Méthodes de Monte Carlo et processus stochastiques

Pierre Del Moral - Stefano De Marco - Massimiliano Gubinelli - Benjamin Jourdain

Map 564 - PC 2 - 18 janvier 2013

EXERCICE 1 - Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $f(\lambda) = \mathbb{E}(F(X))$ pour une certaine fonction bornée F qu'on suppose dérivable et à dérivée bornée.

1. Utiliser la méthode de la vraisemblance pour représenter $f'(\lambda)$ comme une espérance.
2. Utiliser la méthode de dérivation ps pour donner une représentation alternative de $f'(\lambda)$ comme une espérance. (Indication: représenter X à l'aide d'une variable uniforme).
3. Par intégration par parties sur $\mathbb{R}$, retrouver directement que les deux formules coïncident.

EXERCICE 2 - Notre objectif est d'estimer la transformée de Laplace $\phi(u) = \mathbb{E}(e^{uX})$ à partir d'un n-échantillon Gaussien centré et de variance inconnue σ^2. Quelle est la *meilleure* procédure:

- Calculer la moyenne empirique $\phi_{1,n}(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{uX_k}$?
- Estimer σ^2 par la variance empirique σ_n^2, puis estimer $\phi(u)$ par la quantité $\phi_{2,n}(u) = e^{\frac{u^2}{2}\sigma_n^2}$?

On calculera pour cela les IC asymptotiques de chaque estimateur.

EXERCICE 3 - Inégalité de Hoeffding et concentration

1. Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_t$ la probabilité de densité $d\mathbb{P}_t/d\mathbb{P} = e^{tX}/\mathbb{E}[e^{tX}]$ et $\mathbb{E}_t$ l'espérance correspondante.

   (a) Que vaut $\sup_{x\in[a,b]}(x - \frac{a+b}{2})^2$? En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}_t[(X - \mathbb{E}_t(X))^2] \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. (Indication: l'espérance est le meilleur estimateur d'une variable aléatoire selon le risque quadratique)

   (b) Soit $f(t) = \ln(\mathbb{E}(e^{t(X-\mathbb{E}(X))}))$. Calculer $f''(t)$ et en déduire que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(e^{t(X-\mathbb{E}(X))}) \leq e^{(b-a)^2t^2/8}$$

   (c) Dans le cas où $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$, calculer $\lim_{t\to 0} t^{-2}(\mathbb{E}(e^{tX}) - 1)$ et en déduire que la constante $1/8$ dans l'inégalité precédente est optimale.

2. On suppose que les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs respectives dans $[a_i, b_i]$ avec $-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz C.

   (a) Montrer que
$$\forall r > 0, \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (\varphi(X_i) - \mathbb{E}(\varphi(X_i))) \geq r\right) \leq \exp\left(-\frac{2r^2}{C^2\sum_{i=1}^n(b_i - a_i)^2}\right)$$

(b) Dans le cas où les X_i sont i.i.d. suivant la loi de X, conclure que

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\varphi(X_i) - \mathbb{E}(\varphi(X_i))]\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{C^2(b-a)^2}\right)$$

Quel est l'intérêt de cet intervalle de confiance par rapport à celui obtenu avec l'inégalité de Bienaimé-Chebychev? et celui obtenu par le théorème de la limite centrale?

3. On suppose maintenant que $(\mathcal{F}_k)_{k\geqslant 0}$ est une filtration telle que $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale et que $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ est une $\mathcal{F}$-martingale avec $M_0 = m$ et pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $A_k \leqslant M_k - M_{k-1} \leqslant B_k$ avec A_k, B_k des v.a. $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurables telles qu'il existe une constante $c_k > 0$ pour laquelle $|B_k - A_k| \leqslant c_k$.

   (a) Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. En étudiant la v.a. $F(t) = \ln[\mathbb{E}(e^{t(M_k - M_{k-1})}|\mathcal{F}_{k-1})]$ avec une methode similaire à celle utilisé dans la question 1b montrer que $\mathbb{E}(e^{t(M_k-M_{k-1})}|\mathcal{F}_{k-1}) \leq e^{c_k^2 t^2/8}$ presque sûrement.

   (b) Montrer que $\mathbb{E}(e^{t(M_n-m)}) \leq e^{\frac{t^2}{8}\sum_{k=1}^{n} c_k^2}$. On suppose maintenant que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on a $a_k \leqslant M_k - M_{k-1} \leqslant b_k$ pour des constantes a_k, b_k telles que $b_k - a_k \leqslant c_k$. Comparer ce résultat avec l'inégalité qu'on obtient en appliquant directement le résultat de la question 1b à la variable aléatoire $M_n - m$.

   (c) En déduire que pour $r > 0$, $\mathbb{P}(|M_n - m| \geq r) \leq 2\exp\left(-\frac{2r^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$.

4. On suppose que les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_j',\dots,x_n)| \leq L$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ et $x_1,\dots,x_n,x_j' \in \mathbb{R}$.

   (a) [Inegalité de McDiarmid] On pose $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1,\dots,X_k)$ pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et $M_k = \mathbb{E}[f(X_1,\dots,X_n)|\mathcal{F}_k]$ pour tout $k \geq 0$. Montrer qu'il existent des v.a. A_k, B_k $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurables et telles que $A_k \leqslant M_k - M_{k-1} \leqslant B_k$ avec $|B_k - A_k| \leqslant L$. En déduire que

$$\mathbb{P}(|f(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}[f(X_1,\dots,X_n)]| \geq r) \leq 2\exp\left(-\frac{2r^2}{nL^2}\right)$$

   (b) On place au hasard n boules dans m boîtes. En moyenne il y aura $m(1-1/m)^n$ boîtes vides, donc la fraction moyenne μ de boîtes vides est $\mu = (1-1/m)^n$. Utiliser l'inégalité de McDiarmid (voir question 4a) pour montrer que la fraction F de boîtes vides satisfait la borne

$$\mathbb{P}(|F - \mu| > t) \leq 2e^{-2m^2t^2/n}.$$

   (Indication: On note X_i la boîte dans laquelle on place la i-éme boule et on applique l'inegalité de McDiarmid à $F = f(X_1,\dots,X_n)$).

   (c) On suppose que $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = 1/2$ et que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et de constante de Lipschitz 1. Soit $Z_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$ et $G_n(t) = \mathbb{E}[e^{t(\varphi(Z_n) - \mathbb{E}[\varphi(Z_n)])}]$. Utiliser G_n dans la limite où $n \to \infty$ et l'inégalité obtenue dans la question 3b pour deduire l'inégalité de concentration Gaussienne suivante

$$\mathbb{P}(|\varphi(Z) - \mathbb{E}[\varphi(Z)]| \geqslant r) \leqslant 2\exp(-r^2/2)$$

   où Z est une variable aléatoire Gaussienne standard. Comparer cette inegalité avec celle donnée par la question 1b.