TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 *On considère un marché financier viable à deux états sur deux périodes. Un émetteur d'une option f offre un prix C. Étudier les gains et pertes de ce vendeur dans les trois cas de figure suivants*

$$1)\ C = C^\star(f)\ ,\quad 2)\ C > C^\star(f)\ ,\quad \text{et}\quad 3)\ C < C^\star(f)$$

Solution :
Lorsque $C = C^\star(f)$, l'émetteur de l'option pourra honorer son contrat en utilisant le portefeuille de couverture calculé dans le cours.

Si l'émetteur d'une option f offre un prix

$$C > C^\star(f)$$

il aura ainsi l'opportunité de gagner $(C - C^\star(f))$ Euros. Pour cela, il lui suffira simplement d'utiliser la stratégie de couverture définie ci-dessus pour honorer son contrat ; puis il empochera, sans trop effort, la somme résiduelle !

Inversement, si l'émetteur de l'option f offre un prix

$$C < C^\star(f) = \overline{V}_0(\Phi)$$

il s'expose à une perte certaine de $(C^\star(f) - C)$ Euros (on rappelle que $C^\star(f)$ correspond à la plus petite valeur d'acquisition permettant de couvrir l'option). ■

Exercice 2 *On considère le modèle de marché réactualisé décrit par l'arbre des épreuves suivant :*

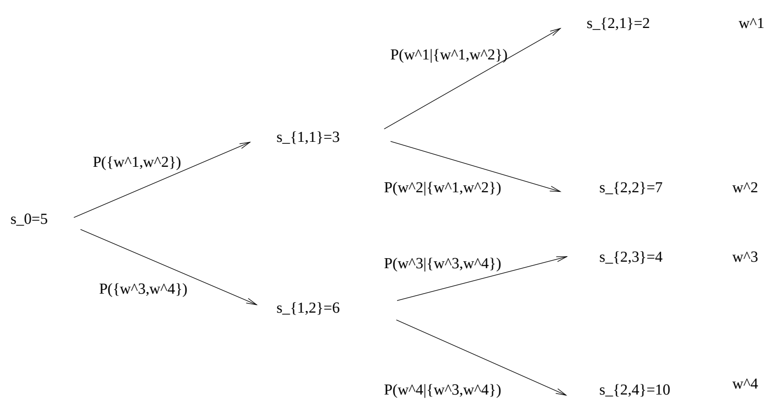

FIG. 1 – Evolution des actifs **réactualisés**

On considère un droit conditionnel de fonction de paiement réactualisée

$$\forall i \in \{1,2,3,4\} \qquad \overline{f}(\omega^i) = f(\omega^i)/(1+r)^2 = g(\overline{S}_2^2(\omega^i)) = \overline{f}_i$$

1. *Neutraliser ce modèle de marché financier. Autrement dit, déterminer l'unique probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur $\Omega = \{\omega^i,\ i = 1,2,3,4\}$ telle que*

$$\forall k = 2,1 \qquad \mathbb{E}^\star(\overline{S}_k^2 \mid \overline{S}_{k-1}^2) = \overline{S}_k^2$$

2. *Déterminer un portefeuille de couverture permettant de couvrir l'option $\overline{f}$.*
3. *Vérifier que ce portefeuille de couverture permettra à l'émetteur de l'option d'honorer son contrat dans chaque jeu d'aléas.*

Solution :

1. La probabilité à risque neutre $\mathbb{P}^\star$ est donnée par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\star(\overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,1} | \overline{S}_0^2 = s_0) &= 1 - \mathbb{P}^\star(\overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,2} | \overline{S}_0^2 = s_0) \\
&= \frac{\overline{s}_{1,2} - s_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}} = \frac{6-5}{6-3} = \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}^\star(\overline{S}_2^2 = \overline{s}_{2,1} | \overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,1}) &= 1 - \mathbb{P}^\star(\overline{S}_2^2 = \overline{s}_{2,2} | \overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,1}) \\
&= \frac{\overline{s}_{2,2} - \overline{s}_{1,1}}{\overline{s}_{2,2} - \overline{s}_{2,1}} = \frac{7-3}{7-2} = \frac{4}{5} \\
\mathbb{P}^\star(\overline{S}_2^2 = \overline{s}_{2,3} | \overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,2}) &= 1 - \mathbb{P}^\star(\overline{S}_2^2 = \overline{s}_{2,4} | \overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,2}) \\
&= \frac{\overline{s}_{2,4} - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{2,4} - \overline{s}_{2,3}} = \frac{10-6}{10-4} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Ces probabilités de transitions sont résumées dans le diagramme suivant

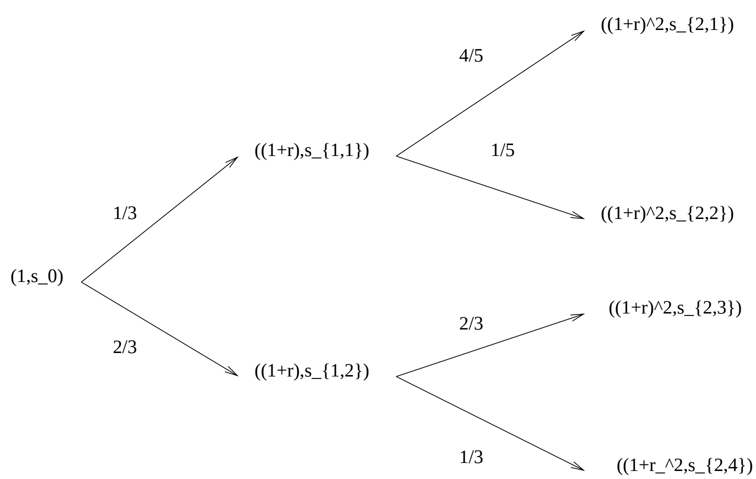

Fig. 2 – Transitions neutres

On en conclut que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}^\star(\omega^1) & = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,1}, \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,1} | \overline{S}^2_0 = s_0) \\
& = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,1} | \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,1}) \times \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,1} | \overline{S}^2_0 = s_0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{5} \\
\mathbb{P}^\star(\omega^2) & = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,2}, \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,1} | \overline{S}^2_0 = s_0) \\
& = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,2} | \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,1}) \times \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,1} | \overline{S}^2_0 = s_0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} \\
\mathbb{P}^\star(\omega^3) & = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,3}, \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,2} | \overline{S}^2_0 = s_0) \\
& = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,3} | \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,2}) \times \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,2} | \overline{S}^2_0 = s_0) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \\
\mathbb{P}^\star(\omega^4) & = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,4}, \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,2} | \overline{S}^2_0 = s_0) \\
& = & \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_2 = \overline{s}_{2,4} | \overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,2}) \times \mathbb{P}^\star(\overline{S}^2_1 = \overline{s}_{1,2} | \overline{S}^2_0 = s_0) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3}
\end{array}$$

2. La couverture de l'option $\overline{f}$ revient à trouver une stratégie (Φ^2_1, Φ^2_2) prévisible, et une condition initiale $\overline{V}_0(\Phi)$, pour lesquelles le portefeuille réactualisé

$$\overline{V}_k(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \sum_{l=1}^{k} \Phi^2_l \ \Delta\overline{S}^2_l$$

atteint à l'échéance $k = 2$ cette valeur

$$\overline{V}_2(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \sum_{k=1}^{2} \Phi^2_k \ \Delta\overline{S}^2_k = g(\overline{S}^2_2)$$

Sous la probabilité à risque neutre, le coût initial du portefeuille de couverture est donné par l'une des formules suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\overline{V}_0(\Phi) & = & g_0(s_0) \\
& = & g_1(\overline{s}_{1,1}) \ \mathbb{P}^\star(\{\omega^1, \omega^2\}) + g_1(\overline{s}_{1,2}) \ \mathbb{P}^\star(\{\omega^3, \omega^4\}) \\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} g(\overline{s}_{2,i}) \mathbb{P}^\star(\omega^i)
\end{array}$$

où $(g_k)_{k=0,1,2}$ désignent les fonctions définies par les équations de récurrence inverse

$$\begin{array}{rcl}
g_2(\overline{S}^2_2) & = & g(\overline{S}^2_2) \\
g_1(\overline{S}^2_1) & = & \mathbb{E}^\star(g_2(\overline{S}^2_2) \mid \overline{S}^2_1) \left(= \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}^2_2) \mid \overline{S}^2_1)\right) \\
g_0(\overline{S}^2_0) & = & \mathbb{E}^\star(g_1(\overline{S}^2_1) \mid \overline{S}^2_0) \left(= \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}^2_2) \mid \overline{S}^2_0)) = \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}^2_2))\right)
\end{array}$$

Ces formules de récurrence inverse sont synthétisées dans le schéma suivant :

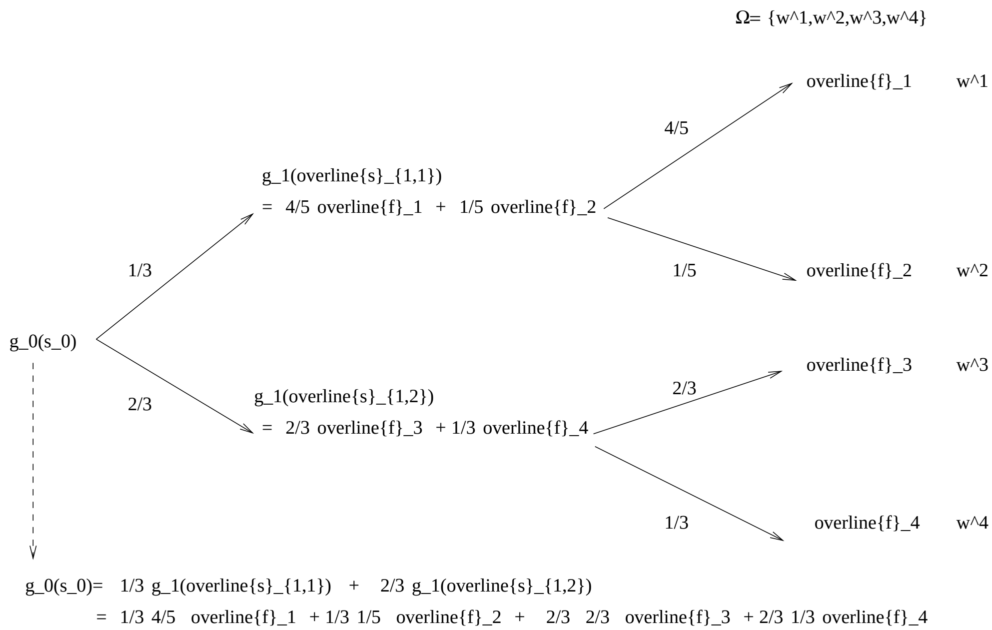

FIG. 3 –

Le portefeuille de couverture est aussi donné par

$$\begin{aligned}
\Phi_1^2 &= \frac{g_1(\overline{s}_{1,2}) - g_1(\overline{s}_{1,1})}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{3}\overline{f}_3 + \frac{1}{3}\overline{f}_4\right) - \left(\frac{4}{5}\overline{f}_1 + \frac{1}{5}\overline{f}_2\right)}{6-3} = \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right]
\end{aligned}$$

et

$$\Phi_2^2 = \frac{g_2(b_2) - g_2(a_2)}{b_2 - a_2} = \begin{cases} \frac{g(\overline{s}_{2,2}) - g(\overline{s}_{2,1})}{\overline{s}_{2,2} - \overline{s}_{2,1}} = \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{7-2} = \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5} & \text{si} \quad \overline{S}_1^2 = 3 \ (= \overline{s}_{1,1}) \\ \frac{g(\overline{s}_{2,4}) - g(\overline{s}_{2,3})}{\overline{s}_{2,4} - \overline{s}_{2,3}} = \frac{\overline{f}_4 - \overline{f}_3}{10-4} = \frac{\overline{f}_4 - \overline{f}_3}{6} & \text{si} \quad \overline{S}_1^2 = 6 \ (= \overline{s}_{1,2}) \end{cases}$$

D'après les propriétés d'autofinancement, les aménagements des actifs non risqués (Φ_1^1, Φ_2^1) sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1 &= \overline{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2\ \overline{S}_0^2 = g_0(s_0) - \Phi_1^2\ s_0 \\
\Phi_2^1 &= \overline{V}_1(\Phi) - \Phi_2^2\ \overline{S}_1^2 = g_0(s_0) + \Phi_1^2\ [\overline{S}_1^2 - \overline{S}_0^2] - \Phi_2^2\ \overline{S}_1^2
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{V}_2(\Phi) &= \overline{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2\ \Delta\overline{S}_1^2 + \Phi_2^2\ \Delta\overline{S}_2^2 \\
&= g_0(s_0) + \frac{g_1(\overline{s}_{1,2}) - g_1(\overline{s}_{1,1})}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\ [\overline{S}_1^2 - s_0] + \frac{g_2(b_2) - g_2(a_2)}{b_2 - a_2}\ [\overline{S}_2^2 - \overline{S}_1^2]
\end{aligned}$$

En décomposant cette expression sur les évènements $\{\overline{S}_1^2 = 3\}$, et $\{\overline{S}_1^2 = 6\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{V}_2(\Phi) &= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] \left([3-5]\ 1_{\overline{S}_1^2=3} + [6-5]\ 1_{\overline{S}_1^2=6}\right) \\
&\quad + \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5}\ 1_{\overline{S}_1^2=3}[\overline{S}_2^2 - 3] + \frac{\overline{f}_4 - \overline{f}_3}{6}\ 1_{\overline{S}_1^2=6}\ [\overline{S}_2^2 - 6]
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{V}_2(\Phi)(\omega^1) &= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) - \frac{2}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] \\
&\quad + \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5}\ [2-3] \\
&= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) - \frac{2}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] - \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5} \\
&= \overline{f}_1\left(\frac{4}{15} + \frac{8}{15} + \frac{3}{15}\right) + \overline{f}_2\left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15} - \frac{3}{15}\right) + \overline{f}_3\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) \\
&\quad + \overline{f}_4\left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right) = \overline{f}_1
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{V}_2(\Phi)(\omega^2) &= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) - \frac{2}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] \\
&\quad + \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5}\ [7-3] \\
&= \overline{f}_1\left(\frac{4}{15} + \frac{8}{15} - \frac{12}{15}\right) + \overline{f}_2\left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{12}{15}\right) + \overline{f}_3\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) \\
&\quad + \overline{f}_4\left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\right) = \overline{f}_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{V}_2(\Phi)(\omega^3) &= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) + \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] \\
&\quad + \frac{\overline{f}_4 - \overline{f}_3}{6}\ [4-6] \\
&= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) + \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] - \frac{\overline{f}_4 - \overline{f}_3}{3} \\
&= \overline{f}_1\left(\frac{4}{15} - \frac{4}{15}\right) + \overline{f}_2\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{15}\right) + \overline{f}_3\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right) \\
&\quad + \overline{f}_4\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \frac{3}{9}\right) = \overline{f}_3
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\overline{V}_2(\Phi)(\omega^4) &= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) + \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] \\
&\quad + \frac{\overline{f}_4 - \overline{f}_3}{6}\,[10-6] \\
&= \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) + \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] + \frac{2}{3}\left(\overline{f}_4 - \overline{f}_3\right) \\
&= \overline{f}_1\left(\frac{4}{15} - \frac{4}{15}\right) + \overline{f}_2\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{15}\right) + \overline{f}_3\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9}\right) \\
&\qquad + \overline{f}_4\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{6}{9}\right) = \overline{f}_4
\end{aligned}$$

■

Exercice 3 : Nous avons, dans chaque jeu d'aléas :

$$\begin{aligned}
\overline{f}_1 &= \overline{f}(\omega^1) = \left(\overline{S}_2^2 - 9\right)_+ = (2-9)_+ = 0 \\
\overline{f}_2 &= \overline{f}(\omega^2) = \left(\overline{S}_2^2 - 9\right)_+ = (7-9)_+ = 0 \\
\overline{f}_3 &= \overline{f}(\omega^3) = \left(\overline{S}_2^2 - 9\right)_+ = (4-9)_+ = 0 \\
\overline{f}_4 &= \overline{f}(\omega^4) = \left(\overline{S}_2^2 - 9\right)_+ = (10-9)_+ = 1
\end{aligned}$$

En reprenant les formules obtenues dans l'exercice 2, on obtient le prix de l'option

$$\overline{V}_0(\Phi) = g_0(s_0) = \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) = \frac{2}{9}$$

et le portefeuille de couverture

$$\Phi_1^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad \Phi_2^2 = \frac{1}{6}\ 1_{\overline{S}_1^2 = 6}$$

Les aménagements des actifs non risqués (Φ_1^1, Φ_2^1) sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1 &= \overline{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2\ \overline{S}_0^2 = \frac{2}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{3} \\
\Phi_2^1 &= \overline{V}_1(\Phi) - \Phi_2^2\ \overline{S}_1^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\ [\overline{S}_1^2 - 5] -\ 1_{\overline{S}_1^2=6} = -\frac{1}{3} + \frac{\overline{S}_1^2}{9} -\ 1_{\overline{S}_1^2=6}
\end{aligned}$$

■

Exercice 3 *Dans le modèle de marché décrit dans l'exercice 2, un agent financier émet une option d'achat de fonction de paiement réactualisée*

$$\overline{f} = \left(\overline{S}_2^2 - 9\right)_+$$

Déterminer le prix de cette option, et son portefeuille de couverture.

Exercice 4 *Dans le modèle de marché décrit dans l'exercice 2, un agent financier émet une option de vente de fonction de paiement réactualisée*

$$\overline{f} = \left(7 - \overline{S}_2^2\right)_+$$

Déterminer le prix de cette option, et son portefeuille de couverture.

Solution :
Nous avons, dans chaque jeu d'aléas :

$$\begin{aligned}
\overline{f}_1 &= \overline{f}(\omega^1) = \left(7 - \overline{S}_2^2\right)_+ = (7-2)_+ = 5 \\
\overline{f}_2 &= \overline{f}(\omega^2) = \left(7 - \overline{S}_2^2\right)_+ = (7-7)_+ = 0 \\
\overline{f}_3 &= \overline{f}(\omega^3) = \left(7 - \overline{S}_2^2\right)_+ = (7-4)_+ = 3 \\
\overline{f}_4 &= \overline{f}(\omega^4) = \left(7 - \overline{S}_2^2\right)_+ = (7-10)_+ = 0
\end{aligned}$$

En reprenant les formules obtenues dans l'exercice 2, on obtient le prix de l'option

$$\overline{V}_0(\Phi) = g_0(s_0) = \left(\frac{4}{15}\overline{f}_1 + \frac{1}{15}\overline{f}_2 + \frac{4}{9}\overline{f}_3 + \frac{2}{9}\overline{f}_4\right) = \frac{4}{15} \times 5 + \frac{4}{9} \times 3 = \frac{8}{3}$$

et le portefeuille de couverture

$$\Phi_1^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{2\overline{f}_3 + \overline{f}_4}{3} - \frac{4\overline{f}_1 + \overline{f}_2}{5}\right] = \frac{1}{3}[2-4] = -\frac{2}{3}$$

et

$$\Phi_2^2 = -1_{\overline{S}_1^2=3} - \frac{1}{2}\ 1_{\overline{S}_1^2=6}$$

Les aménagements des actifs non risqués (Φ_1^1, Φ_2^1) sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1 &= \overline{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2\ \overline{S}_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 6 \\
\Phi_2^1 &= \overline{V}_1(\Phi) - \Phi_2^2\ \overline{S}_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\ (\overline{S}_1^2 - 5) + \left(1_{\overline{S}_1^2=3} + \frac{1}{2}\ 1_{\overline{S}_1^2=6}\right)\ \overline{S}_1^2 \\
&= 6 - \frac{2}{3}\ \overline{S}_1^2 + 3\left(2 \times 1_{\overline{S}_1^2=3} + 1_{\overline{S}_1^2=6}\right) \\
&= 6 + 4 \times 1_{\overline{S}_1^2=3} - 1_{\overline{S}_1^2=6} = 10 \times 1_{\overline{S}_1^2=3} - 5 \times 1_{\overline{S}_1^2=6}
\end{aligned}$$

■