Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques

Pierre Del Moral - Stefano De Marco - Massimiliano Gubinelli - Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 9 - TP Scilab - 15 Mars 2013

Les programmes scilab associés aux énoncés **en rouge** *sont fournis. Les énoncés* **en bleu** *sont des compléments facultatifs liés à chaque exercice du TP; à résoudre une fois les travaux pratiques terminés.*

EXERCICE 1 - **Système interbancaire de J.P. Fouque et L.H. Sun :** Cet exercice propose une étude numérique le modèle de stabilité interbancaire introduit par de J.P. Fouque et L.H. Sun, et présenté dans la section IX.1.2 du cours *Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques: du linéaire au non linéaire (E. Gobet)*. On considère un système financier de N banques. Les trésoreries des banques sont dépendantes les unes des autres, car elles peuvent se prêter de l'argent entre elles. Notons X_t^i la réserve monétaire du i-ième établissement. L'évolution des échanges interbancaires est représenté par une équation non linéaire

$$dX_t^i = \frac{\alpha}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} (X_t^j - X_t^i)\, dt + \sigma\, dW_t^i \qquad 1 \leq i \leq N$$

où $(W_t^i)_{1 \leq i \leq N}$ désignent N mouvements browniens indépendants. Le facteur α représente le taux d'interêt interbancaire autorisé. Ce paramètre est ajusté par les autorités de régulation pour garantir une meilleure stabilité du système. On se fixe un niveau de défaut $D < 0$. On note N_t le nombre de trajectoires $X^i_{1 \leq s \leq t}$ qui ont évolué en dessous de ce niveau. L'objectif est d'évaluer les probabilités $p_N(\sigma, \alpha, k) = \mathbb{P}(N_T = k)$, pour chaque $1 \leq k \leq N$.

Proposer un schéma d'Euler permettant de simuler ces équations. Compléter le programme *"Syst.bancaire.Fouque-Sun"* simulant ces équations, et estimer les probabilités des défauts observés en fonction du choix des paramètres α. On examinera les valeurs numériques $D = -0,7$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0, 1, 10, 100$.

EXERCICE 2 -**Équations de Burgers en dimension 1 :** Cet exercice propose une étude numérique du modèle de mécanique des fluides présenté dans la section IX.1.2 du cours *Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques: du linéaire au non linéaire (E. Gobet)*. On considère une équation non linéaire

$$dX_t^i = \boldsymbol{b}(X_t^i, \eta_t^N)\, dt + \boldsymbol{\sigma}(X_t^i, \eta_t^N)\, dW_t^i \qquad 1 \leq i \leq N \tag{1}$$

où $(W_t^i)_{1 \leq i \leq N}$ désignent N mouvements browniens indépendants, avec $\eta_t^N = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{X_t^i}$, $\boldsymbol{b}(x, \eta) = \int\ b(x, y)\ \eta(dy)$, et $\boldsymbol{\sigma}(x, \eta) = \int\ \sigma(x, y)\ \eta(dy)$. On supposera que les fonctions (b, σ) satisfont les hypothèses de régularité énoncées dans le théorème IX.2.1 du cours. Les variables initiales X_0^i sont supposées iid de loi η_0. D'après le théorème IX.3.3, pour toute fonction f deux fois dérivable à support compact, nous avons la convergence dans $\mathbb{L}_1$ $\lim_{N \to \infty} \eta_t^N(f) = \eta_t(f)$ où η_t vérifie l'équation aux dérivées partielles non linéaire définie au sens faible par l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}\eta_t(f) = \eta_t(L_{\eta_t}(f)) \quad \text{avec} \quad L_{\eta_t} = \boldsymbol{b}(x, \eta_t)\ \partial_x + \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\sigma}(x, \eta_t)\ \partial_{x,x}$$

On se place dans la situation $\eta_0 = \delta_0 \Rightarrow V_0(x) = \eta_0\left([x,\infty[\right) = 1_{[x,\infty[}(0) = 1_{]-\infty,0]}(x)$. On pose $b(x,y) = 1_{[x,\infty[}(y)$ et $\sigma(x,y) = \sigma > 0$. Dans ce cas, la fonction $V_t(x) = \eta_t\left([x,\infty[\right)$ satisfait l'équation de Burgers

$$\partial_t V_t = -V_t\ \partial_x V_t\ + \frac{\sigma^2}{2}\ \partial_{x,x} V_t$$

Une solution explicite est donnée par la formule suivante

$$V_t(x) = \frac{\mathbb{E}\left(1_{]-\infty,0]}(x+\sigma W_t)\ e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x+\sigma W_t)}\right)}{\mathbb{E}\left(1_{]0,\infty[}(x+\sigma W_t)\right) + \mathbb{E}\left(1_{]-\infty,0]}(x+\sigma W_t)\ e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x+\sigma W_t)}\right)} \tag{2}$$

D'un point de vue numérique cette formule peut être résolue par une méthode de Monte Carlo classique, ou en utilisant la fonction $\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \int_x^\infty e^{-y^2}dy$, par l'équation suivante

$$V_t(x) = \frac{\exp\left(\frac{t-2x}{2\sigma^2}\right)\ \left(1-\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{t-x}{\sqrt{2\sigma^2 t}}\right)\right)}{\exp\left(\frac{t-2x}{2\sigma^2}\right)\ \left(1-\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{t-x}{\sqrt{2\sigma^2 t}}\right)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2 t}}\right)} \tag{3}$$

Compléter le programme *"Burgers-1d"* permettant de simuler les équations de Burgers en utilisant un schéma d'Euler pour résoudre le système de particules en interaction (1), soit par une méthode de Monte Carlo basée sur la formule (2).

EXERCICE 3 -Équations de Langevin-McKean-Vlasov à double puit selon S. Herrmann et J. Tugaut : Cet exercice propose une étude numérique d'un modèle non linéaire développé par S. Herrmann et J. Tugaut. Les particules évoluent selon un modèle de Langevin couplé à des mécanismes d'attraction ou d'interaction autour de la moyenne des configurations. Ces fonctions d'interactions sont analogues à celles développées dans l'exercice .

$$dX^i(t) = -\beta\ V'(X^i_t)dt + \alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{1\leq j\leq N} X^j_t - X^i_t\right)\ dt + \sigma\ dW^i_t \qquad 1 \leq i \leq N$$

où $(W^i_t)_{1\leq i\leq N}$ désignent N mouvements browniens indépendants. Proposer un schéma d'Euler permettant de simuler ces équations. Compléter le programme *"Herrmann-Tugaut"* simulant ces équations en fonction du choix des paramètres (α,β,σ), dans le cas de potentiels à double puit $V(x) = \frac{m}{((b-a)/2)^4}\ (x-a)^2\ (x-b)^2$ (puits $\in \{a,b\}$, et le maximum entre les puits $V((a+b)/2) = m$). Étudier numériquement les situations de répulsion/attraction ($\alpha \in \mathbb{R}_+$ ou $\alpha \in \mathbb{R}_-$), en fonction des intensités des perturbations, et en fonction du nombre de particules

EXERCICE 4 -Browniens sans collisions - Éq. de Dyson - Ensemble gaussien orthogonal. Ce problème est une introduction aux équations non linéaires de Dyson

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)}\ dt + \sqrt{\frac{2}{N}}\ dW^i_t \qquad 1 \leq i \leq N$$

où $(W^i_t)_{1\leq i\leq N}$ désignent N mouvements browniens indépendants; avec des conditions initiales $\lambda_1 < \ldots < \lambda_N$, pour des entiers $N \geq 1$ assez grands. Ces équations sont utilisées en physique nucléaire pour analyser les propriétés statistiques de spectres d'énergies de systèmes quantiques.

1. Le système $\lambda_1 < \ldots < \lambda_N$ coïncide avec les valeurs propres de matrices symétriques gaussiennes A de taille $(N \times N)$, dont les entrées sont données par $N(N+1)/2$ mouvements browniens $W_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq N$ et W_t^i, $1 \leq i \leq N$

$$A_{i,i}(t) = W^i(t)/\sqrt{N/2} \quad \text{et} \quad A_{i,j}(t) = A_{j,i}(t) = W^{i,j}(t)/\sqrt{N}$$

Compléter le programme *"Wigner EGO-Q"* qui trace l'histogramme des N valeurs propres, et le compare à celui de la loi du demi-cercle $\mu_t(dx) = \frac{1}{2\pi t}\, 1_{[-2,2]}(x)\, \sqrt{4t - x^2}\, dx$.

2. Proposer un schéma de discretisation de pas h basé sur la méthode d'Euler $\Lambda_{t+h} = \Lambda_t + \ldots$. Compléter le programme Scilab *"Équations de Dyson - Euler"* permettant de simuler ces équations.

3. On peut montrer que la distribution de ces valeurs propres est donnée par

$$\pi_t(d\lambda) \propto 1_{\lambda_1 < \ldots < \lambda_N} \exp\left\{-\frac{N}{4t} \sum_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^2\right\} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i)\right) d\lambda \tag{4}$$

On note $p_{t,t+h}(\lambda, \lambda')$ la densité de la probabilité de transition $\Lambda_{t+h} \in d\lambda'$ sachant le point de départ $\Lambda_t = \lambda$. Après chaque chaque itération du schéma discretisé $\Lambda_t = \lambda \rightsquigarrow \Lambda_{t+h} = \lambda'$, on accepte (où l'on refuse) la transition simulée avec une probabilité

$$\min\left(1,\ \frac{\pi_{t+h}(\lambda') p_{t,t+h}(\lambda', \lambda,)}{\pi_{t+h}(\lambda) p_{t,t+h}(\lambda, \lambda')}\right)$$

Vérifier que π_{t+h} est une mesure invariante de cette transition $\Lambda^{(0)} = \Lambda_t = \lambda \rightsquigarrow \Lambda^{(1)} = \lambda'$. Pour des pas de temps $h \sim 0$, l'état Λ_{t+h} est approximativement distribué selon la loi π_{t+h}, et l'étape d'acceptation-rejet ne change pas cette distribution. De plus, en itérant m-fois les étapes du schéma d'Euler avec cette étape d'acceptation rejet (pour un couple $(t, t+h)$ fixé) à partir du point $\Lambda_t = \lambda$ on obtient à la m-ième itération $\Lambda^{(0)} = \lambda \rightsquigarrow \Lambda^{(1)} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \Lambda^{(m)}$ un point $\Lambda^{(m)}$ distribué approximativement selon la loi cible π_{t+h}, lorsque m est assez grand.

Compléter le programme Scilab *"Équations de Dyson - Euler + MCMC-Q"* permettant de simuler les transitions du schéma d'Euler associé aux équations d'évolution des valeurs propres couplé à chaque étape avec $m = 1$ étape d'acceptation-rejet.

COMPLÉMENTS (facultatif)

PROBLÈME 5 -Système interbancaire de J.P. Fouque et L.H. Sun : Vérifier que le générateur du processus interbancaire $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^N)$ est de la forme

$$L = -\alpha \ \nabla V . \nabla + \frac{\sigma^2}{2} \ \triangle \quad \text{avec} \quad V(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq N} \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} x_j \right)^2$$

Vérifier que densité de probabilité $p_t(x)$ du processus X_t satisfait l'équation duale

$$\frac{d}{dt} p_t = L^\star p_t \quad \text{avec} \quad L^\star(p) = \alpha \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_{x_i} \left(\, p \ \partial_{x_i} V \right) \ + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_{x_i, x_i} p$$

En conclure que la mesure $\pi(dx) \propto \exp\left(-\frac{2\alpha}{\sigma^2} \ V(x)\right) \ dx$ est une mesure invariante du processus. Pour $N = 2$, vérifier que π n'est pas une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

PROBLÈME 6 - Équations de Burgers en dimension 1 : On notera par la suite p_t la densité de la loi η_t. Vérifier que p_t est solution de $\frac{d}{dt} p_t = L^\star_{\eta_t}(p_t)$, avec le générateur dual

$$L^\star_{\eta_t}(p_t) = -\partial_x \left(\boldsymbol{b}(x, \eta_t) \ p_t \right) + \frac{1}{2} \ \partial_{x,x} \left(\boldsymbol{\sigma}(x, \eta_t) \ p_t \right)$$

1. On pose $b(x, y) = 1_{[x,\infty[}(y)$, $\sigma(x, y) = \sigma > 0$, et $V_t(x) = \eta_t\left([x, \infty[\right)$. Vérifier que V_t satisfait l'équation de Burgers
$$\partial_t V_t = -V_t \ \partial_x V_t \ + \frac{\sigma^2}{2} \ \partial_{x,x} V_t$$

2. On rappelle que la solution de l'équation de la chaleur définie au sens des distributions par $\partial_t q_t = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{x,x} q_t$ est donnée par $q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right)$. Vérifier que $V_t = -\sigma^2 \partial_x \log(q_t)$ est solution de l'équation de Burgers. On note
$$U_t(x) = \int U_0(y) \ q_t(x - y) \ dy$$
l'équation de transport de l'équation de la chaleur. D'après ce qui précède $V_t = -\sigma^2 \partial_x \log(U_t)$ est une solution de l'équation de Burgers. Vérifier que les conditions initiales sont liées par la relation
$$U_0(x) = U_0(0) \times e^{-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^x V_0(y) dy}$$
Montrer que $\quad \partial_x U_t(x) = -\frac{U_0(0)}{\sqrt{2\sigma^2 \pi t}} \displaystyle\int \ \partial_x \left(e^{-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^x V_0(y) dy} \right) \ e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}} \ dy$
On se place dans la situation suivante
$$\eta_0 = \delta_0 \Rightarrow V_0(x) = \eta_0\left([x, \infty[\right) = 1_{[x,\infty[}(0) = 1_{]-\infty, 0]}(x)$$
Dans ce cas, démontrer la formule (2)

3. Démontrer la formule (3)

PROBLÈME 7 - Équations de Langevin-McKean-Vlasov à double puit selon S. Herrmann et J. Tugaut : Vérifier que le générateur du système de particule $X_t = (X_t^i)_{1\leq i\leq N}$ est de la forme

$$L = -\bigtriangledown \boldsymbol{V} . \bigtriangledown + \frac{\sigma^2}{2} \bigtriangleup$$

avec la fonction $\quad \boldsymbol{V}(x_1,\ldots,x_N) = \beta \sum_{1\leq i\leq N} V(x_i) + \frac{\alpha}{2} \sum_{1\leq i\leq N} \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{1\leq j\leq N} x_j \right)^2$

En conclure que la mesure $\pi(dx) \propto \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}\, \boldsymbol{V}(x)\right) dx$ est une mesure invariante du processus. Dans la situation $\alpha > 0$, la mesure π est une loi de probabilité invariante. Dans ce cas, proposer un algorithme d'ajustement de Metropolis-Hasting pour stabiliser et rendre réversible le schéma d'Euler.

1. **Échantillonneur de Gibbs:** On se place dans la situation $V(x) = x^2/2$, et $\alpha > 0$. Montrer que

$$\sum_{1\leq i\leq N} \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{1\leq j\leq N} x_j \right)^2 = \sum_{1\leq j\leq N} \frac{1}{a_{i,j}^2} \, (x_i - m_{i,j}(x))^2$$

avec les paramètres $a_{i,i} = N/(N-1)$, $a_{i,j} = N$ pour tout $i \neq j$, et les fonctions

$$m_{i,i}(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{j\neq i} x_j \quad \text{et} \quad \forall j \neq i \quad m_{i,j}(x) = x_j + \sum_{k\notin\{i,j\}} (x_j - x_k)$$

Pour tout $x := (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$, on note $x_{-i} = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ le vecteur déduit de x en enlevant la i-ième coordonnée x_i. En déduire que la distribution conditionnelle $\pi_i(x_i \mid x_{-i})$ de la i-ième coordonnée d'un vecteur $X := (X^1,\ldots,X^N)$ de loi π par rapport aux aux autres coordonnées $X_{-i} = \left(X^j\right)_{j\neq i}$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $\overline{X}_{-i}$ et de variance $\overline{\sigma}_{-i}$

$$\overline{X}_{-i} = \overline{\sigma}_{-i}^2 \sum_{0\leq j\leq N} \frac{1}{\sigma_{i,j}^2} \, m_{i,j}(X) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{\sigma}_{-i}^2} = \sum_{0\leq j\leq N} \frac{1}{\sigma_{i,j}^2}$$

avec pour tout $1 \leq i \leq N$, et $0 \leq j \leq N$

$$\sigma_{i,j}^2 = \frac{\sigma^2}{2} \left(1_{j\neq 0} \, \frac{a_{i,j}^2}{\alpha} + 1_{j=0} \, \frac{1}{\beta} \right) \qquad \text{et} \qquad m_{i,0}(x) = 0$$

On note $\tilde{X}^i$ une variable aléatoire distribuée selon cette loi conditionnelle. En conclure que la transition de Markov

$$X \rightsquigarrow \left(X^1,\ldots,X^{i-1},\tilde{X}^i,X^{i+1},\ldots,X^N\right)$$

laisse la loi π invariante. L'algorithme simulant de façon séquentielle ces différentes coordonnées est appelé l'échantillonneur de Gibbs de la loi π

$$X_0 \rightsquigarrow X_1 := \left(\tilde{X}_0^1, X_0^2,\ldots,X_0^N\right) \rightsquigarrow X_2 := \left(X_1^1, \tilde{X}_1^2, X_1^3,\ldots,X_1^N\right) \rightsquigarrow \ldots$$

Compléter le programme *"Gibbs-Langevin"* permettant de simuler cet échantillonneur de Gibbs.

2. **Algorithme d'ajustement de Metropolis-Hasting:** On note $p_h(x,y)$ la densité de probabilité des transitions du schéma d'Euler, $g = \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}\ \boldsymbol{V}\right)$ la densité de la loi π, et $a_h(x,y)$ le paramètre
$$a_h(x,y) := \min\left(1, \frac{g(y)\ p_h(y,x)}{g(x)\ p_h(x,y)}\right)$$
La mesure π n'est plus une mesure invariante de la chaîne de Markov $X_n^{(h)}$ associé au schéma de simulation discret. On convient que la variable initiale $X_0^{(h)}$ est distribuée selon la mesure invariante π (cette variable peut être simulé en utilisant l'échantillonneur de Gibbs décrit dans la question précédente). Après chaque simulation des transitions de la chaîne $X_{n-1}^{(h)} \rightsquigarrow X_n^{(h)}$ on effectue une étape d'acceptation rejet $X_{n-1}^{(h)} \rightsquigarrow X_n^{(h)} \rightsquigarrow \widehat{X}_n^{(h)}$. Le point $\widehat{X}_n^{(h)}$ est défini par
$$\widehat{X}_n^{(h)} := \begin{cases} X_n^{(h)} & \text{avec probabilité} \quad a_h\left(X_{n-1}^{(h)}, X_n^{(h)}\right) \\ X_{n-1}^{(h)} & \text{avec probabilité} \quad 1 - a_h\left(X_{n-1}^{(h)}, X_n^{(h)}\right) \end{cases}$$
Vérifier que π est une mesure invariante de cette chaîne de Markov.

PROBLÈME 8 - **Browniens sans collisions - Éq. de Dyson - Ensemble gaussien orthogonal.** L'étude est décomposée en trois parties :

- La première partie porte sur la distribution des valeurs propres de matrices symétriques gaussiennes, leurs propriétés d'invariance par l'action du groupe orthogonal, et la loi du demi-cercle de Wigner.
- La seconde partie propose une dérivation formelle des équations de Dyson représentant l'évolution des valeurs propres de matrices symétriques browniennes.
- La troisième partie présente une équivalence entre les équations de Dyson, et la distribution *trajectorielle* de N mouvements brownien sans collision.

1. **Ensemble gaussien orthogonal.**

On rappelle qu'une surface S de dimension $d \leq n$, plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, avec une paramétrisation $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_d)$, $i = 1, \ldots, n$, est munie d'une métrique riemannienne et d'un élément de volume
$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \sum_{1\leq i\leq n} (dx_i)^2 = \sum_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{1\leq j\leq d} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)^2 dy_j = \sum_{1\leq j,j'\leq d} h_{j,j'}\ dy_i dy_j \\ dy &= \sqrt{|\text{dét}(h)|}\ dy_1 \ldots dy_d \end{aligned} \tag{5}$$
Soient $g = (g_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq N}$ une suite de $N(N+1)/2$ v.a. gaussiennes indépendantes, centrées et normées. On note G une matrice gaussienne symétrique t.q. $G_{i,i} = \sqrt{2} g_{i,i}$, $G_{i,j} = g_{i,j} = G_{j,i}$, pour tout $i < j$. De telles matrices sont appelées des ensembles gaussien orthogonaux. En identifiant la matrice G au vecteur formé par ses $N(N+1)/2$ entrées, la loi de G est donnée par
$$\mathbb{P}\left(G \in dx\right) = (2\pi)^{-N(N+1)/4}\ \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{1\leq i\leq N} x_{i,i}^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq N} x_{i,j}^2\right\} dx \tag{6}$$

où $dx = 2^{-N/2}\left(\prod_{1\leq i\leq j\leq N} dx_{i,j}\right)$ désigne l'élément de volume sur $\mathbb{R}^{N(N+1)/2}$ associée à la métrique euclidienne

$$(ds)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq N}(dx_{i,i})^2 + \sum_{1\leq i<j\leq N}(dx_{i,j})^2$$

(a) On identifie les matrices réelles symétriques A de dimension $N \times N$ à un point $x = (x_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq N}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N(N+1)/2}$. Vérifier que l'élément de volume dans cet espace est donné par

$$(ds)^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}(dA\ (dA)^\star)$$

Vérifier que $(ds)^2$ est invariant par l'action du groupe orthogonal $dA \mapsto U\ dA\ U^\star$, où $U \in \mathrm{O}(N)$ désigne une matrice $(N \times N)$ telle que $UU^\star = Id$.

(b) On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de la matrice A, et $U = (U_1, \ldots, U_N)$ la matrice orthogonale formée par une base orthonormée de vecteurs propres. Montrer que $A = UDU^\star$ où $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Vérifier que $\delta U := U^\star dU = -dU^\star\ U$ et en déduire que

$$(ds)^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}(dA\ (dA)^\star) = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq N}(d\lambda_i)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq N}(\lambda_i - \lambda_j)^2\ \ (\delta U)_{i,j}^2$$

en déduire la formule de changement de variables

$$dx = 2^{-N/2}\left(\prod_{1\leq i<j\leq N}(\lambda_j - \lambda_i)\right)\ \left(\prod_{1\leq i\leq N} d\lambda_i\right) \times \left(\prod_{1\leq i<j\leq N}(\delta U)_{i,j}\right)$$

En conclure que les N valeurs propres $\Lambda(G) = (\Lambda_i)_{1\leq i\leq N}$, $\Lambda_i < \Lambda_{i+1}$, $1 \leq i < N$, de la matrice G sont distribuées selon la mesure de probabilité

$$\mathbb{P}\left(\Lambda(G) \in d\lambda\right) \propto 1_{\lambda_1<\ldots<\lambda_N}\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{1\leq i\leq N}\lambda_i^2\right\}\ \left(\prod_{1\leq i<j\leq N}(\lambda_j - \lambda_i)\right)\ d\lambda \qquad (7)$$

où $d\lambda = \prod_{1\leq i\leq N} d\lambda_i$ désigne un voisinage infinitésimal d'un point $\lambda = (\lambda_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N$.

2. **Loi du demi-cercle** On considère un ensemble gaussien orthogonal G^N. On note $\mu^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i/\sqrt{N}}$ la mesure d'occupation des valeurs propres normalisées de G^N. Par construction, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int x^n\ \mu^N(dx)\right) &= \frac{1}{N}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{Trace}\left(\left(\frac{G}{\sqrt{N}}\right)^n\right)\right)\\ &= \frac{1}{N^{1+n/2}}\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq N}\mathbb{E}\left(G_{i_1,i_2}\ldots G_{i_n,i_1}\right)\end{aligned} \qquad (8)$$

On note par la suite $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1)$ les chemins de longueurs n, $G_{\boldsymbol{i}} = G_{i_1,i_2}\ldots G_{i_{n-1},i_1}$, et $I(\boldsymbol{i})$ le nombre d'indices distincts visités par le chemin. La quantité $I(\boldsymbol{i})$ sera appelée le poids I du chemin $\boldsymbol{i}$. On considère la relation d'équivalence

$$\boldsymbol{i} \simeq \boldsymbol{j} \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} [\ \exists\sigma \in \mathcal{G}_N\ \sigma(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{j}\ ] \Rightarrow \mathbb{E}\left(G_{\boldsymbol{i}}\right) = \mathbb{E}\left(G_{\boldsymbol{j}}\right)$$

On notera que $\boldsymbol{i} \simeq \boldsymbol{j} \Rightarrow I(\boldsymbol{i}) = I(\boldsymbol{j})$. D'autre part, le nombre de classes d'équivalence ne dépend que de n (chacune de ces classes peut être caractérisée par un représentant dont tous les indices sont dans $\{1,\ldots,n\}$), et il y a dans chaque classe $\boldsymbol{i}$ un nombre $N(N-1)\ldots(N-(I(\boldsymbol{i})-1)) \leq N^{I(\boldsymbol{i})}$ de chemins distincts.

(a) **Cas $I > 1+n/2$:** Vérifier que $I(\boldsymbol{i}) > 1+n/2 \Rightarrow \mathbb{E}(G_{\boldsymbol{i}}) = 0$.

(b) **Cas $I < 1+n/2$:** Estimer la contribution des chemins de poids $I < 1+n/2$ à la somme (8), lorsque $N \uparrow \infty$.

(c) **Cas $I = 1+n/2$, avec $n = 2m$:** Dans cette situation, tous les chemins sont de longueur $2m$, possèdent m arêtes visitées exactement deux fois. Montrer que

$$I(\boldsymbol{i}) = m+1 \;\Rightarrow\; \mathbb{E}(G_{\boldsymbol{i}}) = 1$$

On code par $(c_1^+,\ldots,c_n^+)$ les nombres c_k^+ de nouvelles arêtes $i_1 \leftrightarrow i_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow i_k \leftrightarrow i_{k+1}$ visitées par un chemin $(i_1,i_2,\ldots,i_n,i_1)$, de l'instant $k=1$, à l'instant $k=n$. Par exemple, pour $I(\boldsymbol{i}) = 1+\frac{8}{2}$, nous avons

$$\boldsymbol{i} = (i_1,i_2,\ldots,i_8,i_1) = (1,3,2,5,2,4,2,3,1) \;\Rightarrow c^+(\boldsymbol{i}) = (1,2,3,3,4,4,4,4)$$

On code de façon analogue le nombre d'arêtes revisitées par un chemin. Dans l'exemple précédent, nous avons $c^-(\boldsymbol{i}) = (0,0,0,1,1,2,3,4)$. Le type d'un chemin est déterminé par la soustraction des deux codages $c = c^+ - c^-$. Dans l'exemple nous avons

$$c_+(\boldsymbol{i}) - c_-(\boldsymbol{i}) = (1,2,3,3,4,4,4,4) - (0,0,0,1,1,2,3,4) = (1,2,3,2,3,2,1,0)$$

Le nombre de chemins de même type est $N(N-1)\ldots(N-m) \leq N^{m+1} = N^{1+n/2}$. Le nombre de types, est donné par le nombre de chemins $C_{n/2} = C_m = \frac{1}{m+1}\,\frac{(2m)!}{m!^2}$ d'une marche aléatoire de longueur $(n+1) = (2m+1)$ partant de 0 et terminant en -1 tout en restant positive pendant les n premières itérations. Vérifier que

$$\lim_{N\uparrow\infty} \mathbb{E}\left(\int x^n \;\mu^N(dx)\right) = 1_{2\mathbb{N}}(n)\; C_{n/2} = \int \; x^n \;\mu(dx)$$

où $\mu(dx) = \frac{1}{2\pi}\; 1_{[-2,2]}(x)\; \sqrt{4-x^2}\; dx$ désigne la loi du demi-cercle.
Indication : On pourra utiliser le fait que la loi $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ est déterminée par la densité de probabilité

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\; x^{\alpha-1}\;(1-x)^{\beta-1}\; 1_{[0,1]}(x)$$

avec $\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{y-1}\; e^{-u}\; du$. On rappelle que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \textbf{et} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n}\;\sqrt{\pi}\;(2n-1)!/(n-1)!$$

3. **Formules variationnelles d'Hadamard.** On considère une matrice réelle symétrique A_t dépendant d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$. On convient que ses valeurs propres $\lambda_1(t) < \ldots < \lambda_N(t)$, ainsi que les vecteurs propres orthogonaux associés $u_i(t)$, $1 \leq i \leq N$, sont deux fois différentiables par rapport au paramètre t. En dérivant les relations $Au_i = \lambda_i u_i$, $u_i^\star u_i = 1$.

(a) Montrer que

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = u_i^\star \, \frac{dA}{dt} \, u_i \quad \text{et} \quad \frac{d^2\lambda_i}{dt^2} = u_i^\star \, \frac{d^2 A}{dt^2} \, u_i + 2 \sum_{j \neq i} \frac{\left(u_i^\star \, \frac{dA}{dt} \, u_j\right)^2}{\lambda_i - \lambda_j}$$

(b) Notons G une matrice gaussienne symétrique définie en (6). On choisit une base orthonormée u_i associée aux valeurs propres λ_i d'une matrice réelle symétrique A, et l'on pose

$$\lambda_i \left(A + h \; G\right) - \lambda_i = h \; u_i^\star G \; u_i + h^2 \; \sum_{j \neq i} \frac{\left(u_i^\star \; G \; u_j\right)^2}{\lambda_i - \lambda_j}$$

D'après les propriétés d'invariance par action du groupe orthogonal, on peut choisir la base canonique u_i de $\mathbb{R}^N$. Dans ce cas, nous avons

$$\lambda_i \left(A + h \; G\right) - \lambda_i = \sqrt{2}(h g_{i,i}) + \sum_{j \neq i} \frac{(h g_{i,j})^2}{\lambda_i - \lambda_j} \tag{9}$$

On considère des matrices symétriques gaussiennes dont les entrées sont données par $N(N+1)/2$ mouvements browniens $W_t^{i,j}$, $1 \leq i < j \leq N$ et W_t^i, $1 \leq i \leq N$

$$A_{i,i}(t) = \sqrt{2} W^i(t) \quad \text{et} \quad A_{i,j}(t) = A_{j,i}(t) = W^{i,j}(t)$$

Montrer formellement à partir de (9) que les valeurs propres $(\lambda_i(t))_{1 \leq i \leq N}$ de A_t sont solution de l'équation non linéaire de type champ moyen de Dyson

$$d\lambda_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \; dt + \sqrt{2} \; dW_t^i$$

Vérifier que la distribution $\pi_t(d\lambda)$ des états du système $\Lambda_t = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t))$ est donnée à chaque instant t par l'équation

$$\mathbb{P}\left(\Lambda_t \in d\lambda\right) \propto 1_{\lambda_1 < \ldots < \lambda_N} \exp\left\{ -\frac{1}{4t} \sum_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^2 \right\} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i) \right) d\lambda \tag{10}$$

4. **Formule de Karlin-McGregor**

Soient $P_t(x, dy)$ les transitions de probabilités d'un processus homogène X_t, à trajectoires continues dans $\mathbb{R}$. Pour un entier $N \geq 1$ fixé, on note $\boldsymbol{X}_t = \left(X_t^1, \ldots, X_t^N\right)$ le processus formé par N copies indépendantes de X_t. On se donne une suite de boréliens $A_1 < \ldots < A_N$, où $A < B$ designe la relation d'ordre partiel entre ensembles $A, B \subset \mathbb{R}$, pour lesquels $x < y$ pour tout $(x, y) \in (A \times B)$. On note $\mathcal{G}_N$ l'ensemble des permutations de $[N] = \{1, \ldots, N\}$, et $\boldsymbol{A}_\sigma = \left(A_{\sigma(1)} \times \ldots \times A_{\sigma(N)}\right)$.

Soit $\mathbf{C}$ le sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$ défini par les configurations possédant une collision

$$\mathbf{C} = \left\{ \boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^N \; : \; \exists (i,j) \in [N]^2, \; i \neq j \text{ t.q. } x^i = x^j \right\}$$

et $\boldsymbol{T} = \inf \left\{ t \geq 0 \; : \; \boldsymbol{X}_t \in \mathbf{C} \right\}$ le premier instant où apparait une collision.

(a) Vérifier que $\mathbf{C} = \cup_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{C}_{(i,j)}$, avec

$$\mathbf{C}_{(i,j)} = \left\{ \boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^N \; : \; \forall k, l < j \;\; x_k \neq x_l \;\; \text{et} \;\; x_j = x_i \right\}$$

(b) Si $\tau_{i,j}$ désigne la transposition des indices $i<j$, pour tout $\boldsymbol{y}\in \mathbf{C}_{(i,j)}$, montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{X}_t\in \boldsymbol{A}_\sigma\right) &= \mathbb{P}_{\boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{X}_t\in \boldsymbol{A}_{\sigma\tau_{i,j}}\right)\\ \mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\Omega_{t,\sigma}\right)-\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\Omega'_{t,\sigma}\right) &= \sum_{i<j}\int_0^t \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T}\in ds\right)\ \int_{\mathbf{C}_{(i,j)}}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{X}_s\in dz\right)\ \mathbb{P}_{\boldsymbol{z}}\left(\boldsymbol{X}_{t-s}\in \boldsymbol{A}_{\sigma\tau_{i,j}}\right)\end{aligned}$$

avec $\Omega_{t,\sigma}=\{\boldsymbol{X}_t\in\boldsymbol{A}_\sigma\}$ et $\Omega'_{t,\sigma}=\Omega_{t,\sigma}\cap\{\boldsymbol{T}>t\}$.

(c) En déduire que

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\ \left(\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\Omega_{t,\sigma}\right)-\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\Omega'_{t,\sigma}\right)\right)=0$$

et conclure que pour toute condition initiale $\boldsymbol{x}=(x^1,\ldots,x^N)$ t.q. $x_1<\ldots<x_N$, et pour toute suite de boréliens $A_1<\ldots<A_N$, les probabilités de non collisions sont données par la formule du déterminant

$$\text{dét}\left((P_t(x_i,A_j))_{1\le i,j\le N}\right)=\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}_t\in(A_1,\ldots,A_N)\text{ et }\boldsymbol{T}>t)$$

(d) On pose $X_t=\sqrt{2}W_t$, où W_t designe un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{X}_t\in d\boldsymbol{y}\ ;\ \ \boldsymbol{T}>t\right)\\ &=\left(\tfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^N 1_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{y})\ e^{-|\boldsymbol{x}|^2/(4t)-|\boldsymbol{y}|^2/(4t)}\times\text{dét}\left((e^{x_iy_j/(2t)})_{1\le i,j\le N}\right)\ d\boldsymbol{y}\end{aligned}\tag{11}$$

où $d\boldsymbol{y}\prod_{1\le i\le N}dy_i$ désigne un voisinage infinitésimal du point $\boldsymbol{y}=(y_i)_{1\le i\le N}\mathbb{R}^N$, $|\boldsymbol{x}|^2=\sum_{1\le i\le N}x_i^2$, et $\boldsymbol{x}\in\mathcal{W}=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^N\ :\ y_1<\ldots<y_N\right\}$ la chambre de Weyl. On fixe le point de départ $\boldsymbol{x}=(x_i)_{1\le i\le N}\in\mathcal{W}$. En utilisant l'approximation

$$\forall|y_j|\le t^{3/4}\qquad e^{x_iy_j/(2t)}=\sum_{p=1}^N\frac{(x_iy_j)^{p-1}}{(p-1)!(2t)^{p-1}}\ \left(1+\mathrm{O}(t^{-N/4})\right)$$

vérifier que

$$\text{dét}\left((e^{x_iy_j/(2t)})_{1\le i,j\le N}\right)=\text{dét}\left(A(t)\right)\ \left(1+\mathrm{O}(t^{-1/4})\right)$$

où $A(t)=(A_1(t),\ldots,A_N(t))$ désigne la matrice formée par les colonnes

$$A_j(t)=\sum_{p=1}^N b_{j,p}(t)\ B_p\quad\text{avec}\qquad b_{j,p}(t):=\frac{(y_j)^{p-1}}{(p-1)!(2t)^{p-1}}\quad\text{et}\quad B_p:=\begin{pmatrix}x_1^{(p-1)}\\ \vdots\\ x_N^{(p-1)}\end{pmatrix}$$

(e) En déduire que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{X}_t\in d\boldsymbol{y}\ ;\ \ \boldsymbol{T}>t\right)&\propto 1_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{y})\ e^{-|\boldsymbol{x}|^2/(4t)-|\boldsymbol{y}|^2/(4t)}\\ &\times\left[\textstyle\prod_{1\le i<j\le N}(x_j-x_i)\right]\ \left[\textstyle\prod_{1\le i<j\le N}(y_j-y_i)\right]\ \left(1+\mathrm{O}(t^{-N/4})\right)\ d\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

et en conclure que

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{X}_t\in d\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{T}>t\right)\ \propto 1_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{y})\ e^{-|\boldsymbol{y}|^2/(4t)}\times\left[\prod_{1\le i<j\le N}(y_j-y_i)\right]\ \left(1+\mathrm{O}(t^{-N/4})\right)\ d\boldsymbol{y}$$