TD - Licence 3 MASS [Corrigés]

Exercice 1 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*, avec*

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = p \in [0,1]$$

On conviendra que $\{\epsilon_k = +1\}$ *représente l'évènement favorable ou le joueur gagne à la* $k^{\text{ième}}$ *séquence de jeu une unité de mise. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots \epsilon_k)$$

la filtration associée au déroulement du jeux, avec la convention $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*, pour* $k = 0$*. Vérifier que le processus de comptage des succés*

$$M_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale si $p = 1/2$*, une sur-martingale lorsque* $p \leq 1/2$*, et enfin une sous-martingale lorsque* $p \geq 1/2$*.*

Solution :
Il suffit de noter que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) \\
&= \mathbb{E}(\epsilon_{k+1}) = (+1)\ p + \ (-1)\ (1-p) = 2p - 1
\end{aligned}$$

On observe que les évènements $\{\epsilon_k = +1\}$ sont plus fréquents dès que $p \geq 1/2$. Dans ce cas, le jeux est alors favorable au joueur. ∎

Exercice 2 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Montrer que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$M_k = \sum_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots \epsilon_k)$*.*

Solution :
Comme dans l'exercice précédent, on note simplement que

$$\mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) \quad = \quad \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)) = 0$$

■

Exercice 3 *Soit* $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, de moyenne unité (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Vérifier que processus aléatoire* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ *défini par le produit*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$*.*

Solution :
Il suffit d'observe que l'on a

$$\mathbb{E}(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \quad = \quad \mathbb{E}(M_k \times \epsilon_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k \times \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)) = M_k$$

■

Exercice 4 *Soit* L_0*, une v.a., et* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ *et* $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$*, un couple de martingales définies sur un même espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$*. Vérifier que le processus* $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ *défini ci-dessous*

$$L_k = L_0 + \sum_{l=1}^{k} M_{l-1} \Delta N_l$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$*.*

Solution :
On observe que le processus retardé

$$M'_k = M_{k-1} \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$

est prévisible. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(L_k - L_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(M_{k-1} \Delta N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= M_{k-1} \; \mathbb{E}(\Delta N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= M_{k-1} \; \mathbb{E}(N_k - N_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1} \; [\mathbb{E}(N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - N_{k-1}] = 0
\end{aligned}$$

On obtient donc la propriété de martingale

$$\mathbb{E}(L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = L_{k-1}$$

■

Exercice 5 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. On note* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$*, la filtration d algèbres associée.*

1. *Vérifier que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k = \sum_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

   est une martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*.*

2. *On notera par la suite* $\sigma_k^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$*, les variances des v.a.* ϵ_k*. Montrer que*

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \sigma_{k+1}^2$$

   En déduire que les processus aléatoires

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k^2 - \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2 \quad et \quad M_k^2 - M_0^2 - \sum_{l=1}^{k} \sigma_l^2$$

   sont des martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$*.*

3. *Dans le cas où les v.a.* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *sont i.i.d. et centrées, les processus aléatoires*

$$M_k^2 - (k+1)\sigma^2 \quad et \quad M_k^2 - M_0^2 - k\ \sigma^2 \qquad avec \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

   forment des martingales.

Solution :

1. La démonstration de ce premier point est décrite dans la solution de l'exercice 2.
2. On a clairement

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(\epsilon_{k+1}^2 \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)) = \sigma_{k+1}^2$$

   Par conséquent, nous avons

$$\langle M \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}([M_l - M_{l-1}]^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2$$

   En invoquant la proposition suivante

   Propriétés 0.1 *Soit* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *une martingale réelle définie sur un espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*. Le processus aléatoire*

$$M_k^2 - \langle M \rangle_k$$

   est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$*.*

on en conclut que le processus aléatoires

$$M_k^2 - \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$. Par un raisonnement analogue, on montre que

$$M_k^2 - M_0^2 - (\langle M, N\rangle_k - \langle M, N\rangle_0) = M_k^2 - M_0^2 - \sum_{l=1}^{k} \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

3. Dans le cas où les v.a. $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ sont i.i.d. et centrées, le processus processus croissant associé à la martingale est donné par

$$\langle M\rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2 = (k+1)\sigma^2$$

D'après la question précédente, les processus

$$M_k^2 - (k+1)\sigma^2 \quad \text{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - k\ \sigma^2 \qquad \text{avec} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

forment des martingales par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

∎

Exercice 6 *Soit $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, de moyenne unité (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$), et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$, la filtration d algèbres associée.*

1. *Montrer que le processus aléatoire $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

2. *On notera par la suite $\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2)$, les variances des v.a. ϵ_k. Vérifier que le processus aléatoire*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l^2] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2]\ \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

Solution :

1. La démonstration de ce premier point est décrite dans la solution de l'exercice 3.
2. Avant de commencer, on peut noter que l'on a

$$\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2) = \mathbb{E}([\epsilon_k - 1]^2) = \mathbb{E}(\epsilon_k^2) - 1$$

D'autre part, un simple calcul montre que

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_k^2 \ [\epsilon_{k+1} - 1]^2 \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)) = M_k^2 \ \sigma_{k+1}^2 = [\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l] \ \sigma_{k+1}^2$$

D'après la proposition 0.1, le processus aléatoire

$$M_k^2 - \langle M \rangle_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l^2 - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2] \ \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

Exercice 7 *Soit* $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0 \leq k \leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, indépendantes et centrées (en ce sens où* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$*, et* $(Y'_k)_{0 \leq k \leq n}$*, définies par*

$$Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k \quad \text{et} \quad Y'_k = \epsilon'_0 + \ldots + \epsilon'_k$$

1. *Montrer que le compensateur* $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ *du processus produit* $X_k = Y_k Y'_k$*, est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. *En déduire que le processus*

$$[\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\sum_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k)$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$*.*

Solution :

1. Par définition du compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0\leq k\leq n}$, nous avons

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\Delta Y_l \Delta Y_l' \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon_l')$$

2. On en conclut que le processus

$$Y_k Y_k' - \langle Y, Y' \rangle_k = [\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l'] - \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon_l')$$

   est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

Exercice 8 *Soit* $((\epsilon_k, \epsilon_k'))_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, indépendantes et telles que*

$$\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 = \mathbb{E}(\epsilon_k')$$

et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$*. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon_1'), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon_k'))$$

la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(Y_k')_{0\leq k\leq n}$*, définies par*

$$Y_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l \quad \textit{et} \quad Y_k' = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l'$$

1. *Vérifier que la formule*

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_k, \epsilon_k') =_{\text{déf.}} \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon_k' - \mathbb{E}(\epsilon_k')]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon_k') - 1$$

2. *Montrer que le compensateur* $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0\leq k\leq n}$ *du processus produit* $X_k = Y_k Y_k'$*, est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon_m'] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon_l')$$

3. *En déduire que le processus*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l'] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon_m'] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon_l')$$

   est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$*.*

Solution :

1. On a clairement

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_k,\epsilon'_k) \;=\; \mathbb{E}([\epsilon_k-\mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k-\mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}([\epsilon_k-1][\epsilon'_k-1]) = \mathbb{E}(\epsilon_k\epsilon'_k)-1$$

2. Par définition du compensateur $(\langle Y,Y'\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle Y,Y'\rangle_k &= \sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}(\Delta Y_l\Delta Y'_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}([Y_{l-1}\times(\epsilon_l-1)]\ [Y'_{l-1}\times(\epsilon'_l-1)] \mid \mathcal{F}_{l-1})\\
&= \sum_{l=0}^{k}\ [Y_{l-1}Y'_{l-1}]\mathbb{E}((\epsilon_l-1)(\epsilon'_l-1)|\ \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{k=0}^{n}\ [Y_{l-1}Y'_{l-1}]\mathbb{E}((\epsilon_l-1)(\epsilon'_l-1))\\
&= \sum_{l=0}^{k}[\prod_{m=0}^{l-1}\epsilon_m\epsilon'_m]\times\mathbb{E}((\epsilon_l-1)(\epsilon'_l-1))
\end{aligned}$$

3. Par définition du compensateur $\langle Y,Y'\rangle$, on en conclut que le processus

$$Y_kY'_k-\langle Y,Y'\rangle_k = [\prod_{l=0}^{k}\epsilon_l]\times[\prod_{l=0}^{k}\epsilon'_l] - \sum_{l=0}^{k}[\prod_{m=0}^{l-1}\epsilon_m\epsilon'_m]\times\mathbb{E}((\epsilon_l-1)(\epsilon'_l-1))$$

   est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

Exercice 9 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0\leq k\leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, et de loi initiale η_0. On associe à toute fonction f_{k+1} sur E_{k+1}, la fonction $M_{k+1}(f_{k+1})$ sur E_k définie par*

$$\forall x_k\in E_k \qquad M_{k+1}(f_{k+1})(x_k) = \sum_{x_{k+1}\in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k,x_{k+1})f(x_{k+1}) = \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1})\mid X_k=x_k)$$

1. *Soit $f=(f_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de fonctions définies sur les espaces $(E_k)_{0\leq k\leq n}$. Montrer que le processus*

$$M_k(f) = \sum_{l=1}^{k}\ [f_l(X_l)-K_l(f_l)(X_{l-1})]$$

   est une martingale nulle en l'origine, par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}^X_k)_{0\leq k\leq n}$ associée au processus $(X_k)_{0\leq k\leq n}$.

2. *Déterminer le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0\leq k\leq n}$.*

Solution :

1. Il suffit de noter que l'on a

$$\Delta M_k(f) = M_k(f) - M_{k-1}(f) = f_k(X_k) - K_k(f_k)(X_{k-1}) = f_k(X_k) - \mathbb{E}[f_k(X_k) \mid X_{k-1})$$

   On en déduit de cette observation que

$$\mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid \mathcal{F}^X_{k-1}) = \mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid X_{k-1}) = 0$$

   On en conclut que

$$\mathbb{E}(M_k(f) \mid \mathcal{F}^X_{k-1}) = \sum_{l=1}^{k-1} \Delta M_l(f) + \mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid \mathcal{F}^X_{k-1}) = M_{k-1}(f)$$

2. Le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0\leq k\leq n}$ est donné par la formule

$$\begin{aligned}
\langle M(f)\rangle_k &= \langle M(f), M(f)\rangle_k \\
&= \sum_{l=1}^{k}[\mathbb{E}(M_l(f)M_l(f) \mid \mathcal{F}^X_{l-1}) - M_{l-1}(f)M_{l-1}(f)] \\
&= \sum_{l=1}^{k}\mathbb{E}([\Delta M_l(f)]^2 \mid \mathcal{F}^X_{l-1}) = \sum_{l=1}^{k}\mathbb{E}([f_l(X_l) - \mathbb{E}[f_l(X_l) \mid X_{l-1})]^2 \mid X_{l-1})
\end{aligned}$$

■

Exercice 10 *Soit $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes et centrées, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec*

$$u_k < 0 \leq v_k \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k\ p_k + v_k\ (1-p_k) = 0$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

   est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$) à valeurs dans les espaces

$$E^Y_k = \{\sum_{l=0}^{k} w_l \ :\ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\} = E^Y_{k-1} + \{u_k, v_k\}$$

3. *Vérifier que le processus $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

Solution :

1. Les v.a. ϵ_k étant supposées centrées, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = u_k\ p_k + v_k\ (1-p_k) = 0$$

Autrement dit, les probabilités p_k sont nécessairement données par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad p_k = v_k/[v_k - u_k]$$

On notera que

$$u_k < 0 \leq v_k \Longrightarrow -u_k > 0 \leq v_k \Longrightarrow p_k = v_k/[v_k - u_k] \in [0,1)$$

2. Le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

est clairement à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \{\sum_{l=0}^{k} w_l\ :\ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

Pour vérifier que ce dernier est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$, il suffit de noter que l'on a

$$\mathbb{E}(\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$$

3. On remarque que l'on a

$$Y_k = Y_{k-1} + \epsilon_k \Longrightarrow \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} + u_k \mid Y_{k-1} = y_k) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} + v_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k$$

Par conséquent, Y_k est un processus de Markov de loi initiale

$$\eta_0(y_0) = \mathbb{P}(\epsilon_0 = y_0) == p_0\ 1_{u_0}(y_0) + (1-p_0)\ 1_{v_0}(y_0)$$

et de probabilités de transitions

$$M_k(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}(Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k\ 1_{y_{k-1}+u_k}(y_k) + (1-p_k)\ 1_{y_{k-1}+v_k}(y_k)$$

■

Exercice 11 *Soit $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec*

$$u_k < 1 \leq v_k \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k \; p_k + v_k \; (1 - p_k) = 1$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 \times \ldots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$*) à valeurs dans les espaces*

$$E_k^Y = \{\prod_{l=0}^{k} w_l \;:\; w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\}$$

3. *Vérifier que le processus* $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$ *est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

Solution :

1. Les v.a. ϵ_k étant supposées telles que $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = u_k \; p_k + v_k \; (1 - p_k) = 1$$

Autrement dit, les probabilités p_k sont nécessairement données par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad p_k = (1 - v_k)/[u_k - v_k]$$

On notera que cette condition exprime le fait que 1 est un barycentre des points $\{u_k, v_k\}$. Cette propriété de ne peut donc être réalisée que si les états du système $\{u_k, v_k\}$ sont tels que

$$u_k < 1 \leq v_k \quad \text{ou} \quad v_k < 1 \leq u_k$$

2. Le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 \times \ldots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

est clairement à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \left\{\prod_{l=0}^{k} w_l \;:\; w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\right\} = E_{k-1}^Y . \{u_k, v_k\}$$

Pour vérifier que ce dernier est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$, il suffit de noter que l'on a

$$\mathbb{E}(\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} \times \mathbb{E}([\epsilon_k - 1] \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} \times [\mathbb{E}(\epsilon_k) - 1] = 0$$

3. On remarque que l'on a

$$Y_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k \Longrightarrow \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} u_k \mid Y_{k-1} = y_k) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} v_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k$$

Par conséquent, Y_k est un processus de Markov de loi initiale

$$\eta_0(y_0) = \mathbb{P}(\epsilon_0 = y_0) == p_0 \ 1_{u_0}(y_0) + (1-p_0) \ 1_{v_0}(y_0)$$

et de probabilités de transitions

$$M_k(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}(Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k \ 1_{y_{k-1}u_k}(y_k) + (1-p_k) \ 1_{y_{k-1}v_k}(y_k)$$

■

Exercice 12 *Soit $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0\leq k\leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, et de loi initiale η_0. On associe à toute fonction f_n sur E_n, le processus $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Z_k(f_n) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid Y_k) = M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)(Y_k)$$

avec la convention $M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n = Id$, lorsque $k = n$.

1. *Montrer que $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_k^Y)_{0\leq k\leq n}$ associée au processus $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$.*
2. *On considère la suite de fonctions $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ définies par la formule de récurrence inverse*

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= f_n(y_n) \\ V_k(y_k) &= \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \end{aligned}$$

Montrer que l'on a

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad V_k = M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)$$

En déduire que le processus $(V_k(Y_k))_{0\leq k\leq n}$ coïncide avec $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$.

Solution :

1. On a clairement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_k(f_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid \mathcal{F}_k^Y) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) \\ &= Z_{k-1}(f_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, le processus $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_k^Y)_{0\leq k\leq n}$.

2. D'après les formules de récurrence inverse, nous avons

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= f_n(y_n) \\ V_{n-1}(y_{n-1}) &= \mathbb{E}(V_n(Y_n) \mid Y_{n-1} = y_{n-1}) = M_n(V_n)(y_{n-1}) \\ V_{n-2}(y_{n-2}) &= \mathbb{E}(V_{n-1}(Y_{n-1}) \mid Y_{n-2} = y_{n-2}) = \mathbb{E}(M_n(V_n)(Y_{n-1}) \mid Y_{n-2} = y_{n-2}) \\ &= M_{n-1}M_n(V_n)(y_{n-2}) \\ \ldots &= \ldots \\ V_k(y_k) &= \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) = \mathbb{E}(M_{k+2}\ldots M_n(V_n)(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \\ &= M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(V_n)(y_k) \end{aligned}$$

On en conclut que

$$V_k = M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n) \quad \text{et} \quad V_k(Y_k) = M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)(Y_k) = Z_k(f_n)$$

■