Aléatoire PC 2 :

Pierre Del Moral

Exercice 1. : loi binomiale
Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ ($\forall x_i \in \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$).

1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et Var (X_1).
2. On pose $S = X_1 + \ldots + X_n$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S.

Exercice 2.
Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ ($\mathbb{P}(N = n) = e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$). Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$.

Exercice 3. : uniformité et indépendance
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs respectives dans F et G.

1. On suppose que les ensembles F et G sont finis. Montrer qu'il est équivalent de supposer que X et Y sont indépendantes de lois uniformes sur F et G ou de supposer que le couple (X,Y) suit la loi uniforme sur $F \times G$.
2. Montrer que s'il existe $\mu : F \to \mathbb{R}$ et $\nu : G \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in F \times G,\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mu(x)\nu(y),$$
alors X et Y sont indépendantes. Préciser dans ce cas la loi de X.

Exercice 4. : loi conditionnelle
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires I.I.D. (indépendantes et identiquement distribuées) suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et $S = X_1 + \ldots + X_n$ leur somme. Pour $s \in \{0, \dots, n\}$, donner la loi conditionnelle de X_1 sachant $S = s$ et calculer $\mathbb{E}(X_1|S)$.

Exercice 5. : lois géométrique et de Pascal
Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1]$. On pose $T_1 = \inf\{i \geq 1 :\ X_i = 1\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Et pour tout $k \geq 1$ on définit par récurrence $T_{k+1} = \inf\{i > T_k :\ X_i = 1\}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_1.
2. Déterminer la loi de T_k (*indication :* on pourra traduire l'événement $\{T_k = n\}$ sur le couple $(X_1 + \ldots + X_{n-1}, X_n)$).
3. Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que T_1, alors $Y_1 + Y_2$ a même loi que T_2 (*indication :* on pourra déterminer la loi de $(T_1, T_2 - T_1)$). Interpréter ce résultat. Comment se généralise-t-il ?
4. Donner l'espérance et la variance de T_k.

Exercice 6.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois binomiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p). Quelle est la loi de la somme $S = X + Y$?

Exercice 7.
Soit X et Y deux variables géométriques indépendantes de paramètres respectifs $p, q \in]0,1]$.

1. Quelle est la loi de $(S,T) = (\min(X,Y), |X-Y|)$? Les variables S et T sont-elles indépendantes ?
2. Donner la loi de S et interpréter le résultat en termes de temps de premier succès.

Exercice 8. : du rififi dans un grand magasin
On suppose que le nombre N de clients pendant une journée dans un grand magasin suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Chaque client a une probabilité p de se faire voler son portefeuille et ce indépendamment des autres clients, ce que l'on modélise à l'aide d'une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables I.I.D. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p indépendante de N : $X_i = 1$ si le ième client se fait dépouiller.

1. Exprimer le nombre V de clients volés en fonction de N et des X_i.
2. Déterminer la loi de $(V, N-V)$. En déduire la loi de V, celle de $N-V$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 9. : collectionneur
Chaque paquet de lessive contient un morceau d'un puzzle à n pièces. Soit T_n le nombre aléatoire de paquets qu'il faut acheter pour obtenir toutes les pièces. On veut calculer par exemple $\mathbb{E}(T_n)$ sans déterminer la loi de T_n. Pour cela, on introduit les temps successifs $T_1, T_2, \cdots, T_n$ où pour la première fois $1, 2, \cdots, n$ pièces du puzzle sont réunies.

1. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, quelle est la loi de la variable aléatoire $T_{k+1} - T_k$? En déduire $\mathbb{E}(T_n)$.
   Que peut-on dire des variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$?
2. Vérifier que $\frac{\mathrm{Var}\,(T_n)}{n^2}$ reste borné lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{T_n}{n\ln(n)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$