Introduction aux mathématiques financières discrètes

P. DEL MORAL
Lab. J.A. Dieudonné
Univ. Nice, Sophia-Antipolis, Parc Valrose, Nice

Table des matières

Avant-propos

L'ébullition des marchés financiers, les volumes des transactions, les valeurs des actions échangées chaque jour, chaque heure, ou chaque minute dans les places boursières internationales, sont ils prévisibles et régis par des dynamiques déterministes ? Peut on anticiper les variations des taux d'intérêts de placements financiers ? Ces évolutions sont elles dictées par essence, par des règles déterministes pures, ne laissant pas de place au hasard ? Cette notion d'aléatoire est elle une preuve de notre ignorance, et de notre incapacité à décrire les essences de ces systèmes ?

Supposons un instant que le hasard, et les phénomènes aléatoires existent. Sous cette hypothèse assez vraisemblable, serait il envisageable de les modéliser mathématiquement, et de décrire leurs lois d'évolution ? Un phénomène aléatoire donné peut il être simulé, et répété indéfiniment ? Est il possible de les prédire, et de les contrôler ? Peut on dompter le hasard, et construire de nouveau schémas d'exploration aléatoire, et d'approximation numérique de loi complexes ? En un mot : *le hasard serait il lui même soumis à des règles mathématiques ?*

Les réponses à toutes ces questions sont bien positives. La théorie des probabilités et des processus aléatoires, en plein essor depuis le début du vingtième siècle, vise à modéliser, analyser, estimer, et prédire des phénomènes aléatoires. Fondée à la fois sur l'expérience, et l'intuition, et sans cesse nourrie par les développements des mathématiques pures, des sciences appliquées, et des puissances de calcul informatique, cette théorie propose une variété de modèles et d'algorithmes aléatoires, ainsi qu'une panoplie de techniques algébriques, et analytiques, pour l'étude de phénomènes aléatoires issus de la physique, de la biologie, et des sciences de l'ingénieur. Dans chaque domaine d'application, la théorie des probabilités offre une variété de modèles en adéquation parfaite avec la réalité. Les interprétations de ces modèles dépendent du domaine d'application. Un simple modèle de Pile ou Face peut s'interpréter comme l'évolution d'une particule physique vers la droite, ou vers la gauche sur la droite réelle. Ce modèle élémentaire peut aussi être associé à des évolutions à la hausse, ou à la baisse de marchés financiers. Dans un autre registre, certains modèles d'interaction issus de la physique statistique, ou de la théorie des dynamiques de populations biologiques, ont récemment été utilisés avec succès dans la modélisation de comportement collectifs d'agents financiers, ou dans la calibration de modèles de prix d'actions [1, 2].

Ces notes de cours proposent une introduction élémentaire à la théorie des probabilités, et à ses applications en ingénierie et mathématiques financières. Elles s'articulent essentiellement autour de deux axes principaux :

La première partie offre un exposé synthétique des principaux éléments de la théorie des probabilités, et celle des processus aléatoires. La seconde partie porte sur la modélisation, et l'analyse probabiliste de problèmes issus de la finance, tels la gestion de portefeuilles, le calcul des prix, et de couvertures d'options financières.

Chaque partie est développée selon un ordre de difficulté croissant. Pour des raisons pédagogiques, nous avons néanmoins choisi de restreindre cet exposé à l'étude des mesures de probabilités, et des processus aléatoires, sur des espaces finis. Cette approche nous permet de contourner la théorie de l'intégration de Lebesgue sur laquelle est édifiée la théorie générale des probabilités.

Dans un premier chapitre introductif nous rappelons brièvement les principales notions de la théorie des probabilités, telles les notions de variables aléatoires, les propriétés d'indépendance entre évènements, ainsi que le conditionnement en des événements, des partitions, ou plus généralement, en des algèbres ensemblistes.

Le second chapitre concerne l'étude des processus aléatoires à valeurs dans des espaces finis. Nous examinerons tout d'abord les interprétations arborescentes de ces modèles. Ces représentations graphiques permettent notamment de visualiser l'évolution d'un processus aléatoire entre chaque noeud d'un arbre d'épreuves. Nous étudierons par la suite les notions de filtrations d'algèbres sur l'ensemble des évènements. Ces objets mathématiques permettent de modéliser l'information portée par une évolution aléatoire. Nous examinerons enfin les décompositions canoniques de processus aléatoires abstraits, par rapport à une filtration d'algèbres donnée.

Le troisième chapitre est l'un des axes principaux de ce cours. Il présente de façon synthétique les principaux éléments de la théorie des martingales. Nous étudierons tout d'abord les notions de compensateurs quadratiques "caractérisant"les tendances locales des carrés de martingales. Nous examinerons ensuite la construction de martingales, à conditions terminales fixées. Ces résultats fondamentaux seront utilisés dans le chapitre suivant sur le mathématiques financières, pour "neutraliser" des marchés financiers. Après une étude des martingales exponentielles, intervenant dans la modélisation des évolutions d'actifs financiers, nous développerons une classe de stratégies de contrôle de martingales issus de la théorie des jeux. Ces techniques seront par la suite essentielles pour la simulation, et la couverture d'options financières.

Le chapitre final est consacré aux mathématiques financières. Dans une première partie, nous présentons un dictionnaire plus ou moins exhaustif des principales notions de la finance, en soulignant leurs liens avec les modèles probabilistes étudiés dans les précédents chapitres. Nous avons choisi de restreindre cet exposé à l'étude des problèmes de calculs de prix d'options financières, et les stratégies de couverture. Nous commencerons par l'étude d'un modèle d'évolution de prix d'actifs binomial, sur une, puis sur deux périodes. Ces études élémentaires permettent de souligner les stratégies d'arbitrage, et la nature probabiliste des modèles de marchés viables. Nous examinerons ensuite en détail le modèle homogène et binomial de Cox-Ross-Rubinstein, en précisant ses liens avec le modèle de Black and Scholes. La dernière partie de ce cours offre une analyse mathématique rigoureuse et détaillée des marchés financiers complets, et des stratégies de couvertures d'options.