TD - Licence 3 MASS [Corrections]

Exercice 1 *En utilisant un modèle d'arbre, calculer la probabilité des évènements suivants :*
(B_1) *obtenir exactement une fois le chiffre* 6 *lors de* 3 *lancer de dés successifs ;*
(B_2) *obtenir exactement deux fois le chiffre* 6 *lors de* 3 *lancer de dés successifs ;*
(B_3) *obtenir exactement trois fois le chiffre* 6 *lors de* 3 *lancer de dés successifs.*

Solution :
On représente les échecs ou les succés des trois lancers par trois v.a. de Bernoulli indépendantes

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1/6 \qquad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3$$

Pour calculer $\mathbb{P}(B_1)$, on utilise le modèle d'arbre binomial donné par la figure suivante

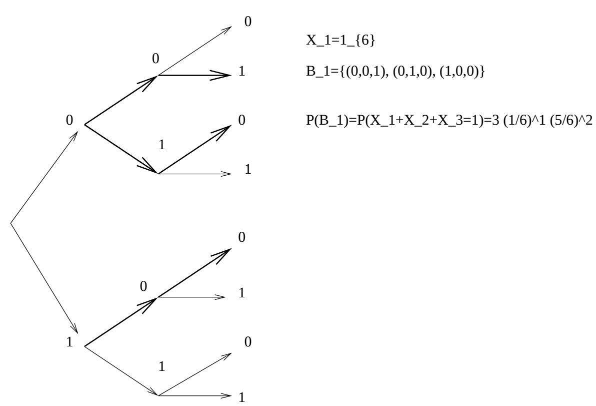

Fig. 1 – Chemins dans B_1

Pour calculer $\mathbb{P}(B_2)$, on utilise le modèle d'arbre binomial

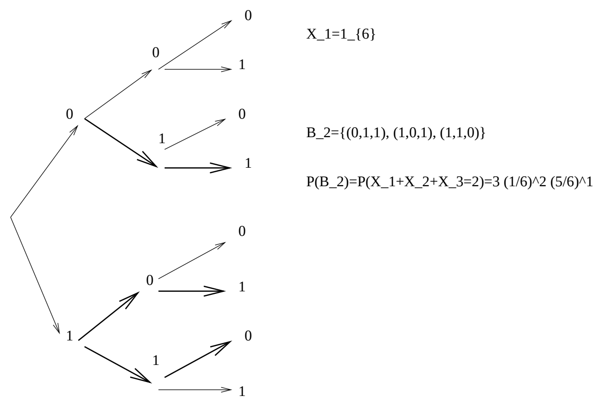

FIG. 2 – Chemins dans B_2

Enfin, pour calculer $\mathbb{P}(B_3)$, on note simplement que

$$\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1) = (1/6)^3$$

■

Exercice 2 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes* $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, *de même loi de Bernoulli*

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = 1/3$$

Expliter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Solution :
L'arbre des épreuves est donné par

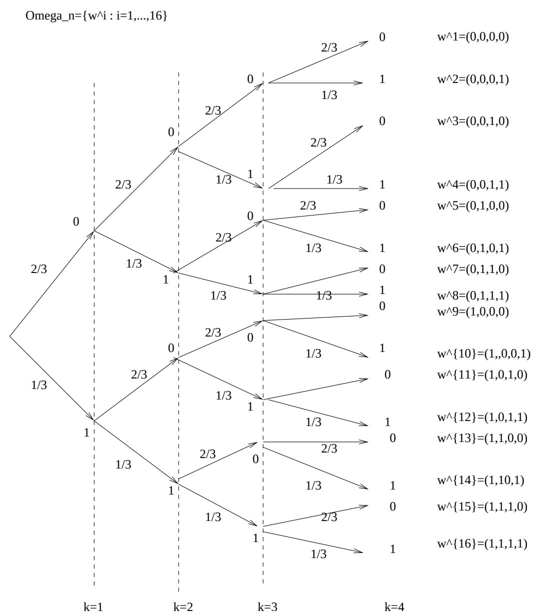

FIG. 3 – Arbre binomial

L'espace des épreuves associé à ce modèle binomial sur 4 périodes correspond à l'ensemble produit

$$\Omega = \{0, 1\}^{\{1,2,3,4\}} = \{\omega^i \ : \ i = 1, \dots, 16\}$$

■

Exercice 3 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes* $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$*, de lois de Bernoulli*

$$\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

Expliciter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Solution :
L'arbre des épreuves est donné par

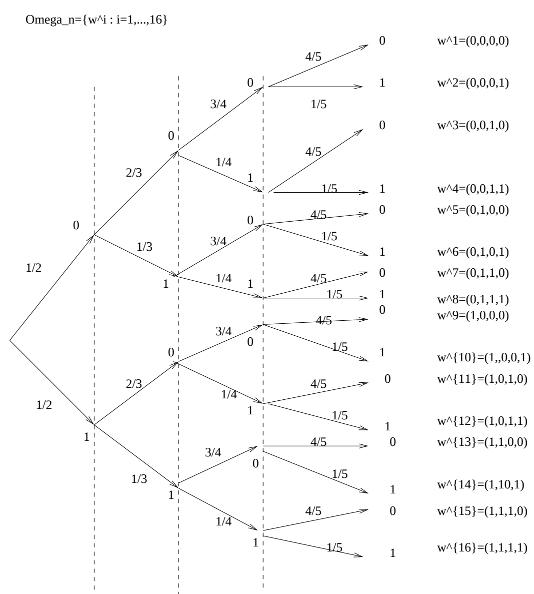

Fig. 4 – Arbre binomial

L'espace des épreuves associé à ce modèle binomial sur 4 périodes correspond à l'ensemble produit

$$\Omega = \{0,1\}^{\{1,2,3,4\}} = \{\omega^i \ : \ i = 1, \ldots, 16\}$$

■

Exercice 4 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne entre les espaces suivants*

$$E_0 = \{1,2\} \longrightarrow E_1 = \{1,2,3\} \longrightarrow E_2 = \{1,2\} \longrightarrow E_3 = \{1\} \longrightarrow E_4 = \{1,2\}$$

On note η_0 la loi initiale de la chaîne, et l'on désigne par $M_k(x_{k-1}, x_k)$ la probabilité de transition d'un état $x_{k-1} \in E_{k-1}$, vers un état $x_k \in E_k$. Décrire les probabilités pour que le processus $(X_k)_{0 \leq k \leq 4}$ suive les trajectoires suivantes

1. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 1 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 2.$
2. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 3 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1.$
3. $X_0 = 2 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1.$

Solution :
L'arbre des épreuves peut être décrit par un raisonnement similaire à ceux utilisés dans les exercices précédents. On a aussi clairement

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 2) & = & M_1(1,2)M_2(2,1)M_3(1,1)M_4(1,2) \\
\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 1) & = & M_1(1,3)M_2(3,2)M_3(2,1)M_4(1,1) \\
\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 1) & = & M_1(1,2)M_2(2,2)M_3(2,1)M_4(1,1)
\end{array}$$

∎

Exercice 5 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur une période, entre les espaces suivants*

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

1. *Vérifier que cette évolution élémentaire peut être synthétisée par le tableau suivant*

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. *Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques*

$$\begin{array}{rcl}
A_0(x_0) & = & X_0^{-1}(\{x_0\}) \\
A_1(x_0, x_{1,1}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\
A_1(x_0, x_{1,2}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\})
\end{array}$$

3. *Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω*

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{D}_0^X & = & \{X_0^{-1}(\{x\}) \ : \ x \in E_0\} \\
\mathcal{D}_1^X & = & \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x,y)\}) \ : \ (x,y) \in (E_0 \times E_1)\}
\end{array}$$

4. *Déterminer les algèbres $\mathcal{F}_k^X$ engendrées par les partitions $\mathcal{D}_k^X$, avec $k = 0, 1$.*

5. *Vérifier les formules suivantes*

$$X_0 = x_0 \quad \textit{et} \quad X_1 = \sum_{i=1}^{2} x_{1,i} \ 1_{\{\omega^i\}}$$

6. *Déterminer la quantité moyenne* $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X)$. *Pour quelle probabilité* $\mathbb{P}^\star$ *sur* Ω *a-t-on*

$$\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Solution :

1. L'arbre des épreuves associé à l'évolution markovienne sur une période

$$X_0 = x_0 \in E_0 = \{x_0\} \longrightarrow X_1 \in E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

est donné par la figure suivante.

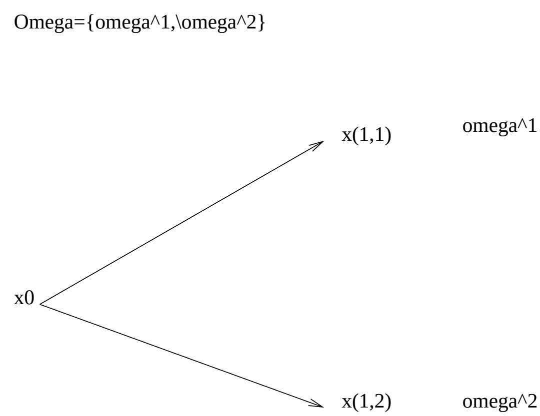

FIG. 5 –

Cette évolution markovienne correspond au tableau suivant

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. Les évènements cylindriques sur l'espace $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ sont donnés par

$$\begin{array}{rcl} A_0(x_0) & = & X_0^{-1}(\{x_0\}) = \{\omega^1, \omega^2\} = \Omega \\ A_1(x_0, x_{1,1}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) = \{\omega^1\} \\ A_1(x_0, x_{1,2}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) = \{\omega^2\} \end{array}$$

3. Les décompositions de l'espace Ω sont décrites par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_0^X & = & \{X_0^{-1}(\{x\}) \ : \ x \in E_0\} = \{\Omega\} \\ \mathcal{D}_1^X & = & \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x,y)\}) \ : \ (x,y) \in (E_0 \times E_1)\} = \{\{\omega^1\}, \{\omega^2\}\} \end{array}$$

4. Les algèbres $\mathcal{F}_k^X$ engendrées par les partitions $\mathcal{D}_k^X$, avec $k = 0, 1$, sont données par

$$\mathcal{F}_0^X = \{\Omega, \emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1^X = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\}$$

5. Immédiat. Il suffit en effet de noter que l'on a

$$\forall \omega \in \Omega = \{\omega^1, \omega^2\} \qquad X_0(\omega) = x_0$$

et

$$X_1(\omega) = \sum_{i=1}^{2} x_{1,i} \ 1_{\{\omega^i\}}(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} x_{1,1} & \text{si} & \omega = \omega^1 \\ x_{1,2} & \text{si} & \omega = \omega^2 \end{array} \right.$$

6. La quantité moyenne $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X)$ est donnée par la formule

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) & = & \mathbb{E}(X_1) \\ & = & x_{1,1} \ \mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} \mid X_0 = x_0) + x_{1,2} \ \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} \mid X_0 = x_0) \\ & = & \mathbb{E}(X_1) = x_{1,1} \ \mathbb{P}(\{\omega^1\}) + x_{1,2} \ \mathbb{P}(\{\omega^2\}) \end{array}$$

Pour trouver la probabilité $\mathbb{P}^\star$ il suffit de résoudre l'équation

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0 & \Longleftrightarrow & x_{1,1} \ \mathbb{P}(\{\omega^1\}) + x_{1,2} \ \mathbb{P}(\{\omega^2\}) = x_0 \\ & \Longleftrightarrow & x_{1,1} \ \mathbb{P}(\{\omega^1\}) + x_{1,2} \ (1 - \mathbb{P}(\{\omega^1\})) = x_0 \end{array}$$

Il est clair que cette équation admet une solution si, et seulement si, nous avons

$$x_{1,1} < x_0 < x_{1,2} \quad \text{ou} \quad x_{1,2} < x_0 < x_{1,1}$$

Dans ces deux situations, $\mathbb{P}^\star$ est donnée par

$$\mathbb{P}(\{\omega^1\}) = \frac{x_0 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{\omega^2\}) = \frac{x_{1,1} - x_0}{x_{1,1} - x_{1,2}}$$

■

Exercice 6 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur deux périodes, entre les espaces*

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}\}$$

et synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1	X_2
ω^1	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,2}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,3}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,4}$

1. *Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques*

$$\begin{array}{rcl} A_0(x_0) &=& X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0,x_{1,1}) &=& (X_0,X_1)^{-1}(\{(x_0,x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0,x_{1,2}) &=& (X_0,X_1)^{-1}(\{(x_0,x_{1,2})\}) \\ A_2(x_0,x_{1,1},x_{2,1}) &=& (X_0,X_1,X_2)^{-1}(\{(x_0,x_{1,1},x_{2,1})\}) \\ A_2(x_0,x_{1,1},x_{2,2}) &=& (X_0,X_1,X_2)^{-1}(\{(x_0,x_{1,1},x_{2,2})\}) \\ A_2(x_0,x_{1,2},x_{2,3}) &=& (X_0,X_1,X_2)^{-1}(\{(x_0,x_{1,2},x_{2,3})\}) \\ A_2(x_0,x_{1,2},x_{2,4}) &=& (X_0,X_1,X_2)^{-1}(\{(x_0,x_{1,2},x_{2,4})\}) \end{array}$$

2. *Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace* Ω

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_0^X &=& \{X_0^{-1}(\{x\})\ :\ x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &=& \{(X_0,X_1)^{-1}(\{(x,y)\})\ :\ (x,y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &=& \{(X_0,X_1,X_2)^{-1}(\{(x,y,z)\})\ :\ (x,y,z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \end{array}$$

3. *Déterminer les algèbres* $\mathcal{F}_k^X$ *engendrées par les partitions* $\mathcal{D}_k^X$*, avec* $k = 0, 1$.
4. *Vérifier les formules suivantes*

$$\begin{array}{rcl} X_0 &=& x_0 \\ X_1 &=& x_{1,1}\ 1_{\{\omega^1,\omega_2\}} + x_{1,2}\ 1_{\{\omega^3,\omega_4\}} \quad \textit{et} \quad X_2 = \sum_{i=1}^{4} x_{2,i}\ 1_{\omega^i} \end{array}$$

5. *Déterminer les quantités moyennes*

$$\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X)$$

6. *Existe-t-il une probabilité* $\mathbb{P}^\star$ *sur* Ω *telle que*

$$\mathbb{E}^\star(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Solution :
L'arbre des épreuves correspondant à ce modèle est décrit dans la figure suivante.

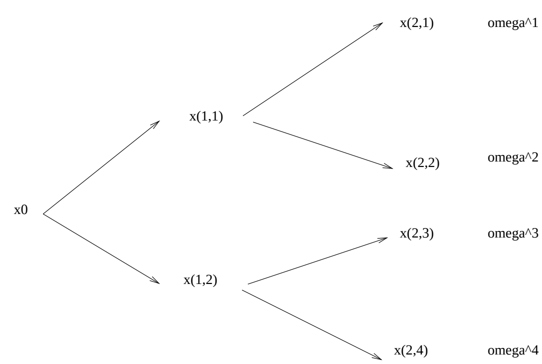

FIG. 6 – Arbre binomial

1. Sur l'espace des évènements $\Omega = \{\omega^i,\ i = 1,2,3,4\}$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} A_0(x_0) & = & X_0^{-1}(\{x_0\}) = \Omega \\ A_1(x_0, x_{1,1}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) = \{\omega^1, \omega^2\} \\ A_1(x_0, x_{1,2}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) = \{\omega^3, \omega^4\} \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,1}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,1})\}) = \{\omega^1\} \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,2}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,2})\}) = \{\omega^2\} \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,3}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,3})\}) = \{\omega^3\} \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,4}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,4})\}) = \{\omega^4\} \end{array}$$

2. Les décompositions $\mathcal{D}_k^X$ de Ω sont données par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_0^X & = & \{\Omega\} \\ \mathcal{D}_1^X & = & \{\{\omega^1, \omega^2\}, \{\omega^3, \omega^4\}\} \\ \mathcal{D}_2^X & = & \{\{\omega^1\}, \{\omega^2\}, \{\omega^3\}, \{\omega^4\}\} \end{array}$$

3. Les algèbres $\mathcal{F}_k^X$ engendrées par les partitions $\mathcal{D}_k^X$, sont décrites ci-après

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_0^X & = & \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_1^X & = & \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1, \omega^2\}, \{\omega^3, \omega^4\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2^X = \mathcal{P}(\Omega) \end{array}$$

4. Immédiat. Il suffit en effet de noter que pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} X_0(\omega) & = & x_0 \\ X_1(\omega) & = & x_{1,1}\ 1_{\{\omega^1, \omega^2\}}(\omega) + x_{1,2}\ 1_{\{\omega^3, \omega^4\}}(\omega) \quad \text{et} \quad X_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\ x_{2,i}\ 1_{\omega^i}(\omega) \end{array}$$

5. Par construction, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) & = & \mathbb{E}(X_1|) \\ & = & x_{1,1}\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} \mid X_0 = x_0) + x_{1,2}\mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} \mid X_0 = x_0) \\ & = & x_{1,1}\ \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\}) + x_{1,2}\ \mathbb{P}(\{\omega^2, \omega^4\}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) & = & \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,1})1_{\{\omega^1,\omega^2\}} + \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,2})1_{\{\omega^3,\omega^4\}} \\ \\ & = & \big(x_{2,1}\ \mathbb{P}(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{2,2}\ \mathbb{P}(\{\omega^2\} \mid \{\omega^1, \omega^2\})\big)\ 1_{\{\omega^1,\omega^2\}} \\ & & + \big(x_{2,3}\ \mathbb{P}(\{\omega^3\} \mid \{\omega^3, \omega^4\}) + x_{2,4}\ \mathbb{P}(\{\omega^4\} \mid \{\omega^3, \omega^4\})\big)\ 1_{\{\omega^3,\omega^4\}} \end{array}$$

6. Pour quelle probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur Ω a-t-on

$$\mathbb{E}^\star(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

D'après la question précédente, la condition $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1$ est équivalente au fait que

$$\begin{array}{rcl} x_{1,1} & = & x_{2,1}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1,\omega^2\}) + x_{2,2}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2\}) \\ & = & x_{2,1}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1,\omega^2\}) + x_{2,2}\ \big(1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1,\omega^2\})\big) \\ x_{1,2} & = & x_{2,3}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^3\} \mid \{\omega^3,\omega^4\}) + x_{2,4}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^4\} \mid \{\omega^3,\omega^4\}) \\ & = & x_{2,3}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^3\} \mid \{\omega^3,\omega^4\}) + x_{2,4}\ \big(1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^3\} \mid \{\omega^3,\omega^4\})\big) \end{array}$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'exercice 5 ces équations admettent une solution si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$1) \qquad x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2} \quad \text{ou} \quad x_{2,2} < x_{1,1} < x_{2,1}$$

et

$$2) \qquad x_{2,3} < x_{1,2} < x_{2,4} \quad \text{ou} \quad x_{2,4} < x_{1,2} < x_{2,3}$$

Dans ces conditions, nous avons

$$\mathbb{P}^\star(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1,\omega^2\}) = \frac{x_{1,1}-x_{2,2}}{x_{2,1}-x_{2,2}} = 1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2\})$$

et

$$\mathbb{P}^\star(\{\omega^3\} \mid \{\omega^3,\omega^4\}) = \frac{x_{1,2}-x_{2,4}}{x_{2,3}-x_{2,4}} = 1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^3\} \mid \{\omega^3,\omega^4\})$$

Il nous reste à noter que la condition $\mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$ est équivalente au fait que

$$x_0 = x_{1,1}\ \mathbb{P}^\star(\{\omega^1,\omega^2\}) + x_{1,2}\ (1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^1,\omega^2\}))$$

Comme précédemment, cette équation admet une solution si, et seulement si, nous avons

$$3) \qquad x_{1,1} < x_0 < x_{1,2} \quad \text{ou} \quad x_{1,2} < x_0 < x_{1,1}$$

Dans ce cas, on obtient

$$\mathbb{P}^\star(\{\omega^1,\omega^2\}) = \frac{x_0-x_{1,2}}{x_{1,1}-x_{1,2}} = 1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^3,\omega^4\})$$

Lorsque les trois conditions 1), 2), 3) sont vérifiées, on obtient aisement les valeurs de $\mathbb{P}^\star$. On a par exemple

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^\star(\{\omega^1\}) & = & \mathbb{P}^\star(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1,\omega^2\}) \times \mathbb{P}^\star(\{\omega^1,\omega^2\}) \\ & = & \dfrac{x_{1,1}-x_{2,2}}{x_{2,1}-x_{2,2}} \times \dfrac{x_0-x_{1,2}}{x_{1,1}-x_{1,2}} \end{array}$$

$\blacksquare$

Exercice 7 *On considère l'évolution markovienne* $(X_k)_{k=0,1,2,3}$ *sur trois périodes décrites par l'arbre des épreuves suivant*

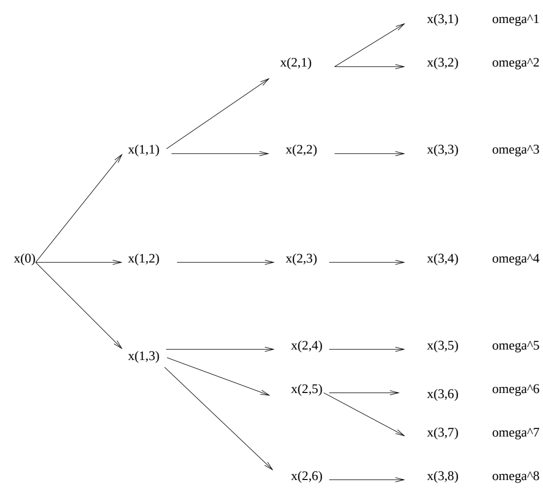

FIG. 7 –

1. *Déterminer les évènements* $A_{i,j}$ *pour lesquels les décompositions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \ , \qquad X_1 = \sum_{i=1}^{3} x_{1,i} \ 1_{A_{1,i}} \\ X_2 &= \sum_{i=1}^{6} x_{2,i} \ 1_{A_{2,i}} \ , \quad et \quad X_3 = \sum_{i=1}^{8} \ x_{3,i} \ 1_{A_{3,i}} \end{aligned}$$

Déterminer les décompositions $(\mathcal{D}_k^X)_{k=0,1,2,3}$ *définies par*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) \ : \ x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x,y)\}) \ : \ (x,y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x,y,z)\}) \ : \ (x,y,z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \\ \mathcal{D}_3^X &= \{(X_0, X_1, X_2, X_3)^{-1}(\{(x,y,z,t)\}) \ : \ (x,y,z,t) \in (E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3)\} \end{aligned}$$

avec les espaces d'états

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,i} \ i = 1,2,3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i}, \ i = 1, \ldots, 6\}$$

$$\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i}, \ i = 1, \ldots, 8\}$$

2. *Determiner les probabilités suivantes en fonction des probabilités des évènements élémentaires* ω^i.

$$\begin{array}{l|l}
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,1}|X_2 = x_{2,1}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,1}|X_1 = x_{1,1}) \\
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,2}|X_2 = x_{2,1}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,2}|X_1 = x_{1,1}) \\
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,6}|X_2 = x_{2,5}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,4}|X_1 = x_{1,3}) \\
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,7}|X_2 = x_{2,5}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,5}|X_1 = x_{1,3}) \ , \qquad \mathbb{P}(X_2 = x_{2,6}|X_1 = x_{1,3})
\end{array}$$

et enfin

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1}|X_0 = x_0) \qquad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2}|X_0 = x_0) \qquad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,3}|X_0 = x_0)$$

3. *On note* $\mathcal{F}_k^X$ *les algèbres engendrées par les décompositions* $\mathcal{D}_k^X$*, avec la séquence d'indices* $k = 0, 1, 2, 3$*. Déterminer les espérances conditionnelles*

$$\mathbb{E}(X_3|\mathcal{F}_2^X), \quad \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X)$$

4. *Existe-t-il une probabilité* $\mathbb{P}^\star$ *sur* Ω *telle que*

$$\mathbb{E}^\star(X_3|\mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^\star(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Solution :

1. Par construction de l'espace des aléas, nous avons les décompositions suivantes

$$\begin{array}{rcl}
X_0 & = & x_0 \\
X_1 & = & x_{1,1}\ 1_{\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}} + x_{1,2}\ 1_{\{\omega^4\}} + x_{1,3}\ 1_{\{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}} \\
X_2 & = & x_{2,1}\ 1_{\{\omega^1,\omega^2\}} + x_{2,2}\ 1_{\{\omega^3\}} + x_{2,3}\ 1_{\{\omega^4\}} \\
 & & \qquad + x_{2,4}\ 1_{\{\omega^5\}} + x_{2,5}\ 1_{\{\omega^6,\omega^7\}} + x_{2,6}\ 1_{\{\omega^8\}} \\
X_3 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{8} x_{3,i}\ 1_{\{\omega^i\}}
\end{array}$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{D}_0^X & = & \{\Omega\} \\
\mathcal{D}_1^X & = & \{\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\},\{\omega^4\},\{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}\} \\
\mathcal{D}_2^X & = & \{\{\omega^1,\omega^2\},\{\omega^3\},\{\omega^4\},\{\omega^5\},\{\omega^6,\omega^7\},\{\omega^8\}\} \\
\mathcal{D}_3^X & = & \{\{\omega^1\},\{\omega^2\},\{\omega^3\},\{\omega^4\},\{\omega^5\},\{\omega^6\},\{\omega^7\},\{\omega^8\}\}
\end{array}$$

avec les espaces d'états

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,i}\ i = 1,2,3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i},\ i = 1,\ldots,6\}$$
$$\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i},\ i = 1,\ldots,8\}$$

2. En utilisant les décompositions précédentes, on montre que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,1}|X_2 = x_{2,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1, \omega^2\}) \\
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,2}|X_2 = x_{2,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^2\} \mid \{\omega^1, \omega^2\}) \\
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,6}|X_2 = x_{2,5}) &= \mathbb{P}(\{\omega^6\} \mid \{\omega^6, \omega^7\}) \\
\mathbb{P}(X_3 = x_{3,7}|X_2 = x_{2,5}) &= \mathbb{P}(\{\omega^7\} \mid \{\omega^6, \omega^7\})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = x_{2,1}|X_1 = x_{1,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\} \mid \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\
\mathbb{P}(X_2 = x_{2,2}|X_1 = x_{1,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^3\} \mid \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\
\mathbb{P}(X_2 = x_{2,4}|X_1 = x_{1,3}) &= \mathbb{P}(\{\omega^5\} \mid \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \\
\mathbb{P}(X_2 = x_{2,5}|X_1 = x_{1,3}) &= \mathbb{P}(\{\omega^6, \omega^7\} \mid \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \\
\mathbb{P}(X_2 = x_{2,6}|X_1 = x_{1,3}) &= \mathbb{P}(\{\omega^8\} \mid \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1}|X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\
\mathbb{P}(X_1 = x_{1,2}|X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(\{\omega^4\}) \\
\mathbb{P}(X_1 = x_{1,3}|X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})
\end{aligned}$$

3. L'espérance conditionnelle de la v.a. X_3 en $\mathcal{F}_2^X$ est donnée par

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_3|\mathcal{F}_2^X) \\
&= \mathbb{E}(X_3|X_2) \\
&= \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,1})\ 1_{\{\omega^1,\omega^2\}} + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,2})\ 1_{\{\omega^3\}} \\
&\quad + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,3})\ 1_{\{\omega^4\}} + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,4})\ 1_{\{\omega^5\}} \\
&\quad + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,5})\ 1_{\{\omega^6,\omega^7\}} + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,6})\ 1_{\{\omega^8\}}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,1}) &= \sum_{i\in\{1,2\}} x_{3,i}\mathbb{P}(X_3 = x_{3,i}|X_2 = x_{2,1}) \\
&= x_{3,1} \times \mathbb{P}(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{3,2} \times \mathbb{P}(\{\omega^2\} \mid \{\omega^1, \omega^2\}) \\
\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,2}) &= x_{3,2} \\
\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,3}) &= x_{3,4} \\
\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,4}) &= x_{3,5} \\
\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,5}) &= \sum_{i\in\{6,7\}} x_{3,i}\mathbb{P}(X_3 = x_{3,i}|X_2 = x_{2,5}) \\
&= x_{3,6} \times \mathbb{P}(\{\omega^6\} \mid \{\omega^6, \omega^7\}) + x_{3,7} \times \mathbb{P}(\{\omega^7\} \mid \{\omega^6, \omega^7\}) \\
\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,6}) &= x_{3,8}
\end{aligned}$$

L'espérance conditionnelle de la v.a. X_2 en $\mathcal{F}_1^X$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) &= \mathbb{E}(X_2|X_1)\\ &= \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,1})\ 1_{\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}} + \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,2})\ 1_{\{\omega^4\}}\\ &\quad + \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,3})\ 1_{\{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,1}) &= \sum_{i\in\{1,2\}} x_{2,i}\mathbb{P}(X_2 = x_{2,i}|X_1 = x_{1,1})\\ &= x_{2,1}\mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) + x_{2,2}\mathbb{P}(\{\omega^3\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\})\\ \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,2}) &= x_{2,3}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,3})$$

$$= \sum_{i\in\{4,5,6\}} x_{2,i}\mathbb{P}(X_2 = x_{2,i}|X_1 = x_{1,3})$$

$$= x_{2,4}\mathbb{P}(\{\omega^5\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}) + x_{2,5}\mathbb{P}(\{\omega^6\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})$$

$$+x_{2,6}\mathbb{P}(\{\omega^8\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})$$

Afin l'espérance conditionnelle de la v.a. X_1 en $\mathcal{F}_0^X$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) &= \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X)\\ &= \sum_{i\in\{1,2,3\}} x_{1,i}\mathbb{P}(X_1 = x_{1,i}|X_0 = x_0)\\ &= x_{1,1}\mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) + x_{1,2}\mathbb{P}(\{\omega^4\}) + x_{1,3}\mathbb{P}(\{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})\end{aligned}$$

4. Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^\star(X_3|\mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^\star(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Dans cette situation, et en utilisant les décompositions précédentes, cette probabilité $\mathbb{P}^\star$ doit satisfaire les cinq conditions suivantes

$$\begin{aligned}x_{2,1} &\overset{(1)}{=} x_{3,1} \times \mathbb{P}(\{\omega^1\} \mid \{\omega^1,\omega^2\}) + x_{3,2} \times \mathbb{P}(\{\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2\})\\ x_{2,5} &\overset{(2)}{=} x_{3,6} \times \mathbb{P}(\{\omega^6\} \mid \{\omega^6,\omega^7\}) + x_{3,7} \times \mathbb{P}(\{\omega^7\} \mid \{\omega^6,\omega^7\})\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}x_{1,1} &\overset{(3)}{=} x_{2,1}\mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) + x_{2,2}\mathbb{P}(\{\omega^3\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\})\\ x_{1,3} &\overset{(4)}{=} x_{2,4}\mathbb{P}(\{\omega^5\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}) + x_{2,5}\mathbb{P}(\{\omega^6\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})\\ &\quad +x_{2,6}\mathbb{P}(\{\omega^8\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})\end{aligned}$$

et enfin

$$x_0 \overset{(5)}{=} x_{1,1}\mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) + x_{1,2}\mathbb{P}(\{\omega^4\}) + x_{1,3}\mathbb{P}(\{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})$$

Les trois premières conditions expriment le fait que les états $x_{2,1}$, $x_{2,5}$, et $x_{1,1}$, sont respectivement des barycentres des couples de points $\{x_{3,1}, x_{3,2}\}$, $\{x_{3,6}, x_{3,7}\}$, et enfin $\{x_{2,1}, x_{2,2}\}$. On peux donc résoudre ces trois équations, si et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{array}{llcl}
1) & x_{3,1} < x_{2,1} < x_{3,2} & \text{ou} & x_{3,2} < x_{2,1} < x_{3,1} \\
2) & x_{3,6} < x_{2,5} < x_{3,7} & \text{ou} & x_{3,7} < x_{2,5} < x_{3,6} \\
3) & x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2} & \text{ou} & x_{2,2} < x_{1,1} < x_{2,1}
\end{array}$$

Dans ces conditions, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\star(\{\omega^1\}|\{\omega^1,\omega^2\}) &= \frac{x_{2,1}-x_{3,2}}{x_{3,1}-x_{3,2}} = 1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^2\}|\{\omega^1,\omega^2\}) \\
\mathbb{P}^\star(\{\omega^6\}|\{\omega^6,\omega^7\}) &= \frac{x_{2,5}-x_{3,7}}{x_{3,6}-x_{3,7}} = 1-\mathbb{P}^\star(\{\omega^7\}|\{\omega^6,\omega^7\}) \\
\mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) &= \frac{x_{1,1}-x_{2,2}}{x_{2,1}-x_{2,2}} \\
&= 1-\mathbb{P}(\{\omega^3\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\})
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations (4) et (5) conditions expriment le fait que les états $x_{1,3}$, et x_0, sont respectivement des barycentres des triplets de points $\{x_{2,4}, x_{2,5}, x_{2,6}\}$, et $\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}$. On peux donc résoudre ces deux équations, si et seulement si, les états $x_{1,3}$, et x_0, sont dans les intervalles convexes contenant ces points. A l'inverse des situations examinées précédemment, il existe plusieurs solutions. Par exemple, lorsque l'on a

$$x_{1,1} < x_0 < x_{1,2} < x_{1,3}$$

l'équation (5) admet pour solution (non unique)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}) &= 0 \\
\mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) &= \frac{x_0-x_{1,2}}{x_{1,1}-x_{1,2}} = 1-\mathbb{P}(\{\omega^4\})
\end{aligned}$$

Enfin, si l'on a

$$x_{2,4} < x_{1,3} < x_{2,5} < x_{2,6}$$

l'équation (4) admet pour solution (non unique)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\omega^8\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}) &= 0 \\
\mathbb{P}(\{\omega^5\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\}) &= \frac{x_{1,3}-x_{2,5}}{x_{2,4}-x_{2,5}} = 1-\mathbb{P}(\{\omega^6\} \mid \{\omega^5,\omega^6,\omega^7,\omega^8\})
\end{aligned}$$

Pour calculer les quantités $\mathbb{P}(\{\omega^i\})$ correspondantes, on procède de façon usuelle. On a par exemple

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\star(\{\omega^1\}) &= \mathbb{P}^\star(\{\omega^1\}|\{\omega^1,\omega^2\}) \times \mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2\} \mid \{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(\{\omega^1,\omega^2,\omega^3\}) \\
&= \frac{x_{2,1}-x_{3,2}}{x_{3,1}-x_{3,2}} \times \frac{x_{1,1}-x_{2,2}}{x_{2,1}-x_{2,2}} \times \frac{x_0-x_{1,2}}{x_{1,1}-x_{1,2}}
\end{aligned}$$

■

Exercice 8 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0\leq k\leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, et de loi initiale η_0. On rapelle qu'une mesure de probabilités μ_k sur E_k est une suite de nombres $(\mu_k(x_k))_{x_k\in E_k} \in [0,1]$ telle que $\sum_{x_k\in E_k}\mu_k(x_k) = 1$. On associe à une telle mesure μ_k sur E_k, la mesure $(\mu_k M_{k+1})$ sur E_{k+1} définie par*

$$\forall x_{k+1}\in E_{k+1} \qquad (\mu_k M_{k+1})(x_{k+1}) = \sum_{x_k\in E_k} \mu_k(x_k) M_{k+1}(x_k,x_{k+1})$$

1. *Vérifier que l'on a*

$$(\mu_k M_{k+1})M_{k+2} = \mu_k(M_{k+1}M_{k+2})$$

avec la probabilité de transition $(M_{k+1}M_{k+2})$ de E_k vers E_{k+2} définie par la formule

$$\begin{aligned}
(M_{k+1}M_{k+2})(x_k,x_{k+2}) &= \sum_{x_{k+1}\in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k,x_{k+1})M_{k+2}(x_{k+1},x_{k+2}) \\
&= \mathbb{P}(X_{k+2}=x_{k+2} \mid X_k = x_k)
\end{aligned}$$

2. *Plus généralement, on note $(M_{k+1}\ldots M_{k+l})$ la probabilité de transition de E_k vers E_{k+l} définie par la formule*

$$(M_{k+1}\ldots M_{k+l})(x_k,x_{k+l})$$

$$= \sum_{x_{k+1}\in E_{k+1},\ldots,x_{k+l-1}\in E_{k+l-1}} M_{k+1}(x_k,x_{k+1})\ldots M_{k+l}(x_{k+l-1},x_{k+l})$$

$$= \mathbb{P}(X_{k+l}=x_{k+l} \mid X_k = x_k)$$

Vérifier que l'on a

$$\begin{aligned}
\forall x_k\in E_k \qquad \eta_k(x_k) &=_{\text{déf.}} \mathbb{P}(X_k = x_k) \\
&= \eta_0(M_1\ldots M_k)(x_k) \\
&= (\eta_0 M_1)(M_2\ldots M_k)(x_k) \\
&= ((\eta_0 M_1)M_2)(M_3\ldots M_k)(x_k) \\
&= \ldots \\
&= ((\ldots((\eta_0 M_1)M_2)\ldots M_{k-1})M_k)(x_k)
\end{aligned}$$

3. *On associe à une fonction* $f_{k+1} \in \mathbb{R}^{E_{k+1}}$, *la fonction* $M_k(f_{k+1}) \in \mathbb{R}^{E_k}$ *définie par*

$$\begin{aligned} M_k(f_{k+1})(x_k) &= \sum_{x_{k+1}\in E_{k+1}} M_k(x_k, x_{k+1})\ f_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

Montrer que pour toute fonction $f_{k+l} \in \mathbb{R}^{E_{k+l}}$, *nous avons*

$$\mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l}) \mid X_k = x_k) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})(x_k)$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \eta_{k+l}(f_{k+l}) &=_{déf.} \mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l})) \\ &= [\eta_k(M_{k+1} \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_k[(M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \\ &= [\eta_0(M_1 \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_0[(M_1 \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \end{aligned}$$

Exercice 9 *Soit* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans un espace homogène et fini* $E = \{x_1, \dots, x_d\}$, *de probabilités de transitions* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, *et de loi initiale* μ_0. *Dans ce contexte, les probabilités de transitions sont données par les matrices*

$$M_k = \begin{pmatrix} M_k(x_1, x_1) & \dots & M_k(x_1, x_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_k(x_d, x_1) & \dots & M_k(x_d, x_d) \end{pmatrix}$$

On identifie les mesures de probabilités μ, *et les fonctions* f *sur* E *aux vecteurs lignes et colonnes suivants*

$$\mu = [\mu(x_1), \dots, \mu(x_d)] \quad \text{et} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{bmatrix}$$

1. *Vérifier les formules matricielles suivantes*

$$\forall x_i, x_j \in E \qquad \mathbb{P}(X_{k+l} = x_j \mid X_k = x_i) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_i, x_j)$$

et

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \forall x_i \in E \quad \mathbb{E}(f(X_{k+l}) \mid X_k = x_i) = [M_{k+1} \dots M_{k+l} f](x_i)$$

et enfin

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \qquad \mathbb{E}(f(X_k)) = \eta_0 M_1 \dots M_k f$$

Exercice 10 *On considère une chaîne de Markov homogène sur un espace à deux points* $E = \{1, 2\}$, *et associée à la matrice de transition* $M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$.

Les entrées $p_{i,j} \in [0,1]$ sont telles que $p_{1,1}+p_{1,2}=1=p_{2,1}+p_{2,1}$. On conviendra que $c=p_{1,2}+p_{2,1}>0$. Montrer (par réccurrence sur le paramètre temporel) que les itérées M^n de la matrice M sont données par la formule

$$M^n = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Solution :
On vérifie la formule (1) par récurrence sur n. Pour $n=1$ on a

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + (\tfrac{1}{c}-1) \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1-p_{1,2} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & 1-p_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

Supposons la formule (1) vraie au rang n. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} M^{n+1} = {} & \tfrac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ & + \tfrac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ = {} & \tfrac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} \\ & + \tfrac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2}(p_{1,1}-p_{2,1}) & -p_{1,2}(p_{2,2}-p_{1,2}) \\ -p_{2,1}(p_{1,1}-p_{2,1}) & p_{2,1}(p_{2,2}-p_{1,2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il reste a remarquer que

$$(1-c) = (1-p_{1,2}-p_{2,1}) = (p_{1,1}-p_{2,1}) = (p_{2,2}-p_{1,2})$$

La fin de la preuve par récurrence est désormais claire.

■

Exercice 11 *Soit $(X'_k)_{0\le k\le n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E'_k)_{0\le k\le n}$, de probabilités de transitions $(M'_k)_{0\le k\le n}$, et de loi initiale η'_0. On note $(X_k)_{0\le k\le n}$ le processus historique de $(X'_k)_{0\le k\le n}$ défini par*

$$X_k = (X'_0, \ldots, X'_k)$$

1. *Vérifier que $(X_k)_{0\le k\le n}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans les espaces produits*
$$E_k = (E'_0, \ldots, E'_k)$$

2. Décrire les probabilités de transitions de $(X_k)_{0\leq k\leq n}$.

Exercice 12 *On considère une marche aléatoire* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *définie sur un espace de probabilités* $(\Omega, \mathbb{P})$*, d'origine* $X_0 = 0$ *et de probabilités de transitions homogènes*

$$M(x,y) \;\; = \;\; \alpha \; 1_{x+1}(y) \; + \; (1-\alpha) \; 1_{x-1}(y) \quad \textit{avec} \quad \alpha \in [0,1]$$

1. *Décrire l'arbre des épreuves associé au processus* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$.
2. *Montrer que la position moyenne de la particule au temps* n *est donnée par la formule*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(X_k) = k \times (2\alpha - 1)$$

3. *Vérifier que les transitions de la chaîne entre deux instants,* l *et* $(l+m) \leq n$*, sont données par la formule*

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k-(m-k)] \mid X_l = x) = C_m^k \; \alpha^k \; (1-\alpha)^{m-k}$$

pour tous les $k \in \{0, \ldots, m\}$*, et*

$$\mathbb{P}(X_{l+m} \notin \{2k - m \; : \; k = 0, \ldots, m\} | X_l = x) = 0$$

4. *En déduire que*

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = \frac{(2k)!}{k!k!} \; (\alpha(1-\alpha))^k$$

En utilisant la formule de Stirling ($k! \simeq \sqrt{2\pi k} \; k^k \; e^{-k}$*), montrer que*

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1-\alpha))^k}{\sqrt{\pi k}} \; (= 1/\sqrt{\pi k} \;\; \text{si } \alpha = 1/2)$$

Solution :

1. En utilisant la réalisation dynamique de la marche aléatoire on obtient

$$X_k = X_{k-1} + \epsilon_k \Longrightarrow X_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l$$

On vérifie ainsi aisément que la position moyenne de la marche est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(X_k) = \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l) = k(\alpha - (1-\alpha)) = k \times (2\alpha - 1)$$

Lorsque $\alpha \in (0, 1/2)$, les v.a. ϵ_k ont tendance à prendre plus fréquemment la valeur -1. La marche est alors en moyenne attirée vers la gauche. Lorsque $\alpha = 1/2$, la marche reste en moyenne en son origine $X_0 = 0$. Autrement dit, la chaîne X_k oscille entre la droite et la gauche. La quantité $v = (2\alpha - 1)$ correspond à la vitesse moyenne de la particule.

2. Pour chaque $p \geq 0$, les évènements

$$\{\omega \in \Omega \ : \ X_l(\omega) = x, \quad X_{l+m}(\omega) = x + [k - (m-k)]\}$$

avec $0 \leq k \leq m$ correspondent à la situation où la particule passe par x à l'instant l, et effectue entre les instants l et $l+m$, k déplacements vers la droite, et $(m-k)$ déplacements vers la gauche. La figure ci-dessous représente un exemple d'évolution sur $m = 12$ périodes, avec $k = 5$ montées, et $(m-k) = 7$ descentes.

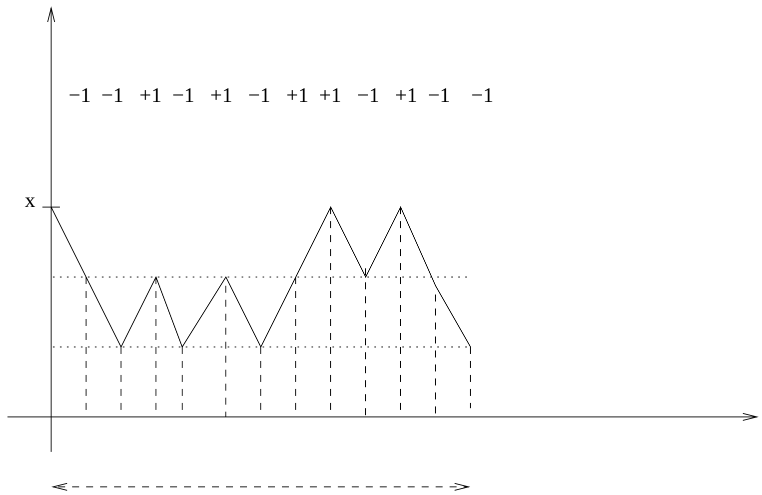

FIG. 8 – Points accessibles

Par conséquent, nous avons

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k-(m-k)] \mid X_l = x) = C_m^k \ \alpha^k \ (1-\alpha)^{m-k}$$

3. D'après ce qui précède, lorsque $x = 0$ et $m = 2k$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = C_{2k}^k \ \alpha^k \ (1-\alpha)^k = \frac{(2k)!}{k!k!} \ (\alpha(1-\alpha))^k$$

On notera que les événements

$$\{X_l = x, \ X_{l+m} = y\}$$

sont vides pour les couples de points $(y-x) \notin \{2l - m \ : \ l = 0, \ldots, m\}$. En particulier, pour $x = 0 = y$ et $m = 2k+1$, on a $\mathbb{P}(X_{l+2k+1} = 0 \mid X_l = 0)$. En utlisant l'approximation de Stirling

$$k! \simeq \sqrt{2\pi k} \ k^k \ e^{-k}$$

on obtient l'estimation

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1-\alpha))^k}{\sqrt{\pi k}} \ (= 1/\sqrt{\pi k} \ \text{ si } \alpha = 1/2)$$

Lorsque $\alpha \neq 1/2$, on a $4\alpha(1-\alpha) < 1$ et la probabilité de revenir à 0 en un temps $(2k)$ décroit exponentiellement vite lorsque k augmente.

■

Exercice 13 *Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur $\mathbb{R}$, associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes*

$$X_k = \sum_{p=0}^{k} \epsilon_p = X_{k-1} + \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Solution :
On a

$$\begin{aligned} \Delta X_k &= \underbrace{\mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\text{partie prévisible}} + \underbrace{[\Delta X_k - \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})]}_{\text{partie imprévisible}} \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_k) + [\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)] \end{aligned}$$

La décomposition de Doob du processus est don donnée par la formule

$$X_k = \sum_{p=0}^{k} \Delta X_p = A_k^X + M_k^X$$

avec le couple de processus $(A_k^X, M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ définis par

$$\begin{aligned} A_k^X &= \sum_{p=0}^{k} \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) = \sum_{p=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_p) \\ M_k^X &= \sum_{p=0}^{k} [\epsilon_p - \mathbb{E}(\epsilon_p)] \end{aligned}$$

■

Exercice 14 *Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur $\mathbb{R}$, associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes*

$$X_k = \prod_{p=0}^{k} \epsilon_p = X_{k-1} \times \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Solution :
On commence par noter que

$$\Delta X_k = X_k - X_{k-1} = X_{k-1} \times [\epsilon_k - 1]$$

On obtient ainsi la décomposition locale

$$\begin{aligned}
\Delta X_k &= \underbrace{\mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\text{partie prévisible}} + \underbrace{[\Delta X_k - \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})]}_{\text{partie imprévisible}} \\
&= X_{k-1} \times \mathbb{E}(\epsilon_k - 1) + X_{k-1} \times [\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]
\end{aligned}$$

La décomposition de Doob du processus est don donnée par la formule

$$X_k = \sum_{p=0}^{k} \Delta X_p = A_k^X + M_k^X$$

avec le couple de processus $(A_k^X, M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ définis par

$$\begin{aligned}
A_k^X &= \sum_{p=0}^{k} \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) = \sum_{p=0}^{k} \left[\prod_{l=0}^{p-1} \epsilon_l \right] \times \mathbb{E}(\epsilon_p - 1) \\
M_k^X &= \sum_{p=0}^{k} \left[\prod_{l=0}^{p-1} \epsilon_l \right] \times [\epsilon_p - \mathbb{E}(\epsilon_p)]
\end{aligned}$$

■