

TD - Licence 3 MASS

Exercice 1 En utilisant un modèle d'arbre, calculer la probabilité des évènements suivants :

- (B₁) obtenir exactement une fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs ;
- (B₂) obtenir exactement deux fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs ;
- (B₃) obtenir exactement trois fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs.

Exercice 2 Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, de même loi de Bernoulli

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = 1/3$$

Expliquer l'espace des évènements associé à ce modèle.

Exercice 3 Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, de lois de Bernoulli

$$\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

Expliciter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Exercice 4 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne entre les espaces suivants

$$E_0 = \{1, 2\} \longrightarrow E_1 = \{1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{1, 2\} \longrightarrow E_3 = \{1\} \longrightarrow E_4 = \{1, 2\}$$

On note η_0 la loi initiale de la chaîne, et l'on désigne par $M_k(x_{k-1}, x_k)$ la probabilité de transition d'un état $x_{k-1} \in E_{k-1}$, vers un état $x_k \in E_k$. Décrire les probabilités pour que le processus $(X_k)_{0 \leq k \leq 4}$ suive les trajectoires suivantes

1. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 1 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 2$.
2. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 3 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1$.
3. $X_0 = 2 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1$.

Exercice 5 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur une période, entre les espaces suivants

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

1. Vérifier que cette évolution élémentaire peut être synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques

$$\begin{aligned} A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \end{aligned}$$

3. Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \end{aligned}$$

4. Déterminer les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$.

5. Vérifier les formules suivantes

$$X_0 = x_0 \quad \text{et} \quad X_1 = \sum_{i=1}^2 x_{1,i} 1_{\{\omega^i\}}$$

6. Déterminer la quantité moyenne $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$. Pour quelle probabilité \mathbb{P}^* sur Ω a-t-on

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 6 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur deux périodes, entre les espaces

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}\}$$

et synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1	X_2
ω^1	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,2}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,3}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,4}$

1. Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques

$$\begin{aligned} A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,1}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,1})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,2}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,2})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,3}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,3})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,4}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,4})\}) \end{aligned}$$

2. Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω

$$\mathcal{D}_0^X = \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\}$$

$$\mathcal{D}_1^X = \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\}$$

$$\mathcal{D}_2^X = \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x, y, z)\}) : (x, y, z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\}$$

3. Déterminer les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$.

4. Vérifier les formules suivantes

$$X_0 = x_0$$

$$X_1 = x_{1,1} 1_{\{\omega^1, \omega_2\}} + x_{1,2} 1_{\{\omega^3, \omega_4\}} \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{i=1}^4 x_{2,i} 1_{\omega^i}$$

5. Déterminer les quantités moyennes

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X)$$

6. Existe-t-il une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 7 On considère l'évolution markovienne $(X_k)_{k=0,1,2,3}$ sur trois périodes décrites par l'arbre des épreuves suivant

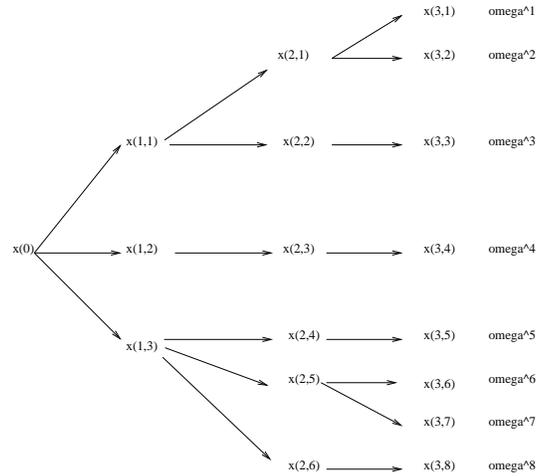


FIG. 1 –

1. Déterminer les évènements $A_{i,j}$ pour lesquels les décompositions suivantes sont satisfaites :

$$X_0 = x_0, \quad X_1 = \sum_{i=1}^3 x_{1,i} 1_{A_{1,i}}$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^6 x_{2,i} 1_{A_{2,i}}, \quad \text{et} \quad X_3 = \sum_{i=1}^8 x_{3,i} 1_{A_{3,i}}$$

Déterminer les décompositions $(\mathcal{D}_k^X)_{k=0,1,2,3}$ définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x, y, z)\}) : (x, y, z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \\ \mathcal{D}_3^X &= \{(X_0, X_1, X_2, X_3)^{-1}(\{(x, y, z, t)\}) : (x, y, z, t) \in (E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3)\} \end{aligned}$$

avec les espaces d'états

$$\begin{aligned} E_0 = \{x_0\} &\longrightarrow E_1 = \{x_{1,i} \mid i = 1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i}, \mid i = 1, \dots, 6\} \\ &\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i}, \mid i = 1, \dots, 8\} \end{aligned}$$

2. Déterminer les probabilités suivantes en fonction des probabilités des évènements élémentaires ω^i .

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(X_3 = x_{3,1} | X_2 = x_{2,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,2} | X_2 = x_{2,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,6} | X_2 = x_{2,5}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,7} | X_2 = x_{2,5}) \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbb{P}(X_2 = x_{2,1} | X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,2} | X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,4} | X_1 = x_{1,3}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,5} | X_1 = x_{1,3}) \end{array} \right., \quad \mathbb{P}(X_2 = x_{2,6} | X_1 = x_{1,3})$$

et enfin

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} | X_0 = x_0) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} | X_0 = x_0) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,3} | X_0 = x_0)$$

3. On note \mathcal{F}_k^X les algèbres engendrées par les décompositions \mathcal{D}_k^X , avec la séquence d'indices $k = 0, 1, 2, 3$. Déterminer les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}(X_3 | \mathcal{F}_2^X), \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$$

4. Existe-t-il une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_3 | \mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 8 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η_0 . On rappelle qu'une mesure de probabilités μ_k sur E_k est une suite de nombres $(\mu_k(x_k))_{x_k \in E_k} \in [0, 1]$ telle que $\sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) = 1$. On associe à une telle mesure μ_k sur E_k , la mesure $(\mu_k M_{k+1})$ sur E_{k+1} définie par

$$\forall x_{k+1} \in E_{k+1} \quad (\mu_k M_{k+1})(x_{k+1}) = \sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) M_{k+1}(x_k, x_{k+1})$$

1. Vérifier que l'on a

$$(\mu_k M_{k+1})M_{k+2} = \mu_k(M_{k+1}M_{k+2})$$

avec la probabilité de transition $(M_{k+1}M_{k+2})$ de E_k vers E_{k+2} définie par la formule

$$\begin{aligned} (M_{k+1}M_{k+2})(x_k, x_{k+2}) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1})M_{k+2}(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+2} = x_{k+2} \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

2. Plus généralement, on note $(M_{k+1} \dots M_{k+l})$ la probabilité de transition de E_k vers E_{k+l} définie par la formule

$$\begin{aligned} (M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_k, x_{k+l}) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, x_{k+l-1} \in E_{k+l-1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) \dots M_{k+l}(x_{k+l-1}, x_{k+l}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+l} = x_{k+l} \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

Vérifier que l'on a

$$\begin{aligned} \forall x_k \in E_k \quad \eta_k(x_k) &= \stackrel{\text{déf.}}{\mathbb{P}}(X_k = x_k) \\ &= \eta_0(M_1 \dots M_k)(x_k) \\ &= (\eta_0 M_1)(M_2 \dots M_k)(x_k) \\ &= ((\eta_0 M_1)M_2)(M_3 \dots M_k)(x_k) \\ &= \dots \\ &= (((\dots((\eta_0 M_1)M_2) \dots M_{k-1})M_k)(x_k) \end{aligned}$$

3. On associe à une fonction $f_{k+1} \in \mathbb{R}^{E_{k+1}}$, la fonction $M_k(f_{k+1}) \in \mathbb{R}^{E_k}$ définie par

$$\begin{aligned} M_k(f_{k+1})(x_k) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_k(x_k, x_{k+1}) f_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

Montrer que pour toute fonction $f_{k+l} \in \mathbb{R}^{E_{k+l}}$, nous avons

$$\mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l}) \mid X_k = x_k) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})(x_k)$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \eta_{k+l}(f_{k+l}) &= \stackrel{\text{déf.}}{\mathbb{E}}(f_{k+l}(X_{k+l})) \\ &= [\eta_k(M_{k+1} \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_k[(M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \\ &= [\eta_0(M_1 \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_0[(M_1 \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \end{aligned}$$

Exercice 9 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans un espace homogène et fini $E = \{x_1, \dots, x_d\}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale μ_0 . Dans ce contexte, les probabilités de transitions sont données par les matrices

$$M_k = \begin{pmatrix} M_k(x_1, x_1) & \dots & M_k(x_1, x_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_k(x_d, x_1) & \dots & M_k(x_d, x_d) \end{pmatrix}$$

On identifie les mesures de probabilités μ , et les fonctions f sur E aux vecteurs lignes et colonnes suivants

$$\mu = [\mu(x_1), \dots, \mu(x_d)] \quad \text{et} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{bmatrix}$$

1. Vérifier les formules matricielles suivantes

$$\forall x_i, x_j \in E \quad \mathbb{P}(X_{k+l} = x_j \mid X_k = x_i) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_i, x_j)$$

et

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \forall x_i \in E \quad \mathbb{E}(f(X_{k+l}) \mid X_k = x_i) = [M_{k+1} \dots M_{k+l}f](x_i)$$

et enfin

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \mathbb{E}(f(X_k)) = \eta_0 M_1 \dots M_k f$$

Exercice 10 On considère une chaîne de Markov homogène sur un espace à deux points $E = \{1, 2\}$, et associée à la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$. Les entrées $p_{i,j} \in [0, 1]$ sont telles que $p_{1,1} + p_{1,2} = 1 = p_{2,1} + p_{2,2}$. On conviendra que $c = p_{1,2} + p_{2,1} > 0$. Montrer (par récurrence sur le paramètre temporel) que les itérées M^n de la matrice M sont données par la formule

$$M^n = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Exercice 11 Soit $(X'_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E'_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M'_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η'_0 . On note $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ le processus historique de $(X'_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$X_k = (X'_0, \dots, X'_k)$$

1. Vérifier que $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans les espaces produits

$$E_k = (E'_0, \dots, E'_k)$$

2. Décrire les probabilités de transitions de $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Exercice 12 On considère une marche aléatoire $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie sur un espace de probabilités (Ω, \mathbb{P}) , d'origine $X_0 = 0$ et de probabilités de transitions homogènes

$$M(x, y) = \alpha 1_{x+1}(y) + (1 - \alpha) 1_{x-1}(y) \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1]$$

1. Décrire l'arbre des épreuves associé au processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.
2. Montrer que la position moyenne de la particule au temps n est donnée par la formule

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(X_k) = k \times (2\alpha - 1)$$

3. Vérifier que les transitions de la chaîne entre deux instants, l et $(l + m) \leq n$, sont données par la formule

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k - (m - k)] \mid X_l = x) = C_m^k \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}$$

pour tous les $k \in \{0, \dots, m\}$, et

$$\mathbb{P}(X_{l+m} \notin \{2k - m : k = 0, \dots, m\} \mid X_l = x) = 0$$

4. En déduire que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = \frac{(2k)!}{k!k!} (\alpha(1 - \alpha))^k$$

En utilisant la formule de Stirling ($k! \simeq \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$), montrer que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1 - \alpha))^k}{\sqrt{\pi k}} \quad (= 1/\sqrt{\pi k} \text{ si } \alpha = 1/2)$$

Exercice 13 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur \mathbb{R} , associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes

$$X_k = \sum_{p=0}^k \epsilon_p = X_{k-1} + \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Exercice 14 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur \mathbb{R} , associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes

$$X_k = \prod_{p=0}^k \epsilon_p = X_{k-1} \times \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.