 5 1. *Construire le portefeuille de couverture que l'émetteur de l'option devra utiliser pour honorer son contrat.*

2. *Montrer que l'investissement initial $V_0(\Phi)$ nécessaire pour couvrir l'option est donné par la formule*

$$V_0(\Phi)$$

$$= (1+r)^{-n} \sum_{l=0}^n \left(s_0 \ (1+b)^{n-l} (1+h)^l - K\right)_+ C_n^l \ \left(\tfrac{h-r}{h-b}\right)^{n-l} \ \left(\tfrac{r-b}{h-b}\right)^l$$

3. *On note C le prix de l'action offert par le conseiller financier. Étudier ses gains et ses pertes dans les trois cas de figure suivants*

$$1)\ C = V_0(\Phi)\ , \quad 2)\ C > V_0(\Phi)\ , \quad \text{et} \quad 3)\ C < V_0(\Phi)$$

4. *On note k_0 le plus petit entier k pour lequel*

$$s_0 \times \left(\frac{1+h}{1+b}\right)^k > \frac{K}{(1+b)^n}$$

   (a) *Vérifier que*

$$k_0 = 1 + \left[\log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right) / \log\left(\frac{1+h}{1+b}\right)\right]$$

   où $[a]$ désigne la partie entière d'un nombre a.

   (b) *Montrer que*

$$V_0(\Phi) = s_0 \times F_{n,p'}(k_0) - (1+r)^{-n} \ K \ F_{n,p^\star}(k_0) \tag{1}$$

   avec les fonctions définies par

$$F_{n,p}(k) = \sum_{l=k}^n \ C_n^l \ p^l \, (1-p)^{n-l} \quad \text{avec} \quad p \in [0,1]$$

   et le jeu de paramètres $(p^\star, p') \in [0,1]$ donnés par

$$p^\star = \frac{r-b}{h-b} \quad \text{et} \quad p' = \frac{(h+1)(r-b)}{(1+r)(h-b)}$$

   (c) *Vérifier que les fonctions $F_{n,p}$ correspondent aux fonctions de répartition*

$$\forall 0 \le k \le n \qquad \mathbb{P}(\Sigma_{p,n} \ge k) = F_{n,p}(k)$$

   des variables aléatoires $\Sigma_{p,n} = \sum_{i=1}^n \epsilon_p^i$, où $(\epsilon_p^i)_{1 \le i \le n}$ désignent une suite de v.a. iid de même loi

$$\mathbb{P}(\epsilon_p^i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_p^i = 0)$$

Exercice 6 *On suppose de plus que l'horizon temporel n, et les paramètres de rendement (r, b, h) sont de la forme*

$$n = T/\Delta \ , \quad r = \rho \ \Delta \ , \quad h = \sigma \ \sqrt{\Delta} \ , \quad \text{et} \quad b = -\sigma \ \sqrt{\Delta}$$

avec $(\Delta, T, \rho, \sigma) \in \mathbb{R}_+^4$. On rappelle que la suite de v.a.

$$W_{p,n} = \frac{\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})}{\sqrt{\mathbb{E}([\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})]^2)}}$$

converge faiblement vers une v.a. gaussienne centrée normée, en ce sens où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(W_{p,n} \geq x) = F(x) =_{\text{déf.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \ e^{-\frac{y^2}{2}} \ dy$$

Ce résultat n'est autre que le théorème de la limite centrale pour des suite de v.a. indépendantes, et identiquement distribuées.

1. *Montrer que*
$$W_{p,n} = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_n^i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$
2. *Lorsque $\Delta \to 0$, vérifier les équivalences suivantes*
$$np' \simeq \frac{T}{2\sigma \ \sqrt{\Delta}} \ (\rho + \sigma^2 + \sigma/\sqrt{\Delta}) \quad \text{et} \quad np^\star \simeq \frac{T}{2\sigma \ \sqrt{\Delta}} \left(\rho + \sigma/\sqrt{\Delta}\right)$$
et
$$\sqrt{np'(1-p')} \simeq \sqrt{np^\star(1-p^\star)} \simeq \frac{\sqrt{T}}{(2\sqrt{\Delta})}$$
et enfin
$$k_0 \simeq \frac{1}{2\sigma \ \sqrt{\Delta}} \left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$
En déduire les estimations
$$\begin{aligned} \frac{np' - k_0}{\sqrt{np'(1-p')}} \quad &\simeq \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ \left(T \ \left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log\left(s_0/K\right)\right) \\ \frac{np^\star - k_0}{\sqrt{np^\star(1-p^\star)}} \quad &\simeq \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ \left(T\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log\left(s_0/K\right)\right) \end{aligned}$$
3. *En utilisant le fait que*
$$F_{n,p}\left(k_0\right) = \mathbb{P}\left(W_{p,n} \geq \frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \ \overset{n \sim \infty}{\simeq} \ F\left(\frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
montrer que l'on a
$$\begin{aligned} V_0(\Phi) \quad \simeq \quad & s_0 \ F\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ \left(T \ \left(\rho + \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \\ & -e^{-\rho T} \ K \ F\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ \left(T \ \left(\rho - \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \end{aligned}$$