TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 *On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués sont plus rentables que les actif risqués (i.e. $b < h < r$). C'est le cas de conjonctures économiques où les comptes épargnes bancaires ont des taux plus élevés que les rendements d'actions plus risquées. Développer une stratégie d'arbitrage dans ce marché financier.*

Solution :
Lorsque les actifs non risqués sont plus rentables que les actif risqués, il faut vendre à découvert le maximum d'actif risqués, disons m, et placer par exemple cette argent $(m\ S_0^2)$ dans un compte épargne bancaire au taux r. Plus formellement, on aménage notre portefeuille initial en posant

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (mS_0^2, -m)$$

La valeur d'acquisition du portefeuille initial est tout simplement nulle

$$V_0(\Phi) = (m\ S_0^2) \times 1 - m \times S_0^2 = 0$$

Sans ré-aménager notre portefeuille, on attend patiemment jusqu'à la date n

$$\forall 1 \leq k < n \qquad \Phi_k = \Phi_1$$

A la date n, on revend nos (mS_0^2) parts d'actifs non risqués avec les intérêts, pour rembourser les m parts d'actifs risqués. Autrement dit, on utilise à nouveau la stratégie

$$\Phi_n = (m\ S_0^2, -m)$$

La valeur du portefeuille au temps n est donnée par la formule

$$\begin{aligned} V_n(\Phi) &= (m\ S_0^2) \times (1+r)^n - m \times (S_0^2\ (1+\Delta U_1^2) \dots (1+\Delta U_n^2)) \\ &\geq m\ S_0^2\ ((1+r)^n - (1+h)^n) \\ &\geq n\ m\ S_0^2\ (1+r)^{n-1}(r-h) \end{aligned}$$

■

Exercice 2 *On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués et risqués sont tels que*

$$b < r < h$$

Décrire explicitement la mesure martingale $\mathbb{P}^\star$ sur Ω.

Solution :
A chaque instant $1 \leq k \leq n$, on a pour chaque $\delta \in \{b, h\}$

$$\mathbb{P}^\star(\Delta U_k^2 = \delta) = \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{1_b(\delta)} \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^{1_h(\delta)}$$

Par conséquent, la mesure $\mathbb{P}^\star$ est définie explicitement pour chaque environnement aléatoire $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{b, h\}^n$, par la formule suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\star(\Delta U_1^2 = \delta_1, \ldots, \Delta U_n^2 = \delta_n) &= \mathbb{P}^\star(\Delta U_1^2 = \delta_1) \ \ldots \ \mathbb{P}^\star(\Delta U_n^2 = \delta_n) \\ &= \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{\sum_{k=1}^n 1_b(\delta_k)} \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^{\sum_{k=1}^n 1_h(\delta_k)}\end{aligned}$$

■

Exercice 3 *Montrer que l'existence de $\mathbb{P}^\star$ entraine qu'un investisseur ne peut arbitrer le marché financier.*

Solution :
L'existence de $\mathbb{P}^\star$ entraîne qu'un investisseur ne peut arbitrer le marché. En effet, sous $\mathbb{P}^\star$ les portefeuilles réactualisés

$$\overline{V}_k = \Phi_k^1 + \Phi_k^2 \ \Delta \overline{S}_k^2$$

forment une martingale. Il est alors impossible de gagner de l'argent à un horizon donné, sans une mise initiale, et ceci dans n'importe quel environnement aléatoire ! En effet, nous avons dans cette situation

$$\left(0 = \overline{V}_0(\Phi) = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi)) \quad \underline{\text{et}} \quad \overline{V}_n(\Phi) \geq 0\right) \Longrightarrow \forall \omega \in \Omega \quad \overline{V}_n(\Phi)(\omega) = 0$$

■

Exercice 4 *On considère un marché financier CRR avec des rendements d'actifs tels que $b < r < h$. La statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique* **à tendance à la hausse***, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_1$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

De même, la statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique **à tendance à la baisse***, et en perpétuels cracks boursiers, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_1$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

Existe-t-il des opportunités d'arbitrage dans de tels marchés financiers ?

Solution :
D'après l'exercice précédent, que le marché soit à tendance à la hausse, ou à la baisse, l'existence de $\mathbb{P}^\star$ entraîne qu'il est impossible d'arbitrer le marché financier. La possibilité de neutraliser le marché tient compte des probabilités aussi faibles soient elles des évènements à tendances inverses. Ainsi dans un marché à tendance à la hausse, un investisseur ayant misé sur les actifs risqués ne peut toujours pas prédire leur chute avant d'avoir pu s'en séparer. Cette chute imprévisible annulerait dans le meilleur des cas ses espoirs de gain, ou tout simplement elle le ruinerait. ■

Dans un marché **viable** de type CRR, un conseiller financier propose une option de fonction de paiement à l'échéance n, donnée par la v.a.

$$f = (S_n^2 - K)_+$$

où K désigne un prix d'exercice fixé.

Exercice 5 *1. Construire le portefeuille de couverture que l'émetteur de l'option devra utiliser pour honorer son contrat.*

2. Montrer que l'investissement initial $V_0(\Phi)$ nécessaire pour couvrir l'option est donné par la formule

$$V_0(\Phi)$$

$$= (1+r)^{-n} \ \sum_{l=0}^n \left(s_0 \ (1+b)^{n-l} \, (1+h)^l - K\right)_+ \ C_n^l \ \left(\tfrac{h-r}{h-b}\right)^{n-l} \ \left(\tfrac{r-b}{h-b}\right)^l$$

3. On note C le prix de l'action offert par le conseiller financier. Étudier ses gains et ses pertes dans les trois cas de figure suivants

$$1) \ C = V_0(\Phi) \ , \quad 2) \ C > V_0(\Phi) \ , \quad \text{et} \quad 3) \ C < V_0(\Phi)$$

4. On note k_0 le plus petit entier k pour lequel

$$s_0 \times \left(\frac{1+h}{1+b}\right)^k > \frac{K}{(1+b)^n}$$

(a) Vérifier que

$$k_0 = 1 + \left[\log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right) / \log\left(\frac{1+h}{1+b}\right)\right]$$

où $[a]$ désigne la partie entière d'un nombre a.

(b) Montrer que

$$V_0(\Phi) = s_0 \times F_{n,p'}(k_0) - (1+r)^{-n} \ K \ F_{n,p^\star}(k_0) \tag{1}$$

avec les fonctions définies par

$$F_{n,p}(k) = \sum_{l=k}^{n} \ C_n^l \ p^l \, (1-p)^{n-l} \quad \text{avec} \quad p \in [0,1]$$

et le jeu de paramètres $(p^\star, p') \in [0,1]$ *donnés par*

$$p^\star = \frac{r-b}{h-b} \quad \text{et} \quad p' = \frac{(h+1)(r-b)}{(1+r)(h-b)}$$

(c) *Vérifier que les fonctions* $F_{n,p}$ *correspondent aux fonctions de répartition*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{P}(\Sigma_{p,n} \geq k) = F_{n,p}(k)$$

des variables aléatoires $\Sigma_{p,n} = \sum_{i=1}^n \epsilon_p^i$, *où* $(\epsilon_p^i)_{1 \leq i \leq n}$ *désignent une suite de v.a. iid de même loi*

$$\mathbb{P}(\epsilon_p^i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_p^i = 0)$$

Solution :
La fonction de paiement réactualisée peut s'écrire sous la forme

$$\overline{f} = (1+r)^{-n}\ (S_n^2 - K)_+ = \left(\overline{S}_n^2 - \frac{K}{(1+r)^n}\right)_+ = g(\overline{S}_n^2)$$

avec la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$g(s) = \left(s - \frac{K}{(1+r)^n}\right)_+ = (1+r)^{-n}\ \ (s\ (1+r)^n - K)_+$$

1. D'après les formules de couverture données dans le cours, le portefeuille de couverture associé à cette fonction de paiement est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{V}_0(\Phi) & = & V_0(\Phi) = g_0(\overline{S}_0^2) = g_0(s_0) \\ \\ \Phi_k^2 & = & \dfrac{1+r}{h-b}\ \left[g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2\ \dfrac{1+h}{1+r}\right) - g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2\ \dfrac{1+b}{1+r}\right)\right]/\overline{S}_{k-1}^2 \\ \\ \Phi_k^1 & = & g_{k-1}(\overline{S}_{k-1}^2) - \Phi_k^2\ \overline{S}_{k-1}^2 \end{array}\right.$$

avec les fonctions $(g_k)_{0 \leq k \leq n}$ définies par

$$\begin{array}{rcl} g_k(s) & = & \displaystyle\sum_{l=0}^{n-k} \left(s\ \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^l \left(\frac{1+h}{1+r}\right)^{(n-k)-l} - \frac{K}{(1+r)^n}\right)_+ \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad \times\ C_{n-k}^l\ \left(\dfrac{h-r}{h-b}\right)^l\ \left(\dfrac{r-b}{h-b}\right)^{(n-k)-l} \end{array}$$

2. L'investissement initial pour couvrir l'option est donné par

$$\begin{array}{rcl} V_0(\Phi) & = & g_0(s_0) \\ & = & \sum_{l=0}^n \left(\frac{s_0}{(1+r)^n}\ \ (1+b)^l\,(1+h)^{n-l} - \frac{K}{(1+r)^n}\right)_+ \\ & & \qquad\qquad \times\ C_n^l\ \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^l\ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^{n-l} \\ & = & \sum_{l=0}^n \left(\frac{s_0}{(1+r)^n}\ \ (1+b)^{n-l}\,(1+h)^l - \frac{K}{(1+r)^n}\right)_+ \\ & & \qquad\qquad \times\ C_n^l\ \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{n-l}\ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^l \end{array}$$

3. Supposons, par exemple que le vendeur offre un prix
$$C > C^\star(f) = V_0(\Phi)$$
Dans ces conditions, pour gagner $(C - C^\star(f))$ il lui suffira d'utiliser la stratégie de couverture définie ci-dessus pour honorer son contrat, et empocher la somme résiduelle.

4. (a) Par définition de k_0, on a
$$\begin{aligned} k_0 &= \inf\{0 \leq k \leq n \ : \ k > \log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right) / \log\left(\frac{1+h}{1+b}\right)\} \\ &= 1 + \left[\log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right) / \log\left(\frac{1+h}{1+b}\right)\right] \end{aligned}$$
où $[a]$ désigne la partie entière d'un nombre a.

(b) Par définition de k_0, nous avons
$$\forall k_0 \leq l \leq n \qquad s_0 \times \left(\frac{1+h}{1+b}\right)^{k_0} > \frac{K}{(1+b)^n}$$
Par conséquent, on obtient
$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= \sum_{l=k_0}^{n} \left(\frac{s}{(1+r)^n}\ (1+b)^{n-l}\,(1+h)^l - \frac{K}{(1+r)^n}\right) \\ &\qquad\qquad \times C_n^l\ \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{n-l}\ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^l \\ &= s \times \sum_{l=k_0}^{n} C_n^l\ \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^{n-l}\ \left(\frac{1+h}{1+r}\right)^l \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{n-l}\ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^l \\ &\quad -(1+r)^{-n} K \sum_{l=k_0}^{n} C_n^l\ \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{n-l}\ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^l \end{aligned}$$
On en conclut que
$$\begin{aligned} &V_0(\Phi) \\ &= s_0 \times \textstyle\sum_{l=k_0}^n\ C_n^l\ p'^{\ l}\,(1-p')^{n-l} - (1+r)^{-n} K \sum_{l=k_0}^n C_n^l\ p^{\star\ l}\ (1-p^\star)^{n-l} \end{aligned}$$
avec les paramètres $(p^\star, p') \in [0,1]$ donnés par
$$p^\star = \frac{r-b}{h-b}\ , \qquad 1 - p^\star = \frac{h-r}{h-b}$$
et
$$\begin{aligned} p' &= 1 - \frac{h-r}{h-b}\frac{1+b}{1+r} \\ &= \frac{1}{(1+r)(h-b)}\ ((1+r)(h-b) - (h-r)(1+b)) \\ &= \frac{-b + rh - hb + r}{(1+r)(h-b)} = \frac{(h+1)(r-b)}{(1+r)(h-b)} \end{aligned}$$

(c) Par définition des v.a. de Bernoulli $(\epsilon_p^i)_{1\leq i\leq n}$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Sigma_{p,n}=k) &= C_n^k\ \mathbb{P}(\epsilon_p^1=\ldots=\epsilon_p^k=1,\ \text{et}\ \epsilon_p^{k+1}=\ldots=\epsilon_p^{k+(n-k)}=0)\\ &= C_n^k\ p^k\,(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\mathbb{P}(\Sigma_{p,n}\geq k)=F_{n,p}(k)=\sum_{l=k}^{n} C_n^l\ p^l\,(1-p)^{n-l}$$

$\blacksquare$

Exercice 6 *On suppose de plus que l'horizon temporel n, et les paramètres de rendement (r,b,h) sont de la forme*

$$n=T/\Delta\ ,\quad r=\rho\ \Delta\ ,\quad h=\sigma\ \sqrt{\Delta}\ ,\quad \text{et}\quad b=-\sigma\ \sqrt{\Delta}$$

avec $(\Delta,T,\rho,\sigma)\in\mathbb{R}_+^4$. On rappelle que la suite de v.a.

$$W_{p,n}=\frac{\Sigma_{p,n}-\mathbb{E}(\Sigma_{p,n})}{\sqrt{\mathbb{E}([\Sigma_{p,n}-\mathbb{E}(\Sigma_{p,n})]^2)}}$$

converge faiblement vers une v.a. gaussienne centrée normée, en ce sens où

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(W_{p,n}\geq x)=F(x)=_{\text{déf.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy$$

Ce résultat n'est autre que le théorème de la limite centrale pour des suite de v.a. indépendantes, et identiquement distribuées.

1. *Montrer que*

$$W_{p,n}=\frac{\sum_{i=1}^n\epsilon_n^i-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

2. *Lorsque $\Delta\to 0$, vérifier les équivalences suivantes*

$$np'\simeq\frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\ (\rho+\sigma^2+\sigma/\sqrt{\Delta})\quad\text{et}\quad np^\star\simeq\frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\left(\rho+\sigma/\sqrt{\Delta}\right)$$

et

$$\sqrt{np'(1-p')}\simeq\sqrt{np^\star(1-p^\star)}\simeq\frac{\sqrt{T}}{(2\sqrt{\Delta})}$$

et enfin

$$k_0\simeq\frac{1}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right)+T\left(\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$

En déduire les estimations

$$\begin{aligned}\frac{np'-k_0}{\sqrt{np'(1-p')}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\ \left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)+\log\left(s_0/K\right)\right)\\ \frac{np^\star-k_0}{\sqrt{np^\star(1-p^\star)}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\log\left(s_0/K\right)\right)\end{aligned}$$

3. *En utilisant le fait que*

$$F_{n,p}(k_0) = \mathbb{P}\left(W_{p,n} \geq \frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \stackrel{n\sim\infty}{\simeq} F\left(\frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

montrer que l'on a

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) \quad &\simeq \quad s_0 \; F\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \;\left(T \;\left(\rho + \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \\ &\qquad - e^{-\rho T} \; K \; F\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \;\left(T \;\left(\rho - \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Solution :

1. On a

$$\mathbb{E}(\Sigma_{p,n}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\epsilon_p^i) = np$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})]^2) \quad &= \quad \mathbb{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(\epsilon_p^i - \mathbb{E}(\epsilon_p^i))\right]^2\right) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left((\epsilon_p^i - \mathbb{E}(\epsilon_p^i))^2\right) = np(1-p) \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$W_{p,n} = \frac{\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})}{\sqrt{\mathbb{E}([\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})]^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_n^i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

2. Lorsque $\Delta \rightarrow 0$, nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} np^\star \quad &= \quad \frac{T}{\Delta} \times \frac{\rho\;\Delta + \sigma\;\sqrt{\Delta}}{2\sigma\;\sqrt{\Delta}} = \frac{T}{2\sigma\;\sqrt{\Delta}}\left(\rho + \sigma/\sqrt{\Delta}\right) \\ 1 - p^\star \quad &= \quad \frac{h - r}{h - b} = \frac{1}{2\sigma\;\sqrt{\Delta}} \times (\sigma\;\sqrt{\Delta} - \rho\;\Delta) \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} np^\star(1 - p^\star) \quad &= \quad \frac{T}{4\sigma^2\;\Delta}\left(\rho + \sigma/\sqrt{\Delta}\right)(\sigma\;\sqrt{\Delta} - \rho\;\Delta) \\ &= \quad \frac{T}{4\sigma^2}\left(\sigma/\sqrt{\Delta} + \rho\right)(\sigma\sqrt{\Delta} - \rho) \\ &= \quad \frac{T}{4\sigma^2}\;\left(\frac{\sigma^2}{\Delta} - \rho^2\right) \simeq \frac{T}{4\Delta} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\forall |u| < 1 \qquad \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$$

on remarque aussi que les équivalences suivantes

$$\frac{(1+\sigma\ \sqrt{\Delta})}{(1+\rho\ \Delta)} \simeq (1+\sigma\ \sqrt{\Delta})(1-\rho\ \Delta) \simeq (1+\sigma\ \sqrt{\Delta}) \simeq 1$$

On a donc

$$\begin{aligned}
np' &= \frac{(1+\sigma\ \sqrt{\Delta})}{(1+\rho\ \Delta)}\ np^\star \\
&\simeq \frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}} \left(\rho + \sigma/\sqrt{\Delta}\right)(1+\sigma\ \sqrt{\Delta}) \simeq \frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\ (\rho + \sigma^2 + \sigma/\sqrt{\Delta}) \\
p' &= \frac{(1+\sigma\ \sqrt{\Delta})}{(1+\rho\ \Delta)}\ p^\star \simeq (1+\sigma\ \sqrt{\Delta})\ p^\star \simeq p^\star \quad \text{et} \quad (1-p') \simeq (1-p^\star)
\end{aligned}$$

et par suite

$$np'(1-p') \simeq np^\star(1-p^\star) \simeq \frac{T}{4\Delta}$$

Pour estimer k_0 on utilise le fait que

$$\log(1+\epsilon) \overset{\epsilon\sim 0}{\simeq} \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}$$

pour vérifier tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right) &= \log(K/s_0) - \frac{T}{\Delta}\log(1-\sigma\ \sqrt{\Delta}) \\
&= \log(K/s_0) + \frac{T}{\Delta}\left(\sigma\ \sqrt{\Delta} + \frac{\sigma^2\Delta}{2}\right) \\
&= \log(K/s_0) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \sigma/\sqrt{\Delta}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\log\left(\frac{1+h}{1+b}\right) = \log(1+\sigma\ \sqrt{\Delta}) - \log(1-\sigma\ \sqrt{\Delta}) \simeq 2\sigma\ \sqrt{\Delta}$$

On en conclut que

$$\frac{\log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right)}{\log\left(\frac{1+h}{1+b}\right)} \simeq \frac{1}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$

et

$$k_0 \simeq \frac{1}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$

3. D'après les estimations précédentes, nous avons

$$\begin{aligned} np' - k_0 &\simeq \frac{T}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\left(\rho + \sigma^2 + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\left(T\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log(s_0/K)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} np^\star - k_0 &\simeq \frac{T}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\left(\rho + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\left(T\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log(s_0/K)\right) \end{aligned}$$

En utilisant les estimations

$$\sqrt{np'(1-p')} \simeq \sqrt{np^\star(1-p^\star)} \simeq \frac{\sqrt{T}}{(2\sqrt{\Delta})}$$

on en conclut que

$$\begin{aligned} \frac{np' - k_0}{\sqrt{np'(1-p')}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(T\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log(s_0/K)\right) \\ \frac{np^\star - k_0}{\sqrt{np^\star(1-p^\star)}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(T\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log(s_0/K)\right) \end{aligned}$$

4. Pour vérifier la dernière assertion, il suffit de noter que

$$(1+r)^{-n} = (1+\rho\Delta)^{-\frac{T}{\Delta}} \simeq e^{-\rho T}$$

La formule recherchée est une conséquence immédiate de (1).

$\blacksquare$