Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques.

Pierre Del Moral – Stefano De Marco – Massimiliano Gubinelli – Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 6 - 15 février 2013

L'objectif de cette séance est d'illustrer numériquement dans le cadre du modèle financier de Black-Scholes les résultats vus en cours concernant la convergence au sens fort et faible du schéma d'Euler, la simulation de processus stoppés et la méthode de Monte Carlo multi-niveaux.

L'équation différentielle stochastique de Black-Scholes

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + rS_t dt,\ S_0 = s_0 > 0,\ \sigma > 0$$

admet comme solution explicite le processus de Black-Scholes $S_t = s_0 e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$ de densité lognormale $p(t,x) = \frac{1_{\{x>0\}}}{\sigma x \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(\ln(\frac{x}{s_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})t)^2}{2\sigma^2 t}}$. C'est l' exemple le plus simple d'équation différentielle stochastique à coefficient de diffusion non constant pour laquelle on dispose d'une solution explicite. La connaissance de cette solution explicite et de sa loi permettra d'estimer l'erreur forte et l'erreur faible du schéma d'Euler.

EXERCICE 1 -: Vitesse forte du schéma d'Euler

On se donne un horizon de temps $T > 0$ et un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ de pas de discrétisation.

1. Écrire l'évolution du schéma d'Euler $(S^{(h)}_{kh})_{0 \leq k \leq N}$ de pas $h = \frac{T}{N}$.

2. Écrire l'évolution du modèle de Black-Scholes $(S_{kh})_{0 \leq k \leq N}$ sur la même grille de discrétisation.

3. Dans le programme *vitfort_Q.sce*, implémenter M copies indépendantes de ces deux évolutions en mettant à jour les vecteurs *Se* et *S*. Mettre à jour le vecteur *maxer* des M copies de $\max_{0 \leq j \leq k} |S^{(h)}_{jh} - S_{jh}|$. On pourra calculer en dehors de la boucle sur l'indice temporel k les paramètres utiles à la discrétisation de pas h comme $(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N}$.

4. Le programme trace en fonction de h l'estimation empirique de $\mathbb{E}[\max_{0 \leq j \leq T/h} |S^{(h)}_{jh} - S_{jh}|^2]$ sur les M trajectoires simulées ainsi que les bornes de l'intervalle de confiance à 95% basé sur le théorème de la limite centrale. Que constatez-vous? Est-ce conforme à la théorie?

EXERCICE 2 -: vitesse faible du schéma d'Euler

On souhaite maintenant étudier la vitesse faible du schéma d'Euler pour le calcul d'un Put européen d'échéance T dans le modèle de Black-Scholes, c'est-à-dire la dépendance en h de $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S^{(h)}_T)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$. Pour cela, on va évaluer la première espérance en effectuant la moyenne empirique des contributions de M copies indépendantes du schéma d'Euler. La seconde espérance sera

- soit calculée à l'aide de formule de Black-Scholes

$$\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d + \sigma\sqrt{T}) - s_0\mathcal{N}(-d) \text{ où } d = \frac{\ln(s_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

  et $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$,

- soit approchée par la moyenne empirique des contributions de M copies indépendantes du modèle de Black-Scholes simulées en utilisant les accroissements browniens qui servent à générer le schéma d'Euler.

1. Sur quel type de méthode de réduction de variance la seconde approche repose-t-elle?

2. Quel est le comportement théorique de $\mathbb{E}(e^{-rT}(K-S_T^{(h)})^+)-\mathbb{E}(e^{-rT}(K-S_T)^+)$ en fonction de h?

3. Compléter le programme *vitfaible_Q.sce* en implémentant l'évolution du modèle de Black-Scholes et du schéma d'Euler et en calculant dans *contputeul* et *contcareul* la somme des contributions des M trajectoires et de leurs carrés dans la seconde approche.

4. Exécuter le programme *vitfaible_Q.sce* pour constater la vitesse faible effective du schéma d'Euler. Le programme trace en fonction de h l'estimation empirique de $\mathbb{E}[e^{-rT}(K - S_T^{(h)})^+ - e^{-rT}(K-S_T)^+]$ sur les M trajectoires simulées (seconde approche) ainsi que les bornes de l'intervalle de confiance à 95% basé sur le théorème de la limite centrale. Que constatez-vous?

5. Les vecteurs *liceul* et *contliceul* contiennent les demi-largeurs des intervalles de confiance à 95% basés sur le TLC. La technique de variable de contrôle est-elle efficace?

EXERCICE 3 -: option barrière
On souhaite maintenant étudier la convergence de l'approximation à l'aide du schéma d'Euler du prix du Call up and out $\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T-K)^+ 1_{\{\tau>T\}}]$ où $\tau = \inf\{t \geq 0, S_t \notin D\}$ avec $D =]-\infty, b[$. Lorsque $b > s_0$ ce prix est donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T-K)^+ 1_{\{\tau>T\}}] &= s_0(\mathcal{N}(d_1)-\mathcal{N}(d_2)) - Ke^{-rT}(\mathcal{N}(d_1-\sigma\sqrt{T})-\mathcal{N}(d_2-\sigma\sqrt{T}))\\ &-\left(\frac{b}{s_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\left(\frac{b^2}{s_0}(\mathcal{N}(d_3)-\mathcal{N}(d_4)) - Ke^{-rT}(\mathcal{N}(d_3-\sigma\sqrt{T})-\mathcal{N}(d_4-\sigma\sqrt{T}))\right).\end{aligned}$$

où $d_1 = \frac{\ln(s_0/K)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \frac{\ln(s_0/b)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_3 = \frac{\ln(b^2/(s_0K))+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_4 = \frac{\ln(b)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$.

1. Que vaut $\mathbb{P}(\sup_{t\in[jh,(j+1)h]} S_t^{(h)} < b | S_{jh}^{(h)}, S_{(j+1)h}^{(h)})$? Et $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,kh]} S_t^{(h)} < b | S_h^{(h)}, \ldots, S_{kh}^{(h)})$?

2. À quel niveau de barrière faut-il comparer la valeur du schéma d'Euler $S_{kh}^{(h)}$ pour implémenter la méthode de décalage de frontière?

3. Dans le programme *barriere_Q.sce*, mettre à jour les vecteurs *Se*, *probab* et *indbdec* de M copies indépendantes du schema d'Euler, de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,kh]} S_t^{(h)} < b | S_h^{(h)}, \ldots, S_{kh}^{(h)})$ de non franchissement de la barrière par le schéma d'Euler en temps continu et de l'indicatrice de non-franchissement de la barrière décalée.

4. Le programme représente en fonction de $N = T/h$ l'écart entre le prix exact en rouge et les approximations obtenues respectivement en calculant la moyenne empirique sur les M copies du produit de $(S_T^{(h)} - K)^+$ par

   - l'indicatrice $1_{\{S_0^{(h)}<b,\ldots,S_T^{(h)}<b\}}$ que le schéma d'Euler ne franchit pas la barrière aux instants de discrétisation,
   - $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} S_t^{(h)} < b | S_h^{(h)}, \ldots, S_T^{(h)})$,
   - l'indicatrice que le schéma d'Euler ne franchit pas la barrière décalée aux instants de discrétisation.

   Que constatez-vous?

EXERCICE 4 -: Méthode de Monte-Carlo multi-niveaux

On reprend le calcul du prix du Put européen mais cette fois en utilisant la méthode de Monte-Carlo multiniveaux.

1. Implémenter l'évolution entre les instants $kT2^{1-l}$ et $(k+1)T2^{1-l}$ d'une matrice Sef (resp. Seg) de taille $N \times M$ du schéma d'Euler de pas fin $T2^{-l}$ (resp. de pas grossier $T2^{1-l}$) en utilisant les mêmes accroissements browniens. Ajouter à *prix* la somme par colonne des différence des payoffs non actualisés des deux schémas à l'instants T divisée par M.

2. Le programme représente les histogrammes de $N = 1000$ réalisations de l'estimateur Monte-Carlo multi-niveaux pour des niveaux de précision ε divisés par 2 d'un histogramme au suivant. Les vecteurs *errquad* et *lic* donnent respectivement l'estimation empirique de l'espérance du carré de l'erreur et la demi-largeur de l'intervalle de confiance à 95% associée à cette estimation en fonction de ε. L'espérance du carré de l'erreur évolue-t-elle avec ε conformément à ce qui est attendu?