TD- Licence 3 MASS

1 Probabilités élémentaires

Exercice 1 *Vérifier les formules*

$$\begin{array}{rcl} A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{array}$$

Exercice 2 *Montrer (par réccurrence) que pour toute collection d'évènements $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$, nous avons*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 3 *Soit A, B un couple d'évènements. Montrer que*

$$A \triangle B = [A \cap B^c] \cup [B \cap A^c] = (A - B) \cup (B - A)$$

représente l'évènement où exactement A ou B se produit. Vérifier que l'on a

$$1_{A \triangle B} = 1_A + 1_B - 21_{A \cap B}$$

En déduire par le calcul, puis schématiquement, la formule

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

2 Modèles d'urnes

Exercice 4 *Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants dans un classe de n personnes aient la même date d'anniversaire ? On supposera que la date d'anniversaire est l'un des 365 jours, et chaque jour est équiprobable. Estimer cette probabilité lorsque $n = 31$.*

Exercice 5 *Un jeu de lotterie est formé de n billets gagnants sur un total de N. On supposera, ce qui est souvent le cas, que le nombre total de billets est plus que le double du nombre de billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins une fois, si l'on achète n billets ?*

Exercice 6 *Un jeu de loto est formé de $N = 49$ boules numérotées de 1 à 49. Six d'entre elles sont gagnantes, disons les 6 premières numérotées de 1 à 6. On sélectionne sans remise $n = 6$ boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir choisi précisément ces 6 boules ?*

3 Variables aléatoires

Exercice 7 *Soit $X : \Omega \to E$ une v.a., et $f : E \to F$ une fonction de E dans un ensemble fini F. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_d\} \subset E$, l'ensemble des réalisations possibles de v.a. X, montrer que la v.a. $f(X)$ peut s'écrire sous la forme suivante*

$$f(X) = \sum_{i=1}^{d} f(x_i)\ 1_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

Exercice 8 *Soit $(A_i)_{\leq i \leq d}$ une partition de l'ensemble Ω. Montrer que pour toute collection de nombres réels $a = (a_i)_{\leq i \leq d}$, les fonctions*

$$X^a = \sum_{i=1}^{d}\ a_i\ 1_{A_i}$$

sont des v.a. réelles. Vérifier que toutes les v.a. réelles sont de cette forme.

Exercice 9 *Vérifier que pour tout couple d'ensembles A, B, on a les décompositions d'indicatrices suivantes*

$$\begin{aligned}
1_{A\cap B} &= 1_A 1_B \\
1_{A\cup B} &= 1_A + 1_B - 1_A 1_B = 1_A \vee 1_B \\
1_{A-B} &= 1_A\ (1 - 1_B) = 1_A - 1_A 1_B \\
1_{A\triangle B} &= (1_A - 1_B)^2 = |1_A - 1_B|
\end{aligned}$$

Exercice 10 *Soit X une v.a. à valeurs dans un espace fini E, et définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. L'ensemble des évènements*

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{P}(E)) = \{X^{-1}(A)\ :\ A \subset E\}$$

est appelé l'algèbre sur E engendrée par la v.a. X. On dit que X est mesurable par rapport, ou adaptée à une algèbre d'évènements $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, et on note $X \underline{\in} \mathcal{F}$, lorsque l'on a

$$\forall A \subset E \qquad X^{-1}(A) \subset \mathcal{F}$$

1. *Vérifier que l'on a $X \underline{\in} \sigma(X)$*
2. *Pour tout un couple de v.a. (X, Y) à valeurs dans un espace produit fini $(E \times F)$, et défini sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a l'équivalence suivante*
$$X \underline{\in} \sigma(Y) \Longleftrightarrow \exists h : F \to E \quad X = h(Y)$$

Exercice 11 *Soit $\mathcal{D} = (D_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble fini Ω, muni de l'algèbre discrète $\mathcal{P}(\Omega)$. On note $a(\mathcal{D})$ la plus petite algèbre contenant les évènements $(D_i)_{i\in I}$.*

1. *Vérifier que pour toute algèbre $b(\mathcal{D})$ contenant $\mathcal{D}$, on a*

$$b(\mathcal{D}) \subset a(\mathcal{D}) \Longrightarrow a(\mathcal{D}) = b(\mathcal{D})$$

2. *On considère les v.a. indicatrices*

$$\forall i \in I \qquad X_i = 1_{D_i}$$

Montrer que

$$\sigma(X_i,\ i \in I) = a(\mathcal{D})$$

L'algèbre $a(\mathcal{D})$ est souvent notée abusivement $\sigma(\mathcal{D})$.

3. *Montrer que pour toute fonction $f : \{0,1\}^I \to \mathbb{R}$ nous avons*

$$f((X_i)_{i\in I}) \underline{\in} \sigma(\mathcal{D})$$

Vérifier que toutes les v.a. $Z \underline{\in} \sigma(\mathcal{D})$ sont nécessairement de cette forme.

Exercice 12 *Soit $\mathcal{F}$ une algèbre de parties sur un ensemble fini Ω.*

1. *Montrer qu'il existe une partition $\mathcal{D}$ de Ω telle que*

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{D})$$

2. *En déduire qu'il existe une collection finie de v.a. $(X_i)_{i\in I}$ à valeurs réelles sur Ω, telles que*

$$\mathcal{F} = \sigma(X_i,\ i \in I)$$

4 Indépendance

Exercice 13 *On considère un espace d'évènements à quatres états*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/4$. On considère les évènements suivants

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_2\} \quad A_2 = \{\omega_2, \omega_3\} \quad A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$$

Vérifier que ces trois évènements sont deux à deux indépendants, mais l'on a néanmoins

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

Exercice 14 *Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, l'espace des épreuves correspondant au lancer de deux dés. On considère les évènements suivants.*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j \in \{1,2,5\}\} \qquad A_2 = \{(i,j) \in \Omega \ : \ j \in \{4,5,6\}\} \\ A_3 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ i + j = 9\} = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\} \end{aligned}$$

1. *Vérifier que*

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j = 5\} \quad A_1 \cap A_3 = \{(4,5)\} \\ A_2 \cap A_3 &= \{(4,5),(3,6),(5,4)\} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(4,5)\} \end{aligned}$$

2. *Montrer que*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

mais, pour tout $i \neq j$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \neq \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

Exercice 15 *On considère un modèle d'urne contenant m_1 boules de couleur c_1, m_2 boules de c_2,..., et m_r boules de couleur c_r. On sélectionne au hasard n boules avec remise, et l'on note $X_1, \ldots, X_n$ leurs couleurs.*

1. *Vérifier que le n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ peut être réalisé sur l'espace des suites*

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{c_1, \ldots, c_r\}^n$$

muni de la probabilité uniforme. Vérifier que l'on a pour tout n-uplet d'indices $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots r\}^n$

$$\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \prod_{p=1}^{n} \frac{m_{i_p}}{m} \quad \text{avec} \quad m = \sum_{i=1}^{r} m_i$$

2. *Vérifier que l'on a pour tout $1 \leq p \leq n$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$*

$$\mathbb{P}^{X_p}(c_i) = m_i/m$$

En conclure que les v.a. X_i sont indépendantes.

Exercice 16 *On considère une suite d'évènements indépendants $A_1, \ldots, A_n$, se déroulant au cours du temps, avec la même probabilité de réalisation*

$$p = \mathbb{P}(A_i)$$

On associe à cette suite, la v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$ représentant le nombre de fois où les évènements se réalisent.

1. *Montrer que pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, tel que $|I| = k$, on a*

$$\mathbb{P}([\cap_{i \in I} A_i] \cap [\cap_{i \notin I} A_i^c]) = p^k (1-p)^{n-k}$$

2. *En déduire que X est distribuée sur $E = \{0, \ldots, n\}$, selon la loi*

$$\mathbb{P}^X(k) = C_n^k \ p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 17 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de n copies indépendantes d'une v.a. de Bernoulli X sur $\{0, 1\}$*

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p \in [0, 1]$$

1. *Vérifier que pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, on a*

$$\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2. *Quelle est la loi de la v.a. de comptage $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

5 Problème [Formule de Poincaré]

Soit $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ une suite d'évènements.

1. Vérifier les formules suivantes

$$\begin{aligned} 1_{A_1 \cap A_2} &= 1_{A_1} \cap 1_{A_2} \\ 1_{A_1 \cup A_2} &= 1 - (1 - 1_{A_1})(1 - 1_{A_2}) = 1_{A_1} + 1_{A_2} - 1_{A_1 \cap A_2} \end{aligned}$$

2. Montrer que

$$1_{\cup_{p=1}^n A_p} = 1 - \prod_{p=1}^n \left(1 - 1_{A_p}\right)$$

3. En utilisant la formule

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) = 1 + \sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1} \ldots a_{i_p}$$

qui est valable pour tout $n \geq 0$, et pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, vérifier l'identité

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{p-1} \ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}) \qquad (1)$$

4. Montrer que pour tout $A \subset \Omega$, $\omega \in \Omega$, et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$(1 + u)^{1_A(\omega)} = 1 + u \ 1_A(\omega)$$

avec la convention $0^0 = 1$, lorsque $u = -1$, et $\omega \notin A$. En déduire l'identité

$$(1 + u)^{\sum_{i=1}^n 1_{A_i}} = \prod_{i=1}^n (1 + u \ 1_{A_i})$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la question précédente, vérifier l'identité

$$\sum_{\omega \in \Omega} (1 + u)^{\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)} \mathbb{P}(\omega) = 1 + \sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} u^p \ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p})$$

5. Retrouver la formule de Poincaré (1), en posant $u = -1$.