

TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués sont plus rentables que les actifs risqués (i.e. $b < h < r$). C'est le cas de conjonctures économiques où les comptes épargnes bancaires ont des taux plus élevés que les rendements d'actions plus risquées. Développer une stratégie d'arbitrage dans ce marché financier.

Exercice 2 On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués et risqués sont tels que

$$b < r < h$$

Décrire explicitement la mesure martingale \mathbb{P}^* sur Ω .

Exercice 3 Montrer que l'existence de \mathbb{P}^* entraîne qu'un investisseur ne peut arbitrer le marché financier.

Exercice 4 On considère un marché financier CRR avec des rendements d'actifs tels que $b < r < h$. La statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique à **tendance à la hausse**, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité \mathbb{P}_1 telle que

$$\mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

De même, la statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique à **tendance à la baisse**, et en perpétuels cracks boursiers, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité \mathbb{P}_1 telle que

$$\mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

Existe-t-il des opportunités d'arbitrage dans de tels marchés financiers ?

Dans un marché **viable** de type CRR, un conseiller financier propose une option de fonction de paiement à l'échéance n , donnée par la v.a.

$$f = (S_n^2 - K)_+$$

où K désigne un prix d'exercice fixé.

Exercice 5 1. Construire le portefeuille de couverture que l'émetteur de l'option devra utiliser pour honorer son contrat.

2. Montrer que l'investissement initial $V_0(\Phi)$ nécessaire pour couvrir l'option est donné par la formule

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= (1+r)^{-n} \sum_{l=0}^n \left(s_0 (1+b)^{n-l} (1+h)^l - K \right)_+ C_n^l \left(\frac{h-r}{h-b} \right)^{n-l} \left(\frac{r-b}{h-b} \right)^l \end{aligned}$$

3. On note C le prix de l'action offert par le conseiller financier. Étudier ses gains et ses pertes dans les trois cas de figure suivants

$$1) C = V_0(\Phi), \quad 2) C > V_0(\Phi), \quad \text{et} \quad 3) C < V_0(\Phi)$$

4. On note k_0 le plus petit entier k pour lequel

$$s_0 \times \left(\frac{1+h}{1+b} \right)^k > \frac{K}{(1+b)^n}$$

(a) Vérifier que

$$k_0 = 1 + \left\lceil \log \left(\frac{K}{s_0(1+b)^n} \right) / \log \left(\frac{1+h}{1+b} \right) \right\rceil$$

où $[a]$ désigne la partie entière d'un nombre a .

(b) Montrer que

$$V_0(\Phi) = s_0 \times F_{n,p'}(k_0) - (1+r)^{-n} K F_{n,p^*}(k_0) \quad (1)$$

avec les fonctions définies par

$$F_{n,p}(k) = \sum_{l=k}^n C_n^l p^l (1-p)^{n-l} \quad \text{avec} \quad p \in [0, 1]$$

et le jeu de paramètres $(p^*, p') \in [0, 1]$ donnés par

$$p^* = \frac{r-b}{h-b} \quad \text{et} \quad p' = \frac{(h+1)(r-b)}{(1+r)(h-b)}$$

(c) Vérifier que les fonctions $F_{n,p}$ correspondent aux fonctions de répartition

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{P}(\Sigma_{p,n} \geq k) = F_{n,p}(k)$$

des variables aléatoires $\Sigma_{p,n} = \sum_{i=1}^n \epsilon_p^i$, où $(\epsilon_p^i)_{1 \leq i \leq n}$ désignent une suite de v.a. iid de même loi

$$\mathbb{P}(\epsilon_p^i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_p^i = 0)$$

Exercice 6 On suppose de plus que l'horizon temporel n , et les paramètres de rendement (r, b, h) sont de la forme

$$n = T/\Delta, \quad r = \rho \Delta, \quad h = \sigma \sqrt{\Delta}, \quad \text{et} \quad b = -\sigma \sqrt{\Delta}$$

avec $(\Delta, T, \rho, \sigma) \in \mathbb{R}_+^4$. On rappelle que la suite de v.a.

$$W_{p,n} = \frac{\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})}{\sqrt{\mathbb{E}([\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})]^2)}}$$

converge faiblement vers une v.a. gaussienne centrée normée, en ce sens où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_{p,n} \geq x) = F(x) =_{\text{déf.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Ce résultat n'est autre que le théorème de la limite centrale pour des suite de v.a. indépendantes, et identiquement distribuées.

1. Montrer que

$$W_{p,n} = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_n^i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

2. Lorsque $\Delta \rightarrow 0$, vérifier les équivalences suivantes

$$np' \simeq \frac{T}{2\sigma \sqrt{\Delta}} (\rho + \sigma^2 + \sigma/\sqrt{\Delta}) \quad \text{et} \quad np^* \simeq \frac{T}{2\sigma \sqrt{\Delta}} (\rho + \sigma/\sqrt{\Delta})$$

et

$$\sqrt{np'(1-p')} \simeq \sqrt{np^*(1-p^*)} \simeq \frac{\sqrt{T}}{(2\sqrt{\Delta})}$$

et enfin

$$k_0 \simeq \frac{1}{2\sigma \sqrt{\Delta}} \left(\log \left(\frac{K}{s_0} \right) + T \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}} \right) \right)$$

En déduire les estimations

$$\begin{aligned} \frac{np' - k_0}{\sqrt{np'(1-p')}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(T \left(\rho + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \log(s_0/K) \right) \\ \frac{np^* - k_0}{\sqrt{np^*(1-p^*)}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(T \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \log(s_0/K) \right) \end{aligned}$$

3. En utilisant le fait que

$$F_{n,p}(k_0) = \mathbb{P} \left(W_{p,n} \geq \frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\simeq} F \left(\frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

montrer que l'on a

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &\simeq s_0 F \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(T \left(\rho + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \log(s_0/K) \right) \right) \\ &\quad - e^{-\rho T} K F \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(T \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \log(s_0/K) \right) \right) \end{aligned}$$