

TD - Licence 3 MASS [Corrigés]

Exercice 1 On appelle le rendement instantané d'un titre S_k au temps k , la quantité R_k^S définie par

$$R_k^S = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{\Delta S_k}{S_{k-1}}$$

On rappelle que S_k représente le prix d'une part d'un titre donné au temps k . On note $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ le modèle à deux états décrit par le tableau

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1, S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1, S_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; s_0) \quad ((1+r); s_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; s_0) \quad ((1+r); s_{1,2}) \end{array}$$

On suppose que ce marché est viable

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

et l'on note \mathbb{P}^* la mesure à risque neutre définie par

$$\mathbb{P}^*(\omega^1) = p^* =_{\text{déf.}} \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \in (0, 1)$$

1. Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ avec

$$\mathbb{P}(\omega^1) = p = 1 - \mathbb{P}(\omega^2)$$

Vérifier que l'on a

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(R_1^{S^2}) = \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0}$$

2. Dédurre de la question précédente que le rendement instantané du titre risqué est supérieur à celui du titre non risqué, si la probabilité p est suffisamment petite.
3. Montrer que sous \mathbb{P}^* , le rendement instantané du titre risqué est le même que celui du titre non risqué.

Solution :

1. Par définition du rendement instantané, on vérifie aisément que

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = \mathbb{E}\left(\frac{S_1^1 - S_0^1}{S_0^1}\right) = \frac{(1+r) - 1}{1} = r$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{S^2}) &= \mathbb{E}\left(\frac{S_1^2 - S_0^2}{S_0^2}\right) = \frac{s_{1,1} - s_0}{s_0} p + (1-p) \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} \\ &= \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0} \end{aligned}$$

2. Il suffit de noter que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{S^2}) > \mathbb{E}(R_1^{S^1}) &\iff \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0} > r \\ &\iff p < \frac{s_0}{s_{1,2} - s_{1,1}} \left(\frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - r \right) \\ &\iff p < p^* = \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \end{aligned}$$

3. Lorsque $\mathbb{P} = \mathbb{P}^*$, on a bien évidemment

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r$$

De plus, un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(R_1^{S^2}) &= \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \times \frac{(s_{1,2} - s_{1,1})}{s_0} \\ &= \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{s_0} = (1+r) - 1 = r \end{aligned}$$

Par conséquent, sous \mathbb{P}^* , les rendements instantanés des titres risqués et non risqués coïncident. ■

Exercice 2 On considère le modèle de marché viable décrit dans l'exercice 1.

1. Décrire les prix des actifs réactualisés $(\bar{S}_k^1, \bar{S}_k^2)_{k=0,1}$, ainsi que les valeurs réactualisées d'un portefeuille $(\bar{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ associé à une stratégie d'aménagement $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$.
2. Vérifier que l'on a

$$\Phi_1^1 = \bar{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 s_0$$

et montrer que

$$\bar{V}_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 s_0 \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi) = \bar{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{S}_0^2]$$

3. En déduire que les valeurs réactualisées des portefeuilles $(\bar{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ sont des \mathbb{P}^* -martingales.

Solution :

1. Les valeurs des portefeuilles associées à une stratégie de réaménagement

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$$

sont données par les formules suivantes

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 s_0 \\ V_1(\Phi) &= \Phi_1^1 S_1^1 + \Phi_1^2 S_1^2 = \Phi_1^1 (1+r) + \Phi_1^2 S_1^2 \end{aligned}$$

Leurs valeurs réactualisées sont définies par la formule

$$\bar{V}_0(\Phi) = \frac{V_0(\Phi)}{(1+r)^0} = V_0(\Phi) \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi) = \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)^1} = \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)}$$

s'expriment en terme des actifs réactualisés

$$\bar{S}_0^1 = \frac{S_0^1}{(1+r)^0} = S_0^1 = 1, \quad \bar{S}_0^2 = \frac{S_0^2}{(1+r)^0} = S_0^2 = s_0$$

et

$$\bar{S}_1^1 = \frac{S_1^1}{(1+r)^1} = \frac{(1+r)}{(1+r)} = 1, \quad \bar{S}_1^2 = \frac{S_1^2}{(1+r)^1}$$

selon les formules

$$\begin{aligned} \bar{V}_0(\Phi) &= V_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_0^2 = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 s_0 \\ \bar{V}_1(\Phi) &= \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_1^2 \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, on obtient

$$\Phi_1^1 = \bar{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 \bar{S}_0^2$$

Pour conclure, on note simplement que l'on a

$$\bar{V}_1(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_1^2 = \bar{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{S}_0^2]$$

3. D'après la formule précédente, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* (\bar{V}_1(\Phi) \mid \mathcal{F}_0) &= \bar{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 [\mathbb{E}^* (\bar{S}_1^2 \mid \mathcal{F}_0) - \bar{S}_0^2] \\ &= \bar{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 \times 0 = \bar{V}_0(\Phi)\end{aligned}$$

■

Exercice 3 Déterminer les valeurs réactualisées des portefeuilles $\bar{V}_k(\Phi) = V_k(\Phi)/(1+r)^k$ aux instants $k = 0, 1$, en fonction des prix des actifs réactualisés $\bar{S}_k^i = S_k^i/(1+r)^k$. Vérifier les formules suivantes :

$$\Delta \bar{V}_1(\Phi) = \Phi_1^2 \times \Delta \bar{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_1^1 = \bar{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 \times \bar{S}_0^2$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\bar{V}_0(\Phi) &= V_0(\Phi) = \Phi_0^1 S_0^1 + \Phi_0^2 S_0^2 = \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 \quad (\text{par autofinancement}) \\ &= \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_0^2 \\ \bar{V}_1(\Phi) &= \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)} = \Phi_1^1 \frac{S_1^1}{1+r} + \Phi_1^2 \frac{S_1^2}{1+r} = \Phi_1^1 \frac{(1+r) \times 1}{(1+r)} + \Phi_1^2 \frac{S_1^2}{(1+r)} \\ &= \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_1^2\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\bar{V}_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_0^2 \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \bar{S}_1^2$$

On en déduit que

$$\Delta \bar{V}_1(\Phi) = [\bar{V}_1(\Phi) - \bar{V}_0(\Phi)] = \Phi_1^2 \times \Delta \bar{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_1^1 = \bar{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 \bar{S}_0^2$$

■

Exercice 4 On considère le modèle de marché à deux états sur une période $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ décrit par le tableau suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1, S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1, S_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; s_0) \quad ((1+r); s_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; s_0) \quad ((1+r); s_{1,2}) \end{array}$$

1. Décrire le tableau, et l'arbre des épreuves correspondant au marché réactualisé $(\bar{S}_k^1, \bar{S}_k^2)_{k=0,1}$.
2. Déterminer les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à une stratégie d'aménagement sans investissement initial.
3. Discuter les situations où l'on peut enrichir son portefeuille $\Delta \bar{V}_1(\Phi) > 0$, sans apport initial.
4. Discuter les possibilités d'arbitrage dans les neuf modèles de marchés suivants :

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1, S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1, S_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad ((1+5 \cdot 10^{-2}); s_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad ((1+5 \cdot 10^{-2}); s_{1,2}) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lll} 1) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 6 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 4 \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 6 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 7 \end{array} \right. & 3) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 10 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 1 \end{array} \right. \\ 4) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 3 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 2 \end{array} \right. & 5) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 5 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 6 \end{array} \right. & 6) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 5 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 4 \end{array} \right. \\ 7) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 3 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 10 \end{array} \right. & 8) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 8 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 9 \end{array} \right. & 9) \left\{ \begin{array}{l} s_{1,1} = 1,05 \times 2 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 10 \end{array} \right. \end{array}$$

Solution :

1. Le tableau des épreuves correspondant au marché réactualisé $(\bar{S}_k^1, \bar{S}_k^2)_{k=0,1}$ est donné par

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad \bar{S}_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

avec $\bar{s}_0 = s_0/(1+r)^0 = s_0$, $\bar{s}_{1,1} = s_{1,1}/(1+r)^1$, et $\bar{s}_{1,2} = s_{1,2}/(1+r)^1$.

2. Les stratégies d'aménagement $\Phi_1 = (\phi^1, \phi^2)$ sans investissement initial sont définies par la propriété suivante :

$$\bar{V}_0(\Phi) = \phi^1 \bar{S}_0^1 + \phi^2 \bar{S}_0^2 = \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_0 = 0 \iff \phi^1 = -\phi^2 \bar{s}_0$$

Par conséquent, les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à de telles stratégies sont données par

$$\bar{V}_1(\Phi) = \phi^1 \bar{S}_1^1 + \phi^2 \bar{S}_1^2 = \phi^1 + \phi^2 \bar{S}_1^2 = \phi^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{s}_0]$$

On a donc

$$\bar{V}_1(\Phi)(\omega^1) = \phi^2 [\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_0] \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi)(\omega^2) = \phi^2 [\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0]$$

3. D'après la question précédente, on peut enrichir de façon certaine son portefeuille

$$\Delta \bar{V}_1(\Phi) = [\bar{V}_1(\Phi) - 0] = \bar{V}_1(\Phi) = \phi^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{s}_0]$$

sans apport initial, si, et seulement si, les quantités ϕ^2 et $[\bar{S}_1^2 - \bar{s}_0]$ ont toujours le même signe. Ces possibilités sont discutées dans les cas suivants :

- $\bar{s}_0 < \bar{s}_{1,1} < \bar{s}_{1,2}$ ou $\bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2} < \bar{s}_{1,1}$:

Dans ces deux situations, nous avons $[\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_0] > 0$, et $[\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0] > 0$. L'arbitrage est clair, il suffit de vendre à découvert $\phi^1 = -\phi^2 \bar{s}_0$ parts de titre non risqué, pour acheter ϕ^2 parts de titre risqué

$$\phi^1 = -\phi^2 \bar{s}_0 \implies \bar{V}_0(\Phi) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi) = \phi^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{s}_0] > 0$$

- $\bar{s}_{1,1} < \bar{s}_{1,2} < \bar{s}_0$ ou $\bar{s}_{1,2} < \bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0$:

Dans ce cette situation, nous avons $[\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_0] < 0$, et $[\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0] < 0$. L'arbitrage est clair, il suffit de vendre à découvert $-\phi^2 (> 0)$ parts de titre risqué, pour acheter $\phi^1 = -\phi^2 \bar{s}_0 (> 0)$ parts de titre non risqué

$$\phi^1 = -\phi^2 \bar{s}_0 \implies \bar{V}_0(\Phi) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi) = \phi^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{s}_0] > 0$$

- $\bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2}$ ou $\bar{s}_{1,2} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,1}$:

Dans ce cette situation, les quantités $[\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_0]$, et $[\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0]$, sont de signes opposés, et l'on ne peut arbitrer sans prendre de risque.

4. Dans toutes les cas de marchés financiers, nous avons $\bar{s}_0 = s_0 = 5$. D'après les questions précédentes, nous avons

$$1) \{ \bar{s}_{1,1} = 6 < \bar{s}_0 = 5 < \bar{s}_{1,2} = 4 \Rightarrow \text{marché viable} \}$$

$$2) \{ \bar{s}_0 = 5 < \bar{s}_{1,1} = 6 < \bar{s}_{1,2} = 7 \Rightarrow \exists \text{arbitrage} \}$$

$$3) \{ \bar{s}_{1,2} = 1 < \bar{s}_0 = 5 < \bar{s}_{1,1} = 10 \Rightarrow \text{marché viable} \}$$

$$4) \{ \bar{s}_{1,2} = 2 < \bar{s}_{1,1} = 3 < \bar{s}_0 = 5 \Rightarrow \exists \text{arbitrage} \}$$

$$5) \{ \bar{s}_0 = 5 \leq \bar{s}_{1,1} = 5 < \bar{s}_{1,2} = 6 \Rightarrow \exists \text{arbitrage} \}$$

$$6) \{ \bar{s}_{1,2} = 4 < \bar{s}_0 = 5 \leq \bar{s}_{1,1} = 5 \Rightarrow \text{marché viable} \}$$

$$7) \{ \bar{s}_{1,1} = 3 < \bar{s}_0 = 5 \leq \bar{s}_{1,2} = 10 \Rightarrow \text{marché viable} \}$$

$$8) \{ \bar{s}_0 = 5 \leq \bar{s}_{1,1} = 8 < \bar{s}_{1,2} = 9 \Rightarrow \exists \text{arbitrage} \}$$

$$9) \{ \bar{s}_{1,1} = 2 < \bar{s}_0 = 5 \leq \bar{s}_{1,2} = 10 \Rightarrow \text{marché viable} \}$$

■

Exercice 5 On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad \bar{S}_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \quad \text{avec } 0 < \bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2} \\ \omega^2 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

Une banque émet une option de vente de fonction de paiement $f(\omega^i) = f_i$, avec $i = 1, 2$. On note $\bar{f}_i = f_i/(1+r)$ les valeurs réactualisées de cette option.

1. Déterminer les stratégies de couverture de cette option, en fonction des portefeuilles et des actifs réactualisés.
2. Montrer qu'une stratégie de couverture est donnée par

$$\phi^{2,*} = (\bar{f}_1 - \phi^{1,*}) / \bar{s}_{1,1}$$

où $\phi^{1,*}$ désigne le point d'intersection des deux droites $(\Delta_i)_{i=1,2}$ déterminées par les équations suivantes :

$$\Delta_i : \phi^1 \mapsto \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} \bar{f}_i + \phi^1 \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} \right)$$

On vérifiera que la stratégie de couverture $(\phi^{1,*}, \phi^{2,*})$ est l'unique solution du système d'équations

$$\begin{cases} \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,1} = \bar{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,2} = \bar{f}_2 \end{cases}$$

3. Montrer que le coût initial du portefeuille (réactualisé) permettant de couvrir l'option est donné par la formule

$$\bar{V}_0(\Phi) = \bar{f}_1 \left(\frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right)$$

Solution :

1. Les portefeuilles de couverture (ϕ^1, ϕ^2) doivent nécessairement satisfaire la condition suivante

$$\bar{V}_1(\Phi) = \phi^1 + \phi^2 \bar{S}_1^2 \geq \bar{f}$$

$$\iff (\phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,1} \geq \bar{f}_1 \quad \text{et} \quad \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,2} \geq \bar{f}_2) \iff \phi^2 \geq \max \left\{ \frac{\bar{f}_1 - \phi^1}{\bar{s}_{1,1}}; \frac{\bar{f}_2 - \phi^1}{\bar{s}_{1,2}} \right\}$$

Par conséquent, le coût minimal d'acquisition du portefeuille initial est tel que

$$\begin{aligned} \bar{V}_0(\Phi) &= V_0(\Phi) = \phi^1 + \phi^2 s_0 \\ &\geq \max_{i=1,2} \left\{ \phi^1 + \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} [\bar{f}_i - \phi^1] \right\} = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} \bar{f}_i + \phi^1 \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} \right) \right\} \end{aligned}$$

2. D'après nos hypothèses, nous avons

$$\bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2}$$

Ainsi, la droite

$$\phi^1 \longrightarrow \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}} \bar{f}_1 + \underbrace{\phi^1 \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}}\right)}_{\text{négatif}}$$

est décroissante, et la droite

$$\phi^1 \longrightarrow \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2}} \bar{f}_2 + \underbrace{\phi^1 \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2}}\right)}_{\text{positif}}$$

croissante. Ces deux droites s'intersectent en un point $\phi^{1, \star}$ déterminé par la formule

$$\frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}} \bar{f}_1 + \phi^{1, \star} \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}}\right) = \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2}} \bar{f}_2 + \phi^{1, \star} \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2}}\right)$$

Autrement dit, nous avons

$$\begin{aligned} \phi^{1, \star} &= \left(\frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2}} - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}}\right)^{-1} \left[\frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2}} \bar{f}_2 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}} \bar{f}_1\right] \\ &= \left(\frac{1}{\bar{s}_{1,2}} - \frac{1}{\bar{s}_{1,1}}\right)^{-1} \left[\frac{1}{\bar{s}_{1,2}} \bar{f}_2 - \frac{1}{\bar{s}_{1,1}} \bar{f}_1\right] = \frac{\bar{s}_{1,2}\bar{s}_{1,1}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} \times \frac{\bar{f}_2\bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,2}\bar{s}_{1,1}} \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\phi^{1, \star} = \frac{\bar{f}_2\bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}}$$

Il nous reste à vérifier que la stratégie de couverture proposée

$$\phi^{2, \star} = (\bar{f}_1 - \phi^{1, \star}) / \bar{s}_{1,1}$$

permet de réaliser l'option \bar{f} . Pour cela, on note que

$$\phi^{1, \star} + \phi^{2, \star}\bar{s}_{1,1} = \phi^{1, \star} + (\bar{f}_1 - \phi^{1, \star}) = \bar{f}_1$$

et

$$\begin{aligned} \phi^{1, \star} + \phi^{2, \star}\bar{s}_{1,2} &= \phi^{1, \star} + (\bar{f}_1 - \phi^{1, \star}) \frac{\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1}} = \phi^{1, \star} \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1}}\right) + \bar{f}_1 \times \frac{\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1}} \\ &= \frac{\bar{f}_2\bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} \times \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1}}\right) + \bar{f}_1 \times \frac{\bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1}} = \bar{f}_2 \end{aligned}$$

3. D'après la propriété d'autofinancement, le coût initial $\bar{V}_0(\Phi)$ du portefeuille permettant de couvrir l'option est donné par

$$\bar{V}_0(\Phi) = \phi^{1, * } + \phi^{2, *} \bar{s}_0$$

On obtient ainsi la formule

$$\begin{aligned} \bar{V}_0(\Phi) &= \frac{\bar{f}_2 \bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1 \bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} + \left(\bar{f}_1 - \frac{\bar{f}_2 \bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1 \bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} \right) \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}} \\ &= \frac{\bar{f}_2 \bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1 \bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} + \left(\frac{\bar{f}_1 \bar{s}_{1,1} - \bar{f}_2 \bar{s}_{1,1}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} \right) \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,1}} \\ &= \frac{\bar{f}_2 \bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1 \bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} + \left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} \right) \bar{s}_0 \\ &= \bar{f}_1 \left(\frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right) \end{aligned}$$

■

Exercice 6 Vérifier la viabilité des marchés suivants, et déterminer les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1, * }, \phi^{2, * })$ dans chaque situation.

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; \bar{s}) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; \bar{s}) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 3 \\ \bar{s}_{1,2} = 6 \end{cases} & 2) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 1 \\ \bar{s}_{1,2} = 10 \end{cases} & 3) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 4 \\ \bar{s}_{1,2} = 7 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 1 \\ \bar{s}_{1,2} = 6 \end{cases} & 5) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 1 \\ \bar{s}_{1,2} = 20 \end{cases} & 6) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 2 \\ \bar{s}_{1,2} = 7 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 3 \\ \bar{s}_{1,2} = 50 \end{cases} & 8) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 4 \\ \bar{s}_{1,2} = 100 \end{cases} & 9) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 2 \\ \bar{s}_{1,2} = 1000 \end{cases} \end{array}$$

Solution : On rappelle que les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1, * }, \phi^{2, * })$ sont données par

$$C(f) = \bar{f}_1 \left(\frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \phi^{1, * } &= \frac{\bar{f}_1 \bar{s}_{1,2} - \bar{f}_2 \bar{s}_{1,1}}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \\ \phi^{2, * } &= (\bar{f}_1 - \phi^{1, * }) / \bar{s}_{1,1} = \frac{1}{\bar{s}_{1,1}} \left(\bar{f}_1 - \frac{\bar{f}_2 \bar{s}_{1,1} - \bar{f}_1 \bar{s}_{1,2}}{\bar{s}_{1,1} - \bar{s}_{1,2}} \right) = \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \end{aligned}$$

Leurs valeurs dans les différents modèles de marchés proposés sont données ci-dessous.

$$\begin{array}{l}
1) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 3) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 6) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{1}{3}\bar{f}_1 + \frac{2}{3}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{6\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2}{3}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{3} \right) \\
\\
2) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 1) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 10) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{5}{9}\bar{f}_1 + \frac{4}{9}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{10\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{9}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{9} \right) \\
\\
3) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 2) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 7) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{2}{5}\bar{f}_1 + \frac{3}{5}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{7\bar{f}_1 - 2\bar{f}_2}{5}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{5} \right) \\
\\
4) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 3) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 50) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{45}{47}\bar{f}_1 + \frac{2}{47}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{50\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2}{47}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{47} \right) \\
\\
5) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 1) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 20) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{15}{19}\bar{f}_1 + \frac{4}{19}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{20\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{19}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{19} \right) \\
\\
6) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 2) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 7) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{2}{5}\bar{f}_1 + \frac{3}{5}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{7\bar{f}_1 - 2\bar{f}_2}{5}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{5} \right) \\
\\
7) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 3) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 50) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{45}{47}\bar{f}_1 + \frac{2}{47}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{50\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2}{47}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{47} \right) \\
\\
8) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 4) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 100) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{95}{96}\bar{f}_1 + \frac{1}{96}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{100\bar{f}_1 - 4\bar{f}_2}{96}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{96} \right) \\
\\
9) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \frac{\bar{f}}{\bar{f}_1} \quad C(f) \quad (\phi^1, *, \phi^2, *) \\
\omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 2) \quad \bar{f}_1 \\
\omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 1000) \quad \bar{f}_2 \quad \frac{995}{998}\bar{f}_1 + \frac{3}{998}\bar{f}_2 \quad \left(\frac{1000\bar{f}_1 - 2\bar{f}_2}{998}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{998} \right)
\end{array}$$

■

Exercice 7 On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad \bar{S}_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \quad \text{avec } 0 < \bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2} \\ \omega^2 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

1. Déterminer l'unique probabilité \mathbb{P}^* sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que

$$\mathbb{E}^*(\bar{S}_1^2 \mid \bar{S}_0^2) = \bar{S}_0^2$$

2. Montrer que pour tout portefeuille autofinancé, nous avons

$$\mathbb{E}^*(\bar{V}_1(\Phi) \mid \bar{S}_0^2) = \bar{V}_0(\Phi)$$

3. Déterminer la valeur moyenne sous \mathbb{P}^* d'une fonction de paiement réactualisée \bar{f} .
4. Décrire une stratégie de couverture $\Phi^* = (\phi^1, *, \phi^2, *)$ de l'option \bar{f} , et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\bar{V}_0(\Phi^*) = \mathbb{E}^*(\bar{f}) = C(\bar{f})$.

Solution :

1. L'unique probabilité \mathbb{P}^* sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que $\mathbb{E}^*(\bar{S}_1^2 \mid \bar{S}_0^2) = \bar{S}_0^2$, est donnée par la formule suivante

$$\mathbb{E}^*(\bar{S}_1^2 \mid \bar{S}_0^2 = \bar{s}_0) = \bar{s}_{1,1} \mathbb{P}^*(\omega^1) + \bar{s}_{1,2} (1 - \mathbb{P}^*(\omega^1)) = \bar{s}_0$$

Autrement dit, nous avons

$$\mathbb{P}^*(\omega^1) = 1 - \mathbb{P}^*(\omega^2) = \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}}$$

2. Pour tout portefeuille autofinancé (et prévisible), nous avons

$$\mathbb{E}^*(\bar{V}_1(\Phi) \mid \bar{S}_0^2) = \bar{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 \mathbb{E}^*(\Delta \bar{S}_1^2 \mid \bar{S}_0^2) = \bar{V}_0(\Phi)$$

3. Sous \mathbb{P}^* , d'une fonction de paiement réactualisée \bar{f} , est donnée par

$$\mathbb{E}^*(\bar{f}) = \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \bar{f}_1 + \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}}\right) \bar{f}_2$$

avec $\bar{f}(\omega^i) = \bar{f}_i$, pour chaque $i = 1, 2$.

4. Décrire une stratégie de couverture $\Phi^* = (\phi^1, *, \phi^2, *)$ de l'option \bar{f} , et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\bar{V}_0(\Phi^*) = \mathbb{E}^*(\bar{f})$.
5. En utilisant la formule du delta de couverture,

$$\begin{cases} \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,1} & = \bar{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,2} & = \bar{f}_2 \end{cases}$$

on obtient la stratégie de couverture $\Phi^* = (\phi^{1,*}, \phi^{2,*})$ de l'option \bar{f} ,

$$\phi^{1,*} = \left(\frac{1}{\bar{s}_{1,1}} - \frac{1}{\bar{s}_{1,2}} \right)^{-1} \left(\frac{\bar{f}_1}{\bar{s}_{1,1}} - \frac{\bar{f}_2}{\bar{s}_{1,2}} \right) = \frac{\bar{s}_{1,2}\bar{f}_1 - \bar{s}_{1,1}\bar{f}_2}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \quad \text{et} \quad \phi^{2,*} = \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}}$$

Le coût initial du portefeuille de couverture est donné par

$$\bar{V}_0(\Phi^*) = \mathbb{E}^*(\bar{f})$$

Par définition de $C^*(f)$ et $C_*(f)$

$$\begin{aligned} C^*(f) &= \inf \{ x \in \mathbb{R}_+ : \exists \Phi = (\Phi_k)_{k=0,1} \text{ t.q. } V_0(\Phi) = x \text{ et } \bar{V}_1(\Phi) \geq \bar{f} \} \\ C_*(f) &= \sup \{ x \in [0, \infty) : \exists (\Phi_k)_{k=0,1} \text{ t.q. } V_0(\Phi) = x \text{ et } \bar{V}_1(\Phi) \leq \bar{f} \} \end{aligned}$$

nous avons,

$$\forall \Phi : \bar{V}_1(\Phi) \geq \bar{f} \implies \mathbb{E}^*(\bar{V}_1(\Phi)) \geq \mathbb{E}^*(\bar{f}) = \bar{V}_0(\Phi^*)$$

et

$$\forall \Phi : \bar{V}_1(\Phi) \leq \bar{f} \implies \mathbb{E}^*(\bar{V}_1(\Phi)) \leq \mathbb{E}^*(\bar{f}) = \bar{V}_0(\Phi^*)$$

Par conséquent, on obtient l'encadrement suivant

$$C_*(f) \leq \bar{V}_0(\Phi^*) = \mathbb{E}^*(\bar{f}) \leq C^*(f)$$

Comme la stratégie de couverture Φ^* appartient aux deux ensembles décrits ci-dessus, on a aussi

$$C^*(f) \leq \bar{V}_0(\Phi^*) \leq C_*(f)$$

On en conclut que

$$\bar{V}_0(\Phi^*) = \mathbb{E}^*(\bar{f}) = C(f) = C^*(f) = C_*(f)$$

■

Exercice 8 Déterminer les prix, et les stratégies de couverture des options de vente suivantes

1)	Ω	$\bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2)$	$S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2)$	$\bar{f} = (10 - \bar{S}_1^2)_+$
	ω^1	(1; 5)	(1; 3)	7
	ω^2	(1; 5)	(1; 6)	4
2)	Ω	$\bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2)$	$S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2)$	$\bar{f} = (8 - \bar{S}_1^2)_+$
	ω^1	(1; 5)	(1; 1)	7
	ω^2	(1; 5)	(1; 10)	0
3)	Ω	$\bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2)$	$S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2)$	$\bar{f} = (8 - \bar{S}_1^2)_+$
	ω^1	(1; 5)	(1; 2)	6
	ω^2	(1; 5)	(1; 7)	1
4)	Ω	$\bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2)$	$S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2)$	$\bar{f} = (10 - \bar{S}_1^2)_+$
	ω^1	(1; 5)	(1; 3)	7
	ω^2	(1; 5)	(1; 50)	0

$$\begin{array}{l}
5) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (100 - \bar{S}_1^2)_+ \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 1) \quad \quad \quad 99 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 20) \quad \quad \quad 80 \\
6) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (6 - \bar{S}_1^2)_+ \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 2) \quad \quad \quad 4 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 7) \quad \quad \quad 0 \\
7) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (6 - \bar{S}_1^2)_+ \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 3) \quad \quad \quad 3 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 50) \quad \quad \quad 0
\end{array}$$

Solution : Les prix, et les stratégies de couverture des options de vente sont donnés ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
1) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (10 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{1}{3}\bar{f}_1 + \frac{2}{3}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{6\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2}{3}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{3} \right) \\ = \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = 5 \quad = \left(\frac{30}{3}, \frac{-3}{3} \right) = (10; -1) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 3) \quad \quad \quad 7 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 6) \quad \quad \quad 4 \\
2) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (8 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{5}{9}\bar{f}_1 + \frac{4}{9}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{10\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{9}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{9} \right) \\ = \frac{35}{9} \quad = \left(\frac{70}{9}, \frac{-7}{9} \right) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 1) \quad \quad \quad 7 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 10) \quad \quad \quad 0 \\
3) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (8 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{2}{5}\bar{f}_1 + \frac{3}{5}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{7\bar{f}_1 - 2\bar{f}_2}{5}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{5} \right) \\ = \frac{15}{5} = 3 \quad = \left(\frac{40}{5}, \frac{-5}{5} \right) = (8; -1) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 2) \quad \quad \quad 6 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 7) \quad \quad \quad 1 \\
4) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (10 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{45}{47}\bar{f}_1 + \frac{2}{47}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{50\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2}{47}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{47} \right) \\ = \frac{315}{47} \quad = \left(\frac{350}{47}, \frac{-7}{47} \right) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 3) \quad \quad \quad 7 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 50) \quad \quad \quad 0 \\
5) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (100 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{15}{19}\bar{f}_1 + \frac{4}{19}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{20\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{19}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{19} \right) \\ = \frac{1805}{19} \quad = (100; -1) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 1) \quad \quad \quad 99 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 20) \quad \quad \quad 80 \\
6) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (6 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{2}{5}\bar{f}_1 + \frac{3}{5}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{7\bar{f}_1 - 2\bar{f}_2}{5}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{5} \right) \\ = \frac{8}{5} \quad = \left(\frac{28}{5}, \frac{-4}{5} \right) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 2) \quad \quad \quad 4 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 7) \quad \quad \quad 0 \\
7) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (6 - \bar{S}_1^2)_+ \quad \left| \begin{array}{l} C(f) \\ \frac{45}{47}\bar{f}_1 + \frac{2}{47}\bar{f}_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\phi^1, *, \phi^2, *) \\ \left(\frac{50\bar{f}_1 - 3\bar{f}_2}{47}, \frac{\bar{f}_2 - \bar{f}_1}{47} \right) \\ = \frac{135}{47} \quad = \left(\frac{150}{47}, \frac{-3}{47} \right) \end{array} \\
\omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 3) \quad \quad \quad 3 \\
\omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad \quad (1; 50) \quad \quad \quad 0
\end{array}$$

■