TD - Licence 3 MASS

Exercice 1 *On appelle le rendement instantané d'un titre S_k au temps k, la quantité R_k^S définie par*

$$R_k^S = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{\Delta S_k}{S_{k-1}}$$

On rappelle que S_k représente le prix d'une part d'un titre donné au temps k. On note $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ le modèle à deux états décrit par le tableau

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

On suppose que ce marché est viable

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

et l'on note $\mathbb{P}^\star$ la mesure à risque neutre définie par

$$\mathbb{P}^\star(\omega^1) = p^\star =_{\text{déf.}} \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \in (0,1)$$

1. *Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ avec*

   $$\mathbb{P}(\omega^1) = p = 1 - \mathbb{P}(\omega^2)$$

   Vérifier que l'on a

   $$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(R_1^{S^2}) = \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0}$$

2. *Déduire de la question précédente que le rendement instantané du titre risqué est supérieur à celui du titre non risqué, si la probabilité p est suffisamment petite.*
3. *Montrer que sous $\mathbb{P}^\star$, le rendement instantané du titre risqué est le même que celui du titre non risqué.*

Exercice 2 *On considère le modèle de marché viable décrit dans l'exercice 1.*

1. *Décrire les prix des actifs réactualisés* $(\overline{S}^1_k, \overline{S}^2_k)_{k=0,1}$*, ainsi que les valeurs réactualisées d'un portefeuille* $(\overline{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ *associé à une stratégie d'aménagement* $\Phi_1 = (\Phi^1_1, \Phi^2_1)$.
2. *Vérifier que l'on a*
$$\Phi^1_1 = \overline{V}_0(\Phi) - \Phi^2_1 \; s_0$$
et montrer que
$$\overline{V}_0(\Phi) = \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \; s_0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \Phi^2_1 \; [\overline{S}^2_1 - \; \overline{S}^2_0]$$
3. *En déduire que les valeurs réactualisées des portefeuilles* $(\overline{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ *sont des* $\mathbb{P}^\star$*-martingales.*

Exercice 3 *Déterminer les valeurs réactualisées des portefeuilles* $\overline{V}_k(\Phi) = V_k(\Phi)/(1+r)^k$ *aux instants* $k = 0, 1$*, en fonction des prix des actifs réactualisés* $\overline{S}^i_k = S^i_k/(1+r)^k$. *Vérifier les formules suivantes :*

$$\Delta\overline{V}_1(\Phi) = \Phi^2_1 \times \Delta\overline{S}^2_1 \quad \text{et} \quad \Phi^1_1 = \overline{V}_0(\Phi) - \Phi^2_1 \times \overline{S}^2_0$$

Exercice 4 *On considère le modèle de marché à deux états sur une période* $(S^1_k, S^2_k)_{k=0,1}$ *décrit par le tableau suivant*

Ω	$S_0 = (S^1_0, S^2_0)$	$S_1 = (S^1_1, S^2_1)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

1. *Décrire le tableau, et l'arbre des épreuves correspondant au marché réactualisé* $(\overline{S}^1_k, \overline{S}^2_k)_{k=0,1}$.
2. *Déterminer les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à une stratégie d'aménagement sans investissement initial.*
3. *Discuter les situations où l'on peut enrichir son portefeuille* $\Delta\overline{V}_1(\Phi) > 0$*, sans apport initial.*
4. *Discuter les possibilités d'arbitrage dans les neuf modèles de marchés suivants :*

Ω	$S_0 = (S^1_0, S^2_0)$	$S_1 = (S^1_1, S^2_1)$
ω^1	$(1; 5)$	$((1 + 5\ 10^{-2}); s_{1,1})$
ω^2	$(1; 5)$	$((1 + 5\ 10^{-2}); s_{1,2})$

avec

$$1)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 6 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 4 \end{array}\right. \quad 2)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 6 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 7 \end{array}\right. \quad 3)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 10 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 1 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 3 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 2 \end{array}\right. \quad 5)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 5 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 6 \end{array}\right. \quad 6)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 5 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 4 \end{array}\right.$$

$$7)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 3 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 10 \end{array}\right. \quad 8)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 8 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 9 \end{array}\right. \quad 9)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} &=& 1,05\ \times 2 \\ s_{1,2} &=& 1,05\ \times 10 \end{array}\right.$$

Exercice 5 *On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & \overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1; \overline{s}_0) & (1; \overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1; \overline{s}_0) & (1; \overline{s}_{1,2}) \end{array} \qquad \text{avec} \quad 0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$$

Une banque émet une option de vente de fonction de paiement $f(\omega^i) = f_i$, avec $i = 1, 2$. On note $\overline{f}_i = f_i/(1+r)$ les valeurs réactualisées de cette option.

1. *Déterminer les stratégies de couverture de cette option, en fonction des portefeuilles et des actifs réactualisés.*
2. *Montrer qu'une stratégie de couverture est donnée par*

$$\phi^{2,\,\star} = \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right)/\overline{s}_{1,1}$$

où $\phi^{1,\,\star}$ désigne le point d'intersection des deux droites $(\Delta_i)_{i=1,2}$ déterminées par les équations suivantes :

$$\Delta_i \ : \ \phi^1 \mapsto \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}}\ \overline{f}_i + \phi^1 \ \left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}}\right)$$

On Vérifiera que la stratégie de couverture $(\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ est l'unique solution du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi^1 + \phi^2\ \overline{s}_{1,1} & = & \overline{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2\ \overline{s}_{1,2} & = & \overline{f}_2 \end{array} \right.$$

3. *Montrer que le coût initial du portefeuille (réactualisé) permettant de couvrir l'option est donné par la formule*

$$\overline{V}_0(\Phi) = \overline{f}_1 \ \left(\frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_2 \ \left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right)$$

Exercice 6 *Vérifier la viabilité des marchés suivants, et déterminer les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ dans chaque situation.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1; 5) & (1; \overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1; 5) & (1; \overline{s}_{1,2}) \end{array}$$

avec

$$1) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 3 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 6 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 1 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 10 \end{array} \right. \qquad 3) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 4 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 7 \end{array} \right.$$

$$4) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 1 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 6 \end{array} \right. \qquad 5) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 1 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 20 \end{array} \right. \qquad 6) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 2 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 7 \end{array} \right.$$

$$7) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 3 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 50 \end{array} \right. \qquad 8) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 4 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 100 \end{array} \right. \qquad 9) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{s}_{1,1} & = & 2 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 1000 \end{array} \right.$$

Exercice 7 *On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant*

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$\overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	
ω^1	$(1; \overline{s}_0)$	$(1; \overline{s}_{1,1})$	avec $0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$
ω^2	$(1; \overline{s}_0)$	$(1; \overline{s}_{1,2})$	

1. *Déterminer l'unique probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que*

$$\mathbb{E}^\star(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2) = \overline{S}_0^2$$

2. *Montrer que pour tout portefeuille autofinancé, nous avons*

$$\mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi) \mid \overline{S}_0^2) = \overline{V}_0(\Phi)$$

3. *Déterminer la valeur moyenne sous $\mathbb{P}^\star$ d'une fonction de paiement réactualisée $\overline{f}$.*
4. *Décrire une stratégie de couverture $\Phi^\star = (\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$ de l'option $\overline{f}$, et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = C(f)$.*

Exercice 8 *Déterminer les prix, et les stratégies de couverture des options de vente suivantes*

1) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;6)$	4

2) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;10)$	0

3) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	6
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	1

4) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0

5) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (100 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	99
ω^2	$(1;5)$	$(1;20)$	80

6) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	4
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	0

7) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	3
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0