

Une introduction aux méthodes particulières pour l'inférence statistique et la propagations d'incertitudes

P. Del Moral

INRIA Bordeaux & IMB & CMAP X

Workshop ONERA, Palaiseau, 15 Novembre 2012

Quelques références

- ▶ Mean field simulation for Monte Carlo integration, Chapman & Hall Juillet (2013).
- ▶ Feynman-Kac formulae, Genealogical & Interacting Particle Systems with appl., Springer (2004).
- ▶ On the concentration of interacting processes. *Foundations & Trends in Machine Learning* [170p.] (2012). (joint work with Peng Hu & Liming Wu) [+ Refs]
- ▶ Plus d'info. sur le site <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~delmoral/index.html> [+ Links]

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Méthode particulières

Quelques transferts industriels d'ALEA

Modèles et analyse mathématique

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Pourquoi cela fonctionne?

Inégalités de concentrations

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Quelques domaines d'applications

- ▶ **Filtrage-poursuite** : Signal $X \rightsquigarrow$ Observations Y
(Radar-Sonar-GPS, poursuite multi-cibles,...).
- ▶ **Contrôle optimal** : Régulation, temps d'arrêts optimaux.
- ▶ **Statistique bayésienne** : Estimation de paramètres \in HMM.
- ▶ **Calibration & Propagations d'incertitudes** : Fiabilité, simulation d'événements rares, calibration de codes ...
- ▶ **Optimisation globale** : contraintes, gradients, EM \in HMM

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Quelques domaines d'applications

- ▶ **Filtrage-poursuite** : Signal $X \rightsquigarrow$ Observations Y
(Radar-Sonar-GPS, poursuite multi-cibles,...).
- ▶ **Contrôle optimal** : Régulation, temps d'arrêts optimaux.
- ▶ **Statistique bayésienne** : Estimation de paramètres \in HMM.
- ▶ **Calibration & Propagations d'incertitudes** : Fiabilité, simulation d'événements rares, calibration de codes ...
- ▶ **Optimisation globale** : contraintes, gradients, EM \in HMM

$$\text{Pb.: } \rightsquigarrow \text{ Lois } \left(\left[\begin{array}{c} \text{entrées} \\ \text{processus} \\ \text{paramètres} \\ \text{signaux} \end{array} \right] \middle| \left[\begin{array}{c} \text{sorties codes} \\ \text{évets critiques} \\ \text{référence} \\ \text{observations} \end{array} \right] \right)$$

Le problème:

$$\text{Pb.: } \rightsquigarrow \text{ Lois } \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{entrées} \\ \text{processus} \\ \text{paramètres} \\ \text{signaux} \end{array} \right] \quad \left| \quad \left[\begin{array}{c} \text{sorties codes} \\ \text{évènements critiques} \\ \text{référence} \\ \text{observations} \end{array} \right] \end{array} \right)$$



La solution: "Une unique" méthode particulière
[systèmes de particules en interaction \oplus arbres généalogiques]

- ▶ Technique universelle de simulation accept-reject \oplus recyclage
- ▶ Méthode numérique de maillage adaptatif et stochastique
- ▶ Simulation d'arbres de défauts.
- ▶ Cartes de contrôles optimaux, arbres de décisions.
- ▶ Statistical and machine learning methodology (SMC, GA)
- ▶ Méthode d'exploration d'espaces de solutions.

Quelques transferts industriels équipe INRIA ALEA

▶ CEA - CESTA

- ▶ Déconvolution de signaux et HMM.
- ▶ Optimisation sous contraintes.
- ▶ Modèles statistiques de champs lasers.
- ▶ Applications logiciel BiiPS (inférence bayésienne).

▶ EDF

- ▶ Prédiction de consommation.
- ▶ Mathématiques financières.
- ▶ Sécurité centrales nucléaires.

▶ DCNS -THALES

- ▶ Poursuite multi-cibles (ANR Propagation)
- ▶ Gestion de capteurs (SAGEM)

▶ EVOLLIS

- ▶ Systèmes de recommandation (utilisateurs WEB)

Quelques transferts industriels

- ▶ **IFREMER**

- ▶ Propagations incertitudes dans des codes hydro-dynamiques
- ▶ Fiabilité de plateformes offshore

- ▶ **INRA + VETO ALFORT:**

- ▶ Estimation paramètres cinétiques - propagations d'épidémies
- ▶ Risques alimentaires.

- ▶ **Archéologie**

- ▶ Analyse de données issues de fouilles de caves Néanderthal.
- ▶ Algo. Génétiques pour l'analyse de niches écologiques

- ▶ .../...

Depuis 2011

Projet de projet d'équipe INRIA associée avec le CMAP de l'École Polytechnique : *E. Gobet, N. Touzi, S. Allasonnière, S. Méléard, (et E. Moulines, ENST membre extérieur)*

Modèles et analyse mathématique

Modèles stochastiques:

- ▶ Intégrales de chemins de Feynman-Kac
- ▶ Méthodes particulières de type champ moyen.
- ▶ Algorithmes de MCMC en interaction
- ▶ Méthodes de simulation d'événements rares
- ▶ Calcul d'énergies libres et états fondamentaux.

Analyse de performances

- ▶ Théorèmes de la limite centrale.
- ▶ Principes de grandes déviations.
- ▶ Déviations modérées.
- ▶ Propriétés de propagation du chaos uniformes en temps
- ▶ Inégalités de concentration exponentielles.

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

- Filtrage-lissage de signaux

- Modèles d'arbres généalogiques

- Quelques paramètres de réglage

- Calibration - estimation de paramètres

- Propagations d'incertitudes dans des codes

Pourquoi cela fonctionne?

Inégalités de concentrations

Exemple du filtrage-lissage de signaux

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_n))$$

Exemple du filtrage-lissage de signaux

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_n))$$

Simulation champ moyen = Filtres particuliers

(Prédiction, Correction)

=

(Exploration, Selection-(Accept-reject-recyclage))

Exemple du filtrage-lissage de signaux

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_n))$$

Simulation champ moyen = Filtres particuliers

(**Prédiction**, **Correction**)

=

(**Exploration**, **Selection-(Accept-reject-recyclage)**)

Approximations empiriques

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n} \simeq \text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_n))$$

Exemple du filtrage-lissage de signaux

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_n))$$

Simulation champ moyen = Filtres particuliers

(**Prédiction**, **Correction**)

=

(**Exploration**, **Selection-(Accept-reject-recyclage)**)

Approximations empiriques

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n} \simeq \text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_n))$$

⊕ **Estimation sans biais des constantes de normalisation**

(ici $p(y_0, \dots, y_n)$)

$$\prod_{0 \leq t \leq n} \text{vraisemblance empiriques moyennes} \simeq \prod_{0 \leq t \leq n} \text{proportions de succès}$$

Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

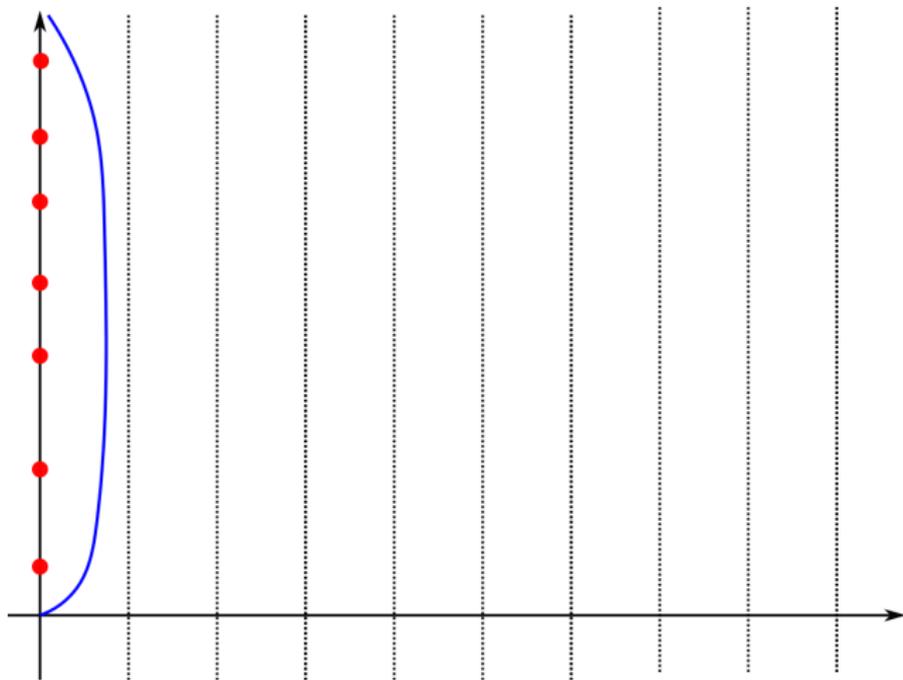


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

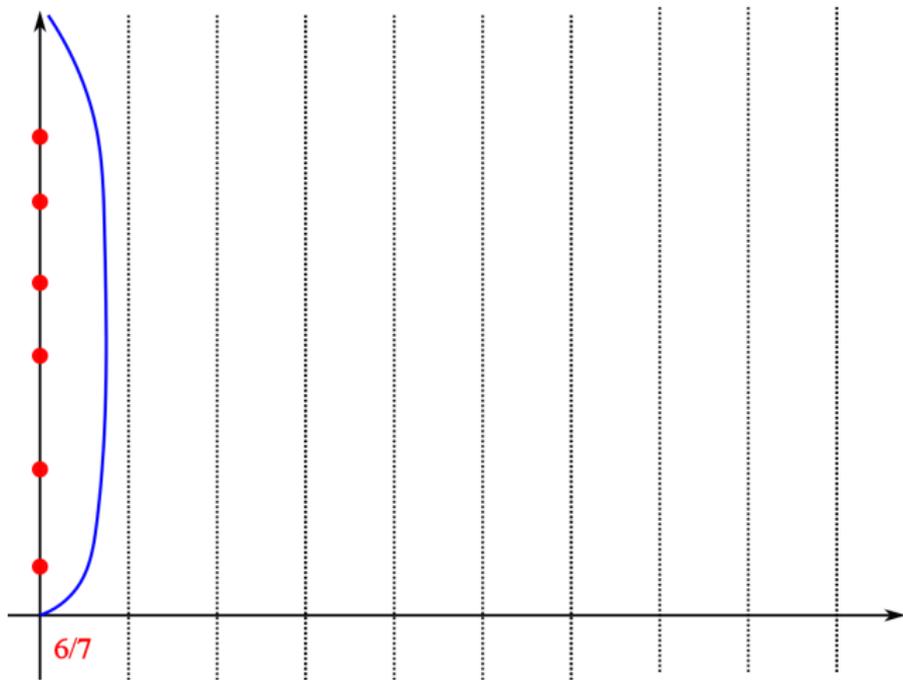


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

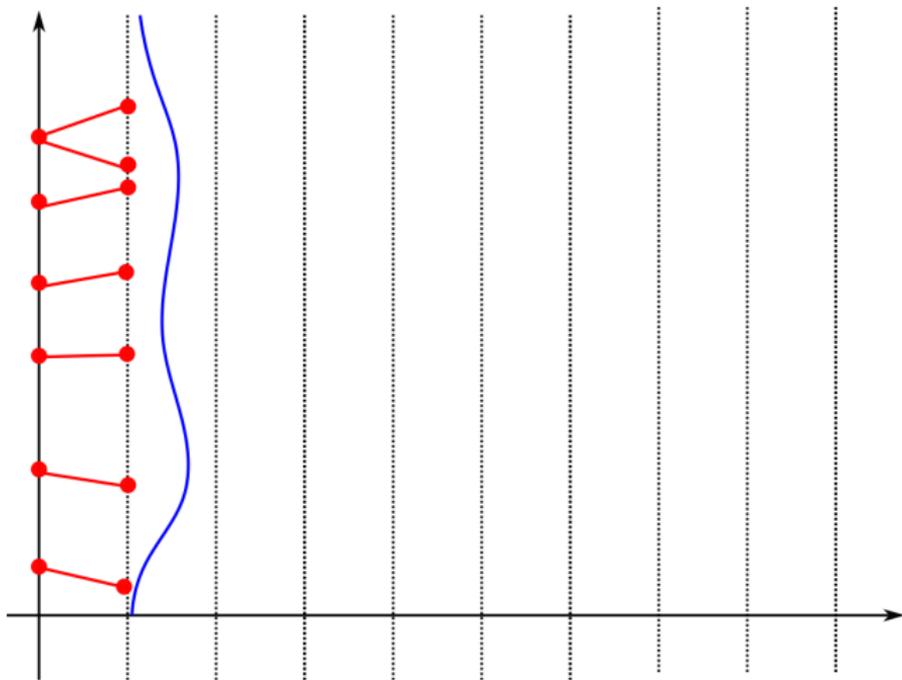


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

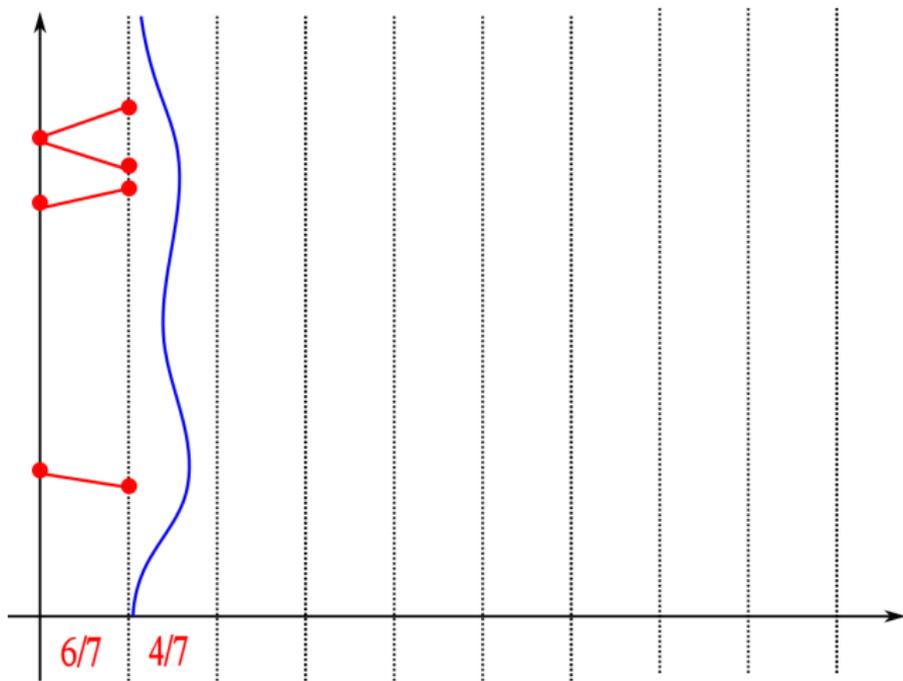


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

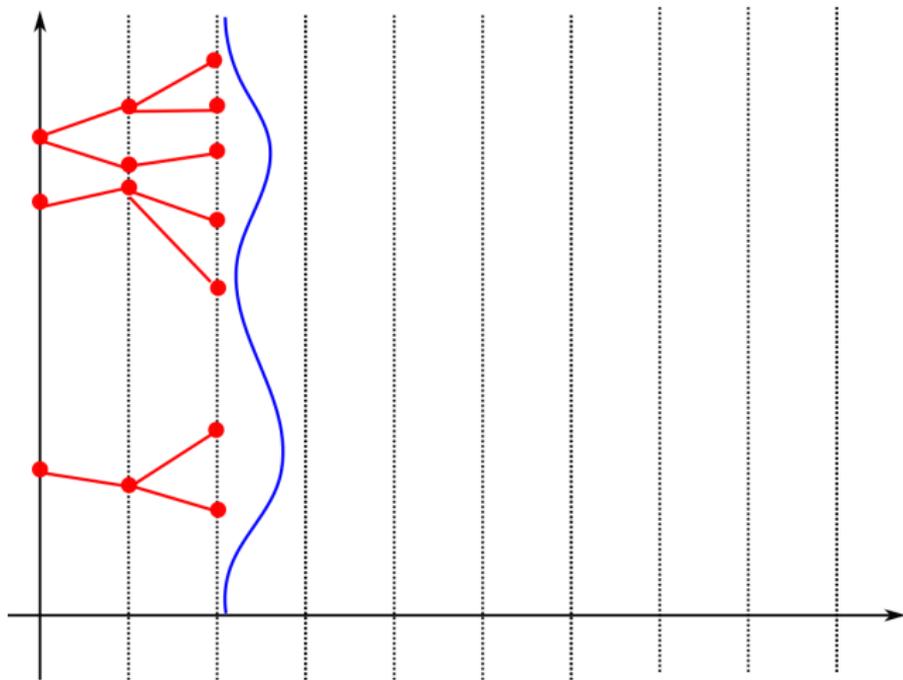


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

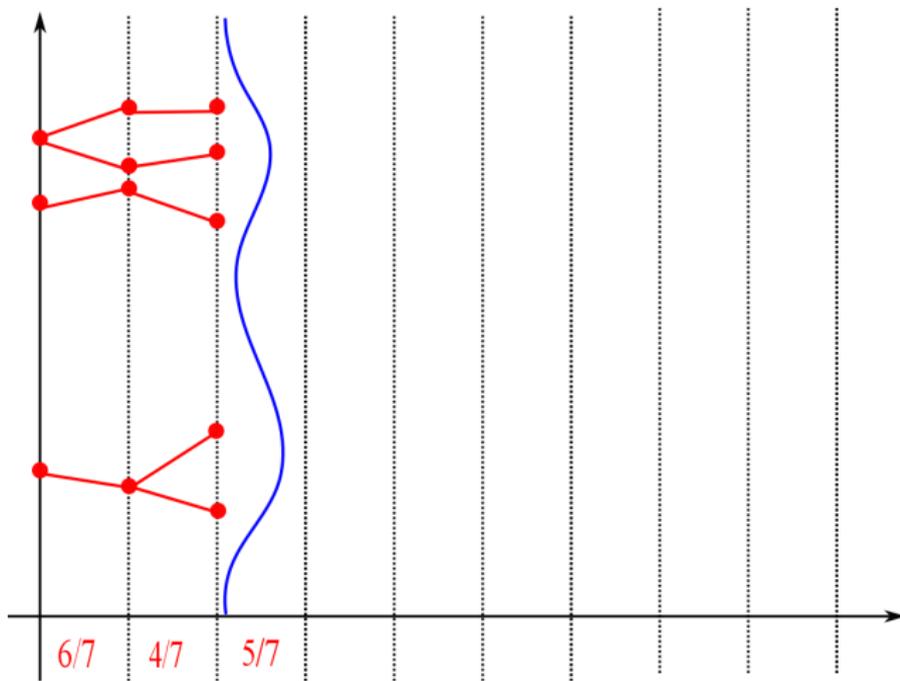


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

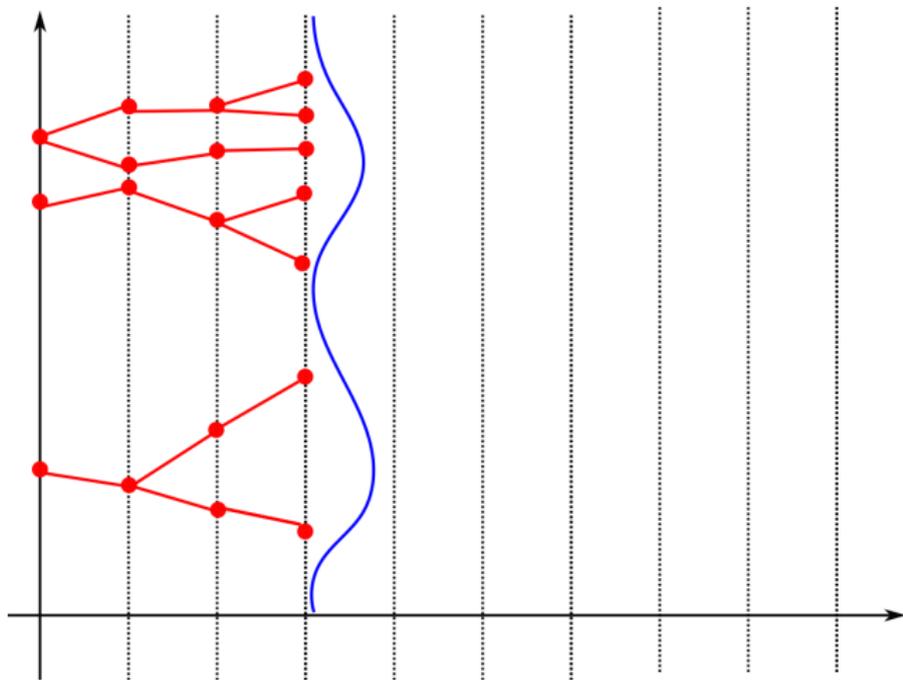


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

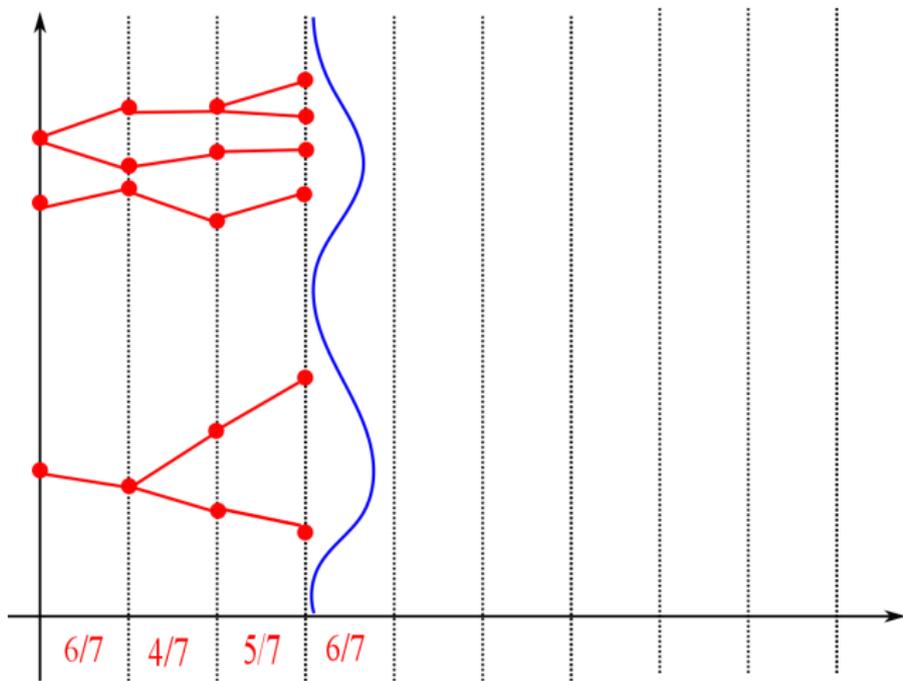


Illustration : filtre optimal $\simeq \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

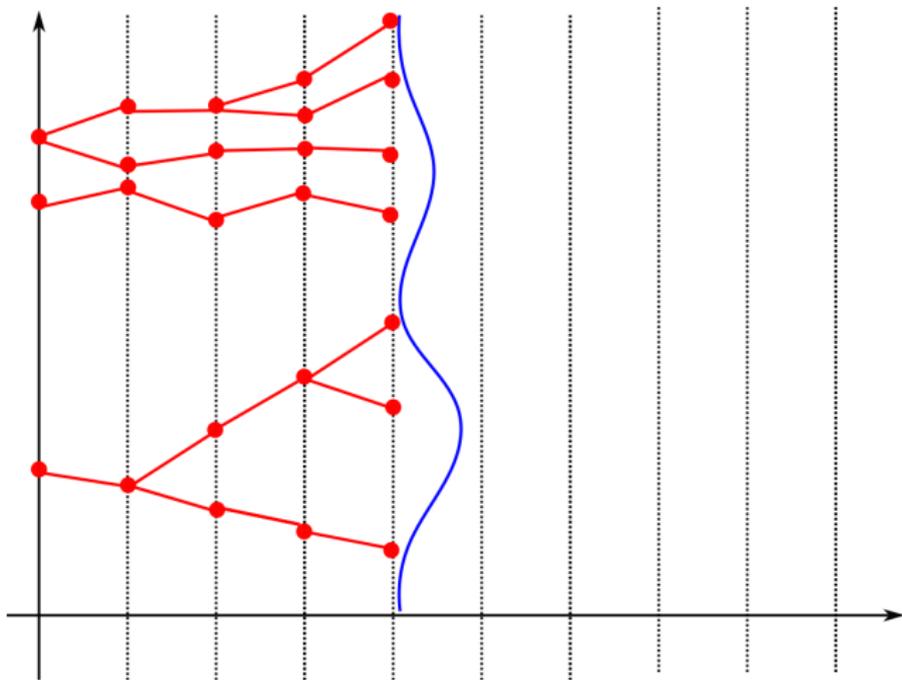


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

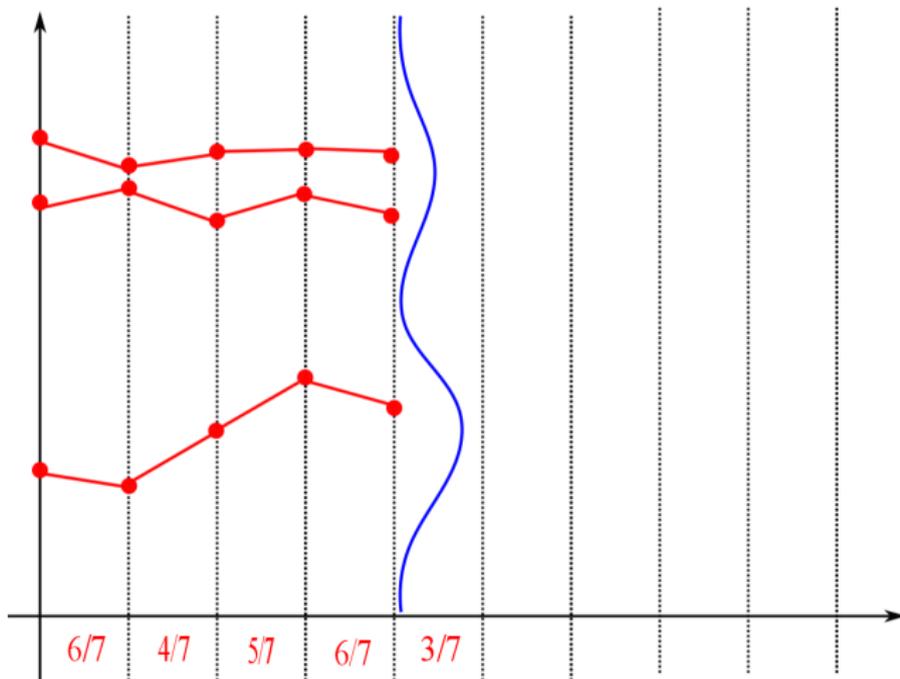


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

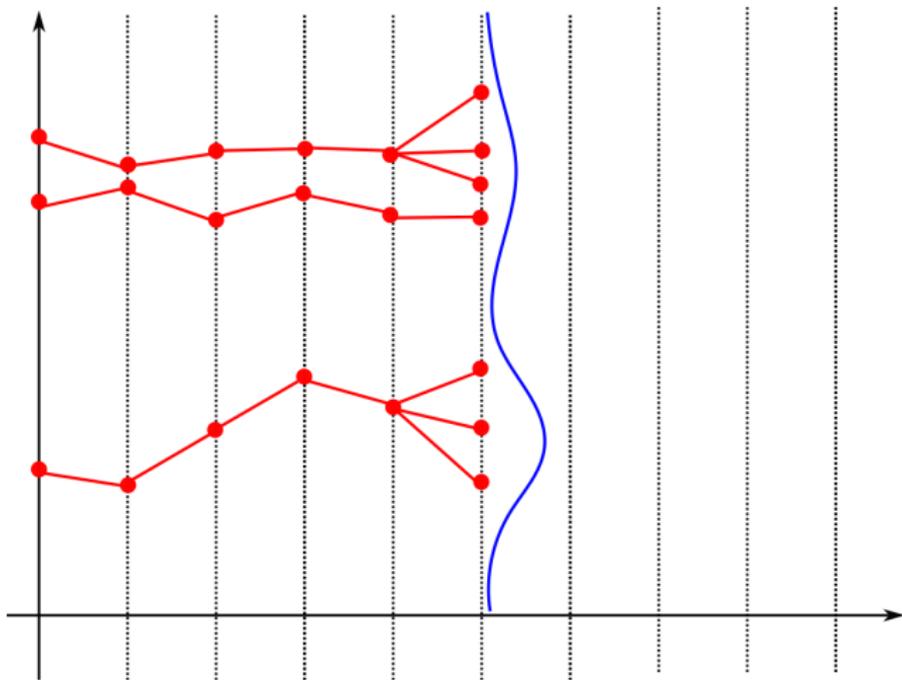


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

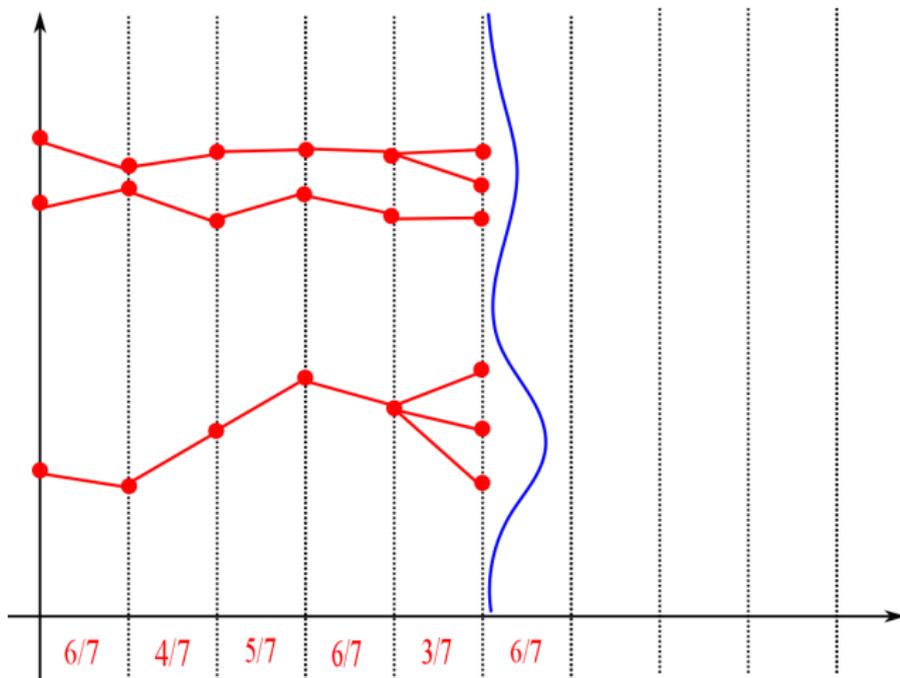


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

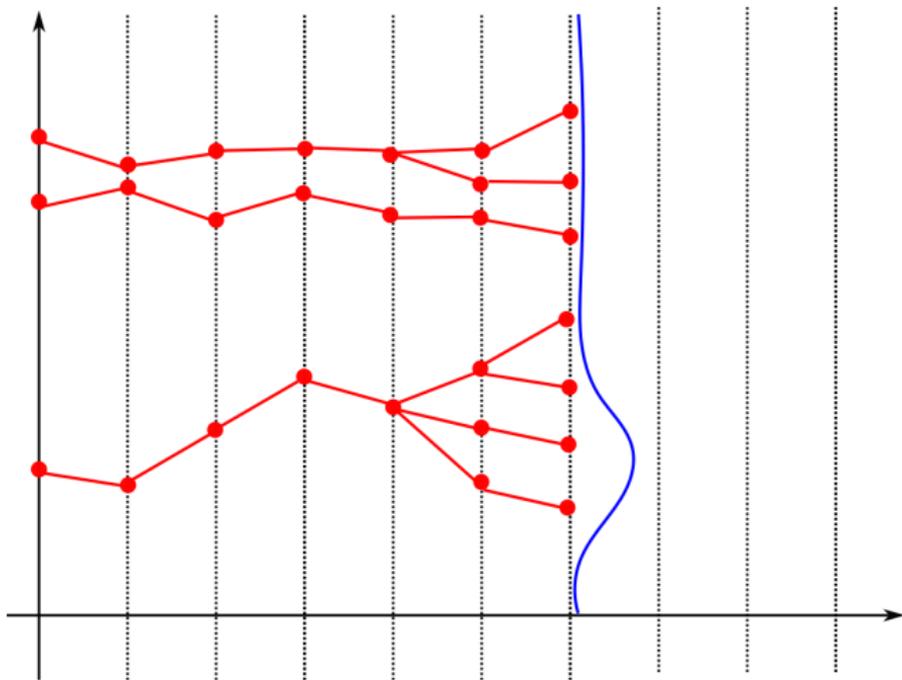


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

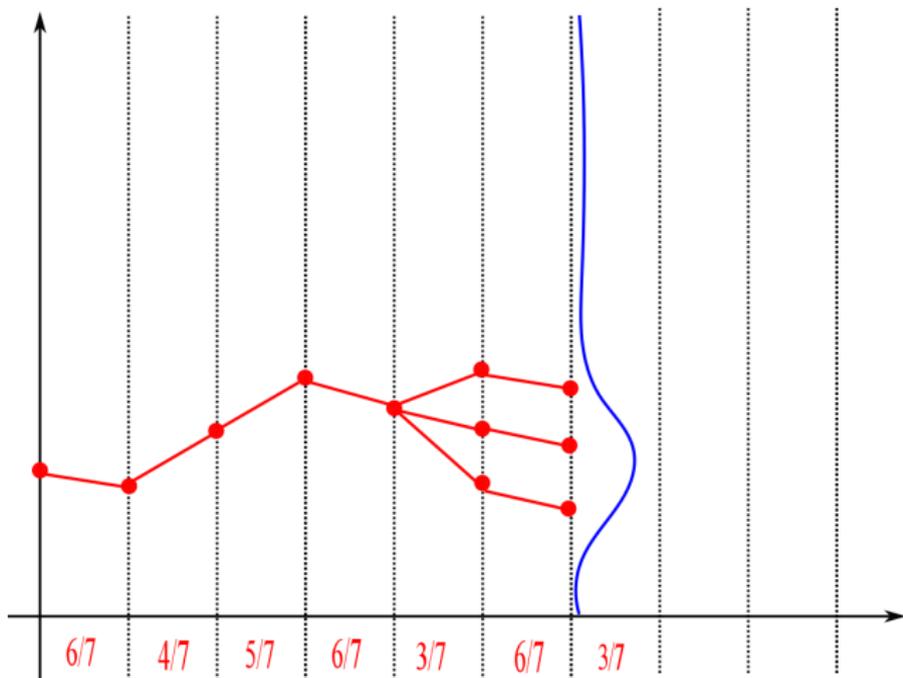


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

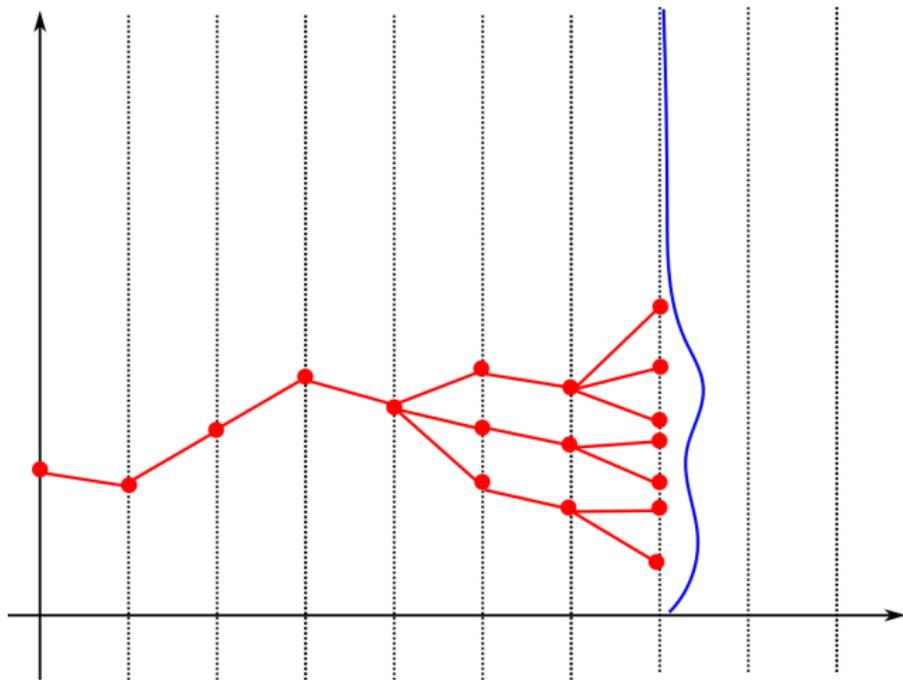


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

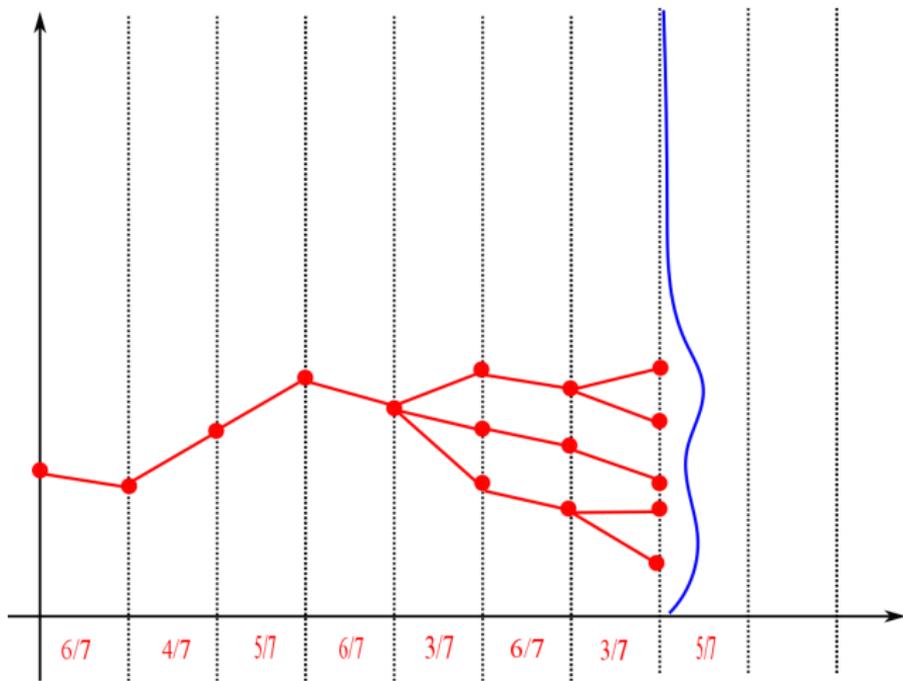


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

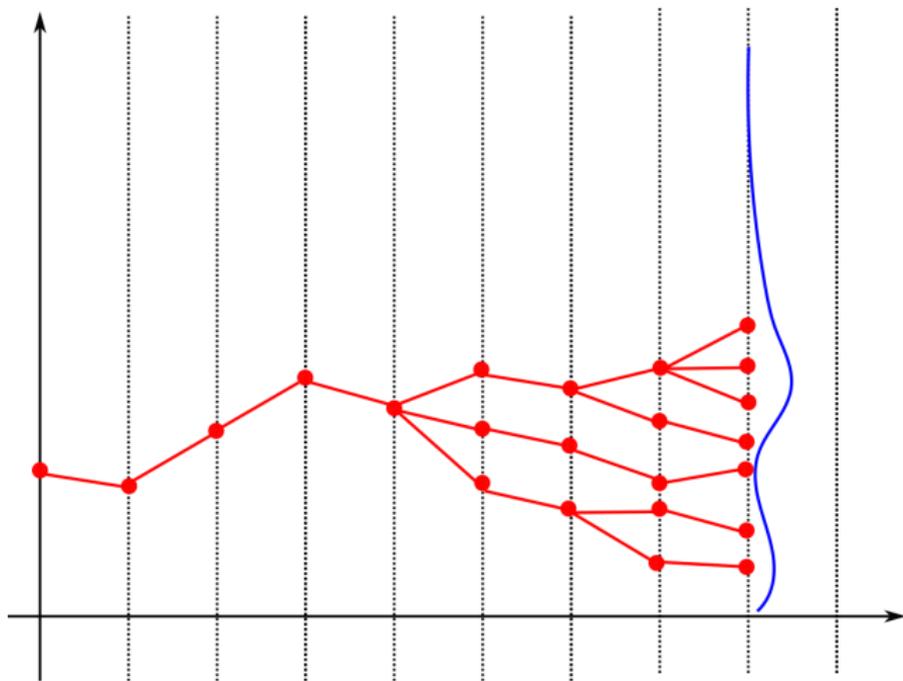


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$

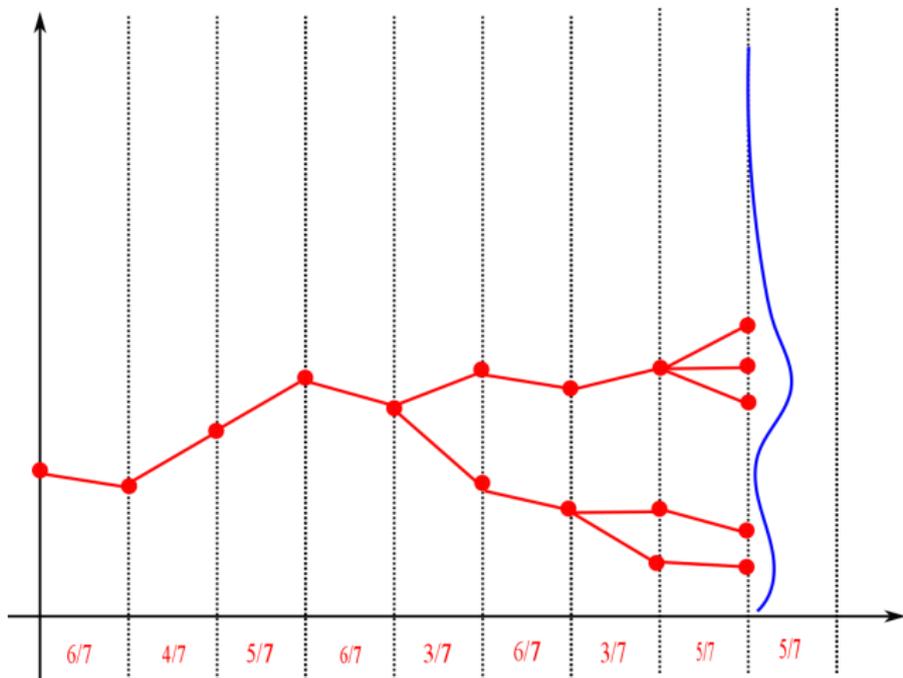
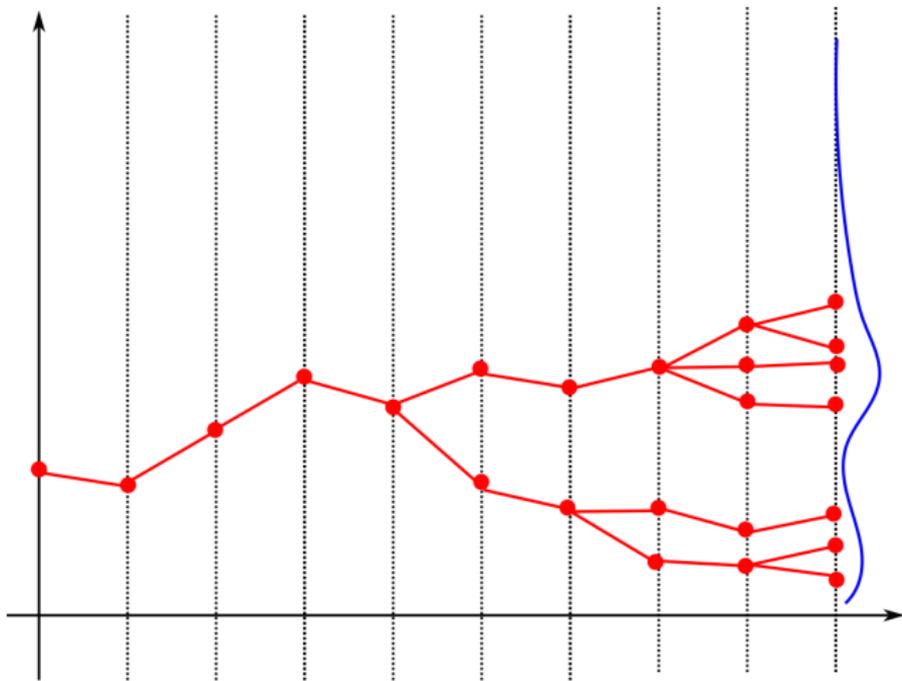


Illustration : filtre optimal $\approx \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{i\text{-ième ligne ancestrale temps } n}$



Lecture de l'arbre ancestral complet

Une fois le filtre particulaire simulé avec N particules, les lois

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_{n-1}))$$

sont les lois des trajectoires **d'une chaîne de Markov à rebours**

Lecture de l'arbre ancestral complet

Une fois le filtre particulaire simulé avec N particules, les lois

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_{n-1}))$$

sont les lois des trajectoires **d'une chaîne de Markov à rebours**

- ▶ Loi (initiale) au temps $n = [1/N, \dots, 1/N] := U$
- ▶ Matrices de transition $n \rightsquigarrow (n-1)$

$$M_n(i, j) = \frac{\rho(Y_{n-1} \mid X_{n-1}^j) \rho(X_n^i \mid X_{n-1}^j)}{\sum_{k=1}^N \rho(Y_{n-1} \mid X_{n-1}^k) \rho(X_n^i \mid X_{n-1}^k)}$$

Lecture de l'arbre ancestral complet

Une fois le filtre particulaire simulé avec N particules, les lois

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_{n-1}))$$

sont les lois des trajectoires **d'une chaîne de Markov à rebours**

- ▶ Loi (initiale) au temps $n = [1/N, \dots, 1/N] := U$
- ▶ Matrices de transition $n \rightsquigarrow (n-1)$

$$M_n(i, j) = \frac{\rho(Y_{n-1} \mid X_{n-1}^j) \rho(X_n^i \mid X_{n-1}^j)}{\sum_{k=1}^N \rho(Y_{n-1} \mid X_{n-1}^k) \rho(X_n^i \mid X_{n-1}^k)}$$

Lissage: $f_p := [f_p(X_p^1), \dots, f_p(X_p^N)]^T$, $p \leq n$

$$\mathbb{E}(f_p(X_p) \mid (Y_0, \dots, Y_{n-1})) \simeq U M_n M_{n-1} \dots M_{p+1} f_p$$

Lecture de l'arbre ancestral complet

Une fois le filtre particulaire simulé avec N particules, les lois

$$\text{Loi}((X_0, \dots, X_n) \mid (Y_0, \dots, Y_{n-1}))$$

sont les lois des trajectoires **d'une chaîne de Markov à rebours**

- ▶ Loi (initiale) au temps $n = [1/N, \dots, 1/N] := U$
- ▶ Matrices de transition $n \rightsquigarrow (n-1)$

$$M_n(i, j) = \frac{\rho(Y_{n-1} \mid X_{n-1}^j) \rho(X_n^i \mid X_{n-1}^j)}{\sum_{k=1}^N \rho(Y_{n-1} \mid X_{n-1}^k) \rho(X_n^i \mid X_{n-1}^k)}$$

Lissage: $f_p := [f_p(X_p^1), \dots, f_p(X_p^N)]^T$, $p \leq n$

$$\mathbb{E}(f_p(X_p) \mid (Y_0, \dots, Y_{n-1})) \simeq U M_n M_{n-1} \dots M_{p+1} f_p$$

Autre application : trajectoires les plus vraisemblables via Viterbi

Quelques paramètres de réglage

- ▶ Choix de la **Prédiction=Exploration**
 - ▶ Transitions "pures" du signal.
 - ▶ Changements de lois d'importance
[bruits virtuels, simu. conditionnelle, grappes particulières]
 - ▶ Filtre de Kalman (étendu ou non) \rightsquigarrow *Kalman en interaction*
 - ▶ Variables lentes-rapides \rightsquigarrow *Filtres particulières en interaction*
 - ▶ Étapes de MCMC \rightsquigarrow *Stabilisation des trajectoires*
- ▶ Choix de la **Correction=Selection**
 - ▶ Fenêtres - périodes de selection
 - ▶ Critères adaptatifs (variances des vraisemblances, entropie...)
 - ▶ Paramètres de dilatation temporelle (calcul ||)
 - ▶ Vraisemblance incalculables \rightsquigarrow Méthodes type ABC
[\Leftrightarrow observations virtuelles]
- ▶ **Trajectoires/bruits les +vraisemblables** \rightsquigarrow **régulation-contrôle**
(dualité : filtrage - régulation - contrôle boucle ouverte)

Calibration, HMM, analyse de données

$$\text{Loi}(\Theta \mid (Y_0, \dots, Y_n) = y) \propto \underbrace{p(y|\theta)}_{\text{Constante de normalisation de } p(x \mid y, \theta)} dp(\theta)$$

Calibration, HMM, analyse de données

$$\text{Loi}(\Theta \mid (Y_0, \dots, Y_n) = y) \propto \underbrace{p(y|\theta)}_{\text{Constante de normalisation de } p(x \mid y, \theta)} dp(\theta)$$

- ▶ **MCMC** si (X, Y) linéaire gaussien \rightsquigarrow direct via Metropolis-Hasting

Calibration, HMM, analyse de données

$$\text{Loi}(\Theta \mid (Y_0, \dots, Y_n) = y) \propto \underbrace{p(y|\theta)}_{\text{Constante de normalisation de } p(x \mid y, \theta)} dp(\theta)$$

- ▶ **MCMC** si (X, Y) linéaire gaussien \rightsquigarrow direct via Metropolis-Hasting
- ▶ **MCMC particulière** si (X, Y) non linéaires \vee non gaussiens

$$\forall \theta \text{ visité} \quad p(y|\theta) \stackrel{\text{sans biais}}{\simeq} p^N(y|\theta) := \prod_{0 \leq t \leq n} p^N(y_t \mid y_0, \dots, y_{t-1}, \theta)$$

Calibration, HMM, analyse de données

$$\text{Loi}(\Theta \mid (Y_0, \dots, Y_n) = y) \propto \underbrace{p(y|\theta)}_{\text{Constante de normalisation de } p(x \mid y, \theta)} dp(\theta)$$

- ▶ **MCMC** si (X, Y) linéaire gaussien \rightsquigarrow direct via Metropolis-Hasting
- ▶ **MCMC particulière** si (X, Y) non linéaires \vee non gaussiens

$$\forall \theta \text{ visité} \quad p(y|\theta) \stackrel{\text{sans biais}}{\simeq} p^N(y|\theta) := \prod_{0 \leq t \leq n} p^N(y_t \mid y_0, \dots, y_{t-1}, \theta)$$

- ▶ **MCMC en interaction** = "Filtre avec N particules θ^i "
 - ▶ **Prédiction** = **Exploration** = **MCMC particulière** (en θ)
 - ▶ **Correction** = **Sélection** = $p^N(y_t \mid y_0, \dots, y_{t-1}, \theta^i)$

\hookrightarrow **Avantage** :

Paramètre de précision N *et non l'horizon temporel* (\rightsquigarrow calcul $\| \|$)

Propagations d'incertitudes

$$I = \text{Entrées} \longrightarrow \boxed{\text{Code numérique}} \longrightarrow O = \text{Sorties} = C(I)$$

$$\rightsquigarrow \text{Pb.}:\quad \text{Loi}(I \mid O \in B) \propto 1_A(I) \times dp(I) \quad \text{avec} \quad A = C^{-1}(B)$$

Propagations d'incertitudes

$$I = \text{Entrées} \longrightarrow \boxed{\text{Code numérique}} \longrightarrow O = \text{Sorties} = C(I)$$

$$\rightsquigarrow \text{Pb.} \quad \text{Loi}(I \mid O \in B) \propto 1_A(I) \times dp(I) \quad \text{avec} \quad A = C^{-1}(B)$$

Idée : Sortie O_n de + en + "complexes" \Leftrightarrow domaines d'entrées $A_n \downarrow$



Simuler $1_{A_{n+1}}(I) \times dp(I)$ partant d'échantillons de $1_{A_n}(I) \times dp(I)$

Propagations d'incertitudes

$$I = \text{Entrées} \longrightarrow \boxed{\text{Code numérique}} \longrightarrow O = \text{Sorties} = C(I)$$

$$\rightsquigarrow \text{Pb.} \quad \text{Loi} (I \mid O \in B) \propto 1_A(I) \times dp(I) \quad \text{avec} \quad A = C^{-1}(B)$$

Idée : Sortie O_n de + en + "complexes" \Leftrightarrow domaines d'entrées $A_n \downarrow$



Simuler $1_{A_{n+1}}(I) \times dp(I)$ partant d'échantillons de $1_{A_n}(I) \times dp(I)$

MCMC en interaction = "Filtre avec N particules i "

- ▶ **Prédiction = Exploration** = MCMC sur chaque niveau A_n
- ▶ **Correction = Sélection** = des entrées dans A_{n+1} ($\subset A_n$)

Propagations d'incertitudes

$$I = \text{Entrées} \longrightarrow \boxed{\text{Code numérique}} \longrightarrow O = \text{Sorties} = C(I)$$

$$\rightsquigarrow \text{Pb.:} \quad \text{Loi}(I \mid O \in B) \propto 1_A(I) \times dp(I) \quad \text{avec} \quad A = C^{-1}(B)$$

Idée : Sortie O_n de + en + "complexes" \Leftrightarrow domaines d'entrées $A_n \downarrow$



Simuler $1_{A_{n+1}}(I) \times dp(I)$ partant d'échantillons de $1_{A_n}(I) \times dp(I)$

MCMC en interaction = "Filtre avec N particules I^i "

- ▶ **Prédiction = Exploration** = MCMC sur chaque niveau A_n
- ▶ **Correction = Sélection** = des entrées dans A_{n+1} ($\subset A_n$)

Variantes : niveaux adaptatifs, MCMC adaptatifs, transitions MCMC conditionnelles au passage, niveaux de calibration, pb temporels, indices de Sobol conditionnels. . .

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Pourquoi cela fonctionne?

Inégalités de concentrations

Pourquoi cela fonctionne?

Les flots de mesures conditionnelles

$\forall n \in \mathbb{N} \mapsto \eta_n := \text{Loi} ((\text{variable}, \text{processus}) \mid n\text{-\acute{e}v\acute{e}nements})$

- ▶ Solution d'une \u00e9quation d'\u00e9volution non lin\u00e9aire \in Probabilit\u00e9s
(*temps continu* \rightsquigarrow EDP int\u00e9gro-diff. stoch. - Kushner-Statonovitch)
- ▶ Lois d'un processus de Markov non lin\u00e9aire \rightsquigarrow approx. champ moyen
(*temps continu + diffusifs* \rightsquigarrow processus de type McKean-Vlasov)

Les approximations particuli\u00e8res

- ▶ (**Calcul Sci.**) Maillages stochastiques et adaptatifs.
- ▶ (**Stats**) M\u00e9thode de simulation universelle accept-reject-recyclage
- ▶ (**Probab**) Lin\u00e9arisation stochastique/Technique perturbative.

$$\begin{aligned}\eta_n &= \Phi_n(\eta_{n-1}) \\ \eta_n^N &= \Phi_n(\eta_{n-1}^N) + \frac{1}{\sqrt{N}} V_n^N\end{aligned}$$

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Simulation champ moyen de lois conditionnelles

Pourquoi cela fonctionne?

Inégalités de concentrations

- Les mesures et leurs approximations

- Un développement de type Taylor

- Mesures empiriques des populations

- Constantes de normalisation

- Modèles de Markov à rebours

Les mesures et leurs approximations

N -Nombre d'individus = Paramètre de précision

► Les lois conditionnelles :

Q_n = Loi conditionnelle trajectorielle au temps n

η_n = Marginale par rapport au temps n

Z_n = Constantes de normalisation

► Les approximations champ moyen :

Q_n^N = Loi du Markov à rebours au temps n

η_n^N = Mesure empirique de la population au temps n

Z_n^N := Estimation **sans biais** des constantes de normalisation

Quelques notations :

► (c_1, c_2) = Constantes liées aux (**biais, variances**), c constante finie,
INDEPENDANTES DU TEMPS!

► Fonctions/observables f_n telles que $\|f_n\| \leq 1$; $\mu(f) := \int \mu(dx) f(x)$

Un développement de type Taylor

Propriétés de propagations du chaos :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n^{(N,q)} &= \text{Loi des } q \text{ premières lignes ancestrales } (q \leq N) \\ &= \mathbb{Q}_n^{\otimes q} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{1}{N^l} d_l \mathbb{P}_n^{(q)} + O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right)\end{aligned}$$

avec des mesures signées $d_l \mathbb{P}_n^{(q)}$ liées à des **arbres de coalescence**.

Un développement de type Taylor

Propriétés de propagations du chaos :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n^{(N,q)} &= \text{Loi des } q \text{ premières lignes ancestrales } (q \leq N) \\ &= \mathbb{Q}_n^{\otimes q} + \sum_{1 \leq l \leq m} \frac{1}{N^l} d_l \mathbb{P}_n^{(q)} + O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right)\end{aligned}$$

avec des mesures signées $d_l \mathbb{P}_n^{(q)}$ liées à des **arbres de coalescence**.



Interpolation de Romberg-Richardson : Pour tout ordre $l \geq 1$

$$\sum_{1 \leq m \leq l} \frac{(-1)^{l-m}}{m!} \frac{m^l}{(l-m)!} \mathbb{P}_n^{(mN,q)} = \mathbb{Q}_n^{\otimes q} + O(1/N^l)$$

Mesures empiriques des populations

Sur l'espace \mathbb{R}^d , on pose :

$$F_n(y) := \eta_n(\mathbf{1}_{(-\infty, y]}) \quad \text{et} \quad F_n^N(y) := \eta_n^N(\mathbf{1}_{(-\infty, y]}) \quad \text{avec } y \in \mathbb{R}^d$$

$\forall (x \geq 0)$, la probab. des événements suivant est $\geq 1 - e^{-x}$.

$$|\eta_n^N - \eta_n|(f_n) \leq \frac{c_1}{N} (1 + x + \sqrt{x}) + \frac{c_2}{\sqrt{N}} \sqrt{x}$$

$$\sup_{0 \leq p \leq n} |[\eta_p^N - \eta_p](f_p)| \leq c \sqrt{x \log(n+e)/N}$$

$$\|F_n^N - F_n\| \leq c \sqrt{d(x+1)/N}$$

Constantes de normalisation

$\forall (x \geq 0)$, la probab. des événements suivant est $\geq 1 - e^{-x}$.

$$\left| \frac{1}{n} \log \mathcal{Z}_n^N - \frac{1}{n} \log \mathcal{Z}_n \right| \leq \frac{c_1}{N} (1 + x + \sqrt{x}) + \frac{c_2}{\sqrt{N}} \sqrt{x}$$

$$|[\eta_n^N - \mathbb{Q}_n](f_n)| \leq c_1 \frac{(n+1)}{N} (1 + x + \sqrt{x}) + c_2 \sqrt{\frac{(n+1)}{N}} \sqrt{x}$$

avec $\eta_n^N =$ Mesure d'occupation de l'arbre généalogique $:= \eta_n^N$
(sur l'espace des chemins)

Modèles de Markov à rebours

Pour toute fonctionnelle additive normalisée

$$\mathbf{f}_n(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq p \leq n} f_p(x_p)$$

$\forall (x \geq 0)$, la probab. de l'événements suivant est $\geq 1 - e^{-x}$

$$|[\mathbb{Q}_n^N - \mathbb{Q}_n](\mathbf{f}_n)| \leq c_1 \frac{1}{N} (1 + (x + \sqrt{x})) + c_2 \sqrt{\frac{x}{N(n+1)}}$$