TD - Licence 3 MASS [Corrigés]

Exercice 1 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1;4)$	$(1,05;5)$
ω^2	$(1;4)$	$(1,05;10)$

1. *Construire l'arbre des épreuves représentant l'évolution de ce marché financier.*
2. *On note $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$, et $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1)$ les algèbres représentant l'information disponible à l'origine, et au temps 1. Montrer que*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

3. *Calculer le taux d'intérêt $r = \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1}$ de l'actif sans risque.*

Solution : Les deux premières questions sont immédiates. Pour résoudre la dernière, on notera que

$$r = \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1} = \frac{1,05 - 1}{1} = 5\%$$

■

Exercice 2 *Résoudre les mêmes questions que celles posées dans l'exercice 1 pour le modèle de marché financier suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$	$S_2 = (S_2^1, S_2^2)$
ω^1	$(1;5)$	$(1,05;10)$	$(1,10;20)$
ω^2	$(1;5)$	$(1,05;5)$	$(1,10;10)$
ω^3	$(1;5)$	$(1,05;5)$	$(1,10;5)$

Solution : Les deux premières questions sont à nouveau immédiates. Pour résoudre la dernière, on notera que

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1} = \frac{1,05 - 1}{1} = 5\% \\ &\simeq \frac{\Delta S_2^1}{S_1^1} = \frac{1,10 - 1,05}{1,05} = \frac{0,05}{1,05} \simeq 5\% \end{aligned}$$

Il convient de souligner que les valeurs des actifs sont des valeurs arrondies. Pour un rendement fixe de 5%, la valeur "mathématique" exacte de S_2^1 est donnée par

$$S_2^1 = (1 + 0,05)^2 = 1,1025 \Longrightarrow \frac{\Delta S_2^1}{S_1^1} = \frac{1,1025 - 1,05}{1,05} = \frac{0,0525}{1,05} = 5\%$$

■

Exercice 3 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1; 4)$	$(1,05; 5)$
ω^2	$(1; 4)$	$(1,05; 10)$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert 8 parts d'actifs sans risque, pour acheter 2 parts d'actifs risqué.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on vend, ou rembourse, les actifs sans risque, et l'on conserve les deux parts d'actifs risqués.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins 800 Euros à moindre frais.*

Solution :

1. Les prix initiaux étant fixés $(S_0^1; S_0^2)(\omega_1) = (S_0^1; S_0^2)(\omega_2) = (1; 4)$, le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert $-\Phi_1^1 = 8$ parts d'actifs sans risque, pour acheter $\Phi_2 = 2$ parts d'actifs risqué

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (-8 \ ; \ 2)$$

est donné par

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 \ S_0^1 + \Phi_1^2 \ S_0^2 = -8 \times 1 + 2 \times 4 = 0$$

2. Après évolution du cours des actifs, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) \ S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) \ S_1^2(\omega^1) \\ &= -8 \times 1,05 + 2 \times 5 = 10 - 8,4 = 1,6 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) \ S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) \ S_1^2(\omega^2) \\ &= -8 \times 1,05 + 2 \times 10 = 20 - 8,4 = 11,6 \end{aligned}$$

3. Pour gagner de l'argent à moindre frais, la stratégie consiste à s'endetter de $4m$ parts d'actifs non risqué (ou vendre à découvert $4m$ part de ces actifs non risqués), pour acheter m parts d'actif risqué. Le coût initial d'une telle opération est nul

$$\Phi_1 = (-4m, m) \Rightarrow V_0(\Phi) = (-4m) \times 1 + (m) \times 4 = 0$$

Les valeurs possibles du portefeuille à l'instant suivant sont données par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= (-4m) \times 1,05 + (m) \times 5 = 0,8 \ m \\ V_1(\Phi)(\omega^2) &= (-4m) \times 1,05 + (m) \times 10 = 5,8 \ m \end{aligned}$$

Si l'on rembourse les $(-4m)$ parts actifs sans risque, et l'on conserve les m parts d'actifs risqués, la valeur de notre portefeuille sera telle que

$$\Phi_2 = (-4m, m) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^1 \times S_1^2 = V_1(\Phi) \geq 0,8\ m$$

Pour gagner 800 Euros à moindre frais, il suffit donc d'emprunter 4000 parts d'actifs non risqué, pour acheter 1000 parts d'actifs risqués. Le coût initial de cette opération sera nul, et après l'annonce des prix S_1 des actifs, notre gain prendra l'une des valeurs

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 800 \quad \text{ou} \quad V_1(\Phi)(\omega^2) = 5.800$$

■

Exercice 4 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1;4)$	$(1,05;2)$
ω^2	$(1;4)$	$(1,05;3)$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 2 *parts d'actifs risqués, pour acheter* 8 *parts d'actifs sans risque. Autrement dit, l'investisseur vend deux parts d'actions risquées qu'il ne possède pas, et dépose immédiatement l'argent obtenu par cette vente dans un compte épargne qui rapporte* 5%.
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos deux parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos huit parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 1.200 *Euros à moindre frais.*

Solution :

1. La stratégie initiale d'un investisseur vendant à découvert 2 parts d'actifs risqués, pour acheter 8 parts d'actifs sans risque est représenté par le vecteur

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (8\ ;\ -2)$$

Le coût d'acquisition du portefeuille correspondant est nulle

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1\ S_0^1 + \Phi_1^2\ S_0^2 = 8 \times 1 + (-2) \times 4 = 0$$

2. Après évolution du cours des actifs, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1)\ S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1)\ S_1^2(\omega^1) \\ &= 8 \times 1,05 + (-2) \times 2 = 8,4 - 4 = 4,4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2)\ S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2)\ S_1^2(\omega^2) \\ &= 8 \times 1,05 + (-2) \times 3 = 8,4 - 6 = 2,4 \end{aligned}$$

Lorsque l'on rembourse nos deux parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos huit parts d'actifs sans risques, nous utilisons la stratégie de réaménageant

$$\Phi_2 = \Phi_1 = (8, -2) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^1 \times S_1^2 = V_1(\Phi) = \Phi_1^1\ S_1^1 + \Phi_1^2\ S_1^2$$

3. Pour gagner de l'argent à moindre frais, une stratégie consiste à vendre à découvert m parts d'actifs risqués, pour acheter 4 m parts d'actif non risqué. Le coût initial d'une telle opération est nul

$$\Phi_1 = (4m, -m) \Rightarrow V_0(\Phi) = (4m) \times 1 + (-m) \times 4 = 0$$

Les valeurs possibles du portefeuille à l'instant suivant sont données par

$$\begin{array}{rcl} V_1(\Phi)(\omega^1) & = & (4m) \times 1,05 + (-m) \times 2 = 2,2\ m \\ V_1(\Phi)(\omega^2) & = & (4m) \times 1,05 + (-m) \times 3 = 1,2\ m \end{array}$$

Si l'on rembourse les $(-m)$ parts actifs risqués, et l'on conserve les $(4m)$ parts d'actifs non risqués, la valeur de notre portefeuille sera telle que

$$\Phi_2 = (4m, -m) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^1 \times S_1^2 = V_1(\Phi) \geq 1,2\ m$$

Pour gagner 1.200 Euros à moindre frais, il suffit donc de vendre à découvert 1000 parts d'actifs risqués, pour acheter 4000 parts d'actifs non risqués. Le coût initial de cette opération sera nul, et après l'annonce des prix S_1 des actifs, notre gain prendra l'une des valeurs

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 2.200 \quad \text{ou} \quad V_1(\Phi)(\omega^2) = 1.200$$

■

Exercice 5 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1; 10)$	$(1,05; 5)$
ω^2	$(1; 10)$	$(1,05; 10)$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 20 *parts d'actifs risqués, et dépose immédiatement l'argent obtenu, soit* 200 *Euros, dans un compte épargne à* 5%.
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos vingt parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos deux cents parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 100 *Euros à moindre frais.*

Solution :

1. La stratégie initiale d'un investisseur vendant à découvert 20 parts d'actifs risqués, pour acheter 200 parts d'actifs sans risques est représenté par le vecteur

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (200 \ ; \ -20)$$

Le coût d'acquisition du portefeuille correspondant est nulle

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 \ S_0^1 + \Phi_1^2 \ S_0^2 = 200 \times 1 + (-20) \times 10 = 0$$

2. Après évolution du cours des actifs, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) \ S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) \ S_1^2(\omega^1) \\ &= 200 \times 1,05 + (-20) \times 5 = 210 - 100 = 110 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) \ S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) \ S_1^2(\omega^2) \\ &= 200 \times 1,05 + (-20) \times 10 = 210 - 100 = 10 \end{aligned}$$

Lorsque l'on rembourse nos deux vingt parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos deux cents parts d'actifs sans risques, nous utilisons la stratégie de réaménagenemt

$$\Phi_2 = \Phi_1 = (200 \ ; \ -20) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^1 \times S_1^2 = V_1(\Phi) = \Phi_1^1 \ S_1^1 + \Phi_1^2 \ S_1^2$$

3. Pour gagner de l'argent à moindre frais, une stratégie consiste à vendre à découvert m parts d'actifs risqués, pour placer ($10 \ m$) Euros dans un un compte épargne à 5%. Le coût initial d'une telle opération est nul

$$\Phi_1 = (10m \ ; \ -m) \Rightarrow V_0(\Phi) = (10m) \times 1 + (-m) \times 10 = 0$$

Les valeurs possibles du portefeuille à l'instant suivant sont données par

$$\begin{array}{rcl} V_1(\Phi)(\omega^1) & = & (10m) \times 1,05 + (-m) \times 5 = 5,5\ m \\ V_1(\Phi)(\omega^2) & = & (10m) \times 1,05 + (-m) \times 10 = 0,5\ m \end{array}$$

Si l'on rembourse les $(-m)$ parts actifs risqués, et l'on conserve les $(10m)$ parts d'actifs non risqués, la valeur de notre portefeuille sera telle que

$$\Phi_2 = (10m\ ;\ -m) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^1 \times S_1^2 = V_1(\Phi) \geq 0,5\ m$$

Pour gagner 100 Euros à moindre frais, il suffit donc de vendre à découvert 200 parts d'actifs risqués, pour placer 2000 Euros dans un compte épargne à 5%. Le coût initial de cette opération sera nul, et après l'annonce des prix S_1 des actifs, notre gain prendra l'une des valeurs

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 100 \quad \text{ou} \quad V_1(\Phi)(\omega^2) = 1.100$$

■

Exercice 6 *Montrer que le modèle de marché suivant est viable*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1; 5)$	$(1,05; 10)$
ω^2	$(1; 5)$	$(1,05; 5)$

Solution : S'il existait une stratégie d'arbitrage, on aurait initialement

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1\ S_0^1 + \Phi_1^2\ S_0^2 = \Phi_1^1\ 1 + \Phi_1^2\ 5 = 0 \Rightarrow \Phi_1^1 = -5 \times \Phi_1^2$$

Après évolution du cours des actifs, nous aurions

$$\begin{array}{rcl} V_1(\Phi)(\omega^1) & = & \Phi_1^1(\omega^1)\ S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1)\ S_1^2(\omega^1) \\ & = & (-5\Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 10 = (10 - 5,25)\ \Phi_1^2 = 4,75\ \Phi_1^2 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} V_1(\Phi)(\omega^2) & = & \Phi_1^1(\omega^2)\ S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2)\ S_1^2(\omega^2) \\ & = & (-5\Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 5 = (-5,25 + 5)\ \Phi_1^2 = -0,25\ \Phi_1^2 \end{array}$$

Par conséquent, les valeurs possibles des portefeuilles $V_1(\Phi)(\omega^1)$, et $V_1(\Phi)(\omega^2)$ sont de signes contraires. On ne peut donc pas trouver de stratégie d'arbitrage. ■

Exercice 7 *On considère le marché viable étudié dans l'exercice 6.*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$	$f = (7 - S_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1,05;5)$	2
ω^2	$(1;5)$	$(1,05;10)$	0

1. *Calculer la valeur d'acquisition du portefeuille d'un investisseur vendant à découvert $2/5$ de part de titre risqué, et achetant $4/1,05$ parts d'actifs sans risques.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille, après évolution des cours des actifs.*
3. *En déduire que ce portefeuille permet de couvrir l'option de vente associée à la fonction de paiement f.*

Solution :

1. La stratégie initiale d'un investisseur vendant à découvert $2/5$ de part de titre risqué, et achetant $4/1,05$ parts d'actifs sans risques, est donnée par le vecteur

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = \left(\frac{4}{1,05} \; ; \; -\frac{2}{5} \right)$$

La valeur d'acquisition du portefeuille initial est donc donnée par

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= \Phi_1^1 \; S_0^1 + \Phi_1^2 \; S_0^2 \\ &= \frac{4}{1,05} \times 1 + \left(-\frac{2}{5} \right) \times 5 \\ &= \frac{4}{1,05} - 2 = \frac{4 - 2,1}{1,05} = \frac{1,9}{1,05} \simeq 1,81 \end{aligned}$$

2. Après évolution des cours des actifs, les deux valeurs possibles de ce portefeuille sont déterminées par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) \; S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) \; S_1^2(\omega^1) \\ &= \frac{4}{1,05} \times 1,05 + \left(-\frac{2}{5} \right) \times 5 = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) \; S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) \; S_1^2(\omega^2) \\ &= \frac{4}{1,05} \times 1,05 + \left(-\frac{2}{5} \right) \times 10 = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall \omega \in \Omega \qquad V_1(\Phi)(\omega) \geq f(\omega)$$

On en conclut que ce portefeuille permet de couvrir l'option de vente associée à la fonction de paiement f.

■

Exercice 8 *On reprend le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 7.*

1. *Calculer l'endettement initial d'un investisseur empruntant $4/1,05$ parts d'actifs sans risques, et achetant $2/5$ de part de titres risqués.*
2. *Calculer les valeurs possibles de ce portefeuille, après l'évolution des cours du marché. En déduire que l'acheteur de l'option f pourra, avec ce portefeuille rembourser sa dette initiale.*

Solution :

1. La stratégie initiale $(-\Phi_1)$ d'un investisseur empruntant $4/1,05$ de part de titres sans risques, et achetant $2/5$ de part part d'actifs risqués, est donnée par le vecteur

$$-\Phi_1 = (-\Phi_1^1, -\Phi_1^2) = \left(-\frac{4}{1,05}\ ;\ \frac{2}{5}\right)$$

La valeur d'acquisition du portefeuille initial est donc donnée par

$$\begin{aligned} V_0(-\Phi) &= -\Phi_1^1\ S_0^1 - \Phi_1^2\ S_0^2 \\ &= -\frac{4}{1,05} \times 1 + \left(\frac{2}{5}\right) \times 5 \\ &= -\frac{4}{1,05} + 2 = -\frac{4-2,1}{1,05} = -\frac{1,9}{1,05} \simeq -1,81 \end{aligned}$$

2. Après évolution des cours des actifs, les deux valeurs possibles de ce portefeuille sont déterminées par

$$\begin{aligned} V_1(-\Phi)(\omega^1) &= -\Phi_1^1(\omega^1)\ S_1^1(\omega^1) - \Phi_1^2(\omega^1)\ S_1^2(\omega^1) \\ &= -\frac{4}{1,05} \times 1,05 + \frac{2}{5} \times 5 = -4 + 2 = -2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(-\Phi)(\omega^2) &= -\Phi_1^1(\omega^2)\ S_1^1(\omega^2) - \Phi_1^2(\omega^2)\ S_1^2(\omega^2) \\ &= -\frac{4}{1,05} \times 1,05 + \frac{2}{5} \times 10 = -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall \omega \in \Omega \qquad V_1(-\Phi)(\omega) + f(\omega) \geq 0$$

On en conclut que le portefeuille $-\Phi_1$ permet à l'acheteur de l'option f de rembourser sa dette initiale, s'élevant à $-1,81$.

■

Exercice 9 *On reprend à nouveau le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 7.*

1. *Caractériser les aménagement de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut* 1.
2. *Pour de tels portefeuilles, combien de parts d'actifs risqués doit-on vendre à découvert, de sorte à couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa. Vérifier qu'une telle stratégie d'emprunt ne permettra pas de couvrir l'option dans le second jeu d'aléa.*
3. *En conclure que le prix de l'option f est nécessairement plus élevé que* 1.

Solution :

1. Les aménagement $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$ de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut $V_0(\Phi) = 1$ sont données par

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1\ S_0^1 + \Phi_1^2\ S_0^2 = 1 \Longleftrightarrow \Phi_1^1 + 5\ \Phi_1^2 = 1$$

2. Après l'évolution des cours des actifs correspondant au premier jeu d'aléa ω^1, la valeur du portefeuille est donnée par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1 S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2\ S_1^2(\omega^1) = \Phi_1^1 \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 5 \\ &= (1 - 5\ \Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 5 = 1,05 - 0,25 \times \Phi_1^2 \end{aligned}$$

Pour couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa, nous devons avoir

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 1,05 - 0,25 \times \Phi_1^2 \geq 2 = f(\omega^1) \Longleftrightarrow \Phi_1^2 \leq -\frac{95}{25} = -\frac{19}{5}$$

Autrement dit, nous devons vendre à découvert au moins 19/5 de parts de titres risqués. Dans le second jeu d'aléa, une telle stratégie conduit à la valeur du portefeuille

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1 S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2\ S_1^2(\omega^2) = \Phi_1^1 \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 10 \\ &= (1 - 5\ \Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 10 = 1,05 + 4,75 \times \Phi_1^2 \\ &\leq 1,05 - 4,75 \times \frac{19}{5} = 1,05 - 0,95 \times 19 < 0 \end{aligned}$$

3. Nous avons montré que le vendeur ne pourra jamais honorer son engagement, et couvrir son option, s'il son prix de vente est 1. Autrement dit, nous avons

$$\{x \in [0,1]\ :\ \exists (\Phi_k)_{0 \leq k \leq n} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad V_n(\Phi) \geq f\} = \emptyset$$

Par conséquent, par définition de $C^\star(f)$, nous avons

$$\begin{aligned} C^\star(f) &= \inf \{x \in (1,\infty) : \exists (\Phi_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ t.q. } V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad V_n(\Phi) \geq f\} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

■

Exercice 10 *Soit* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$ *un marché financier à deux titres.* $(S^1_k, S^2_k)_{0\leq k\leq n}$. *On convient que l'actif sans risque est donné par*

$$S^1_0 = 1 \quad \text{et} \quad S^1_k = (1+r)\ S^1_{k-1} = (1+r)^k \quad \text{avec} \quad r > 0$$

On note $(\overline{S}^1_k, \overline{S}^2_k)_{0\leq k\leq n}$, *et* $(\overline{V}_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}$ *les valeurs réactualisées des actifs, et des portefeuilles définies par*

$$\overline{S}^i_k = \frac{S^i_k}{(1+r)^k} \quad \text{et} \quad \overline{V}_k(\Phi) = \frac{V_k(\Phi)}{(1+r)^k}$$

1. *Vérifier que les prix* $C^\star(f)$, *et* $C_\star(f)$, *associés à une option de fonction de paiement* f, *peuvent s'exprimer sous la forme suivante*

$$\begin{aligned} C^\star(f) &= \inf\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad \overline{V}_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}\right\} \\ C^\star(f) &= \sup\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad \overline{V}_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_n(\Phi) \leq \overline{f}\right\} \end{aligned}$$

   où $\overline{f} = f/(1+r)^n$ *désigne la fonction de paiement réactualisée à la date d'échéance.*

2. *Soit* $\overline{K} = K/(1+r)^n$ *le prix d'exercice réactualisé à la date d'échéance. Vérifier les équivalences suivantes*

$$f = (K - S^2_n)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{K} - \overline{S}^2_n)_+$$

   et

$$f = (S^2_n - K)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{S}^2_n - \overline{K})_+$$