

TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 On appelle le rendement instantané d'un titre S_k au temps k , la quantité R_k^S définie par

$$R_k^S = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{\Delta S_k}{S_{k-1}}$$

On rappelle que S_k représente le prix d'une part d'un titre donné au temps k . On note $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ le modèle à deux états décrit par le tableau

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1, S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1, S_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; s_0) \quad ((1+r); s_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; s_0) \quad ((1+r); s_{1,2}) \end{array}$$

On suppose que ce marché est viable

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

et l'on note \mathbb{P}^* la mesure à risque neutre définie par

$$\mathbb{P}^*(\omega^1) = p^* =_{\text{déf.}} \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \in (0, 1)$$

1. Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ avec

$$\mathbb{P}(\omega^1) = p = 1 - \mathbb{P}(\omega^2)$$

Vérifier que l'on a

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(R_1^{S^2}) = \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0}$$

2. Dédurre de la question précédente que le rendement instantané du titre risqué est supérieur à celui du titre non risqué, si la probabilité p est suffisamment petite.
3. Montrer que sous \mathbb{P}^* , le rendement instantané du titre risqué est le même que celui du titre non risqué.

Exercice 2 On considère le modèle de marché viable décrit dans l'exercice ??.

1. Décrire les prix des actifs réactualisés $(\bar{S}_k^1, \bar{S}_k^2)_{k=0,1}$, ainsi que les valeurs réactualisées d'un portefeuille $(\bar{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ associé à une stratégie d'aménagement $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$.
2. Vérifier que l'on a

$$\Phi_1^1 = \bar{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 s_0$$

et montrer que

$$\bar{V}_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 s_0 \quad \text{et} \quad \bar{V}_1(\Phi) = \bar{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 [\bar{S}_1^2 - \bar{S}_0^2]$$

3. En déduire que les valeurs réactualisées des portefeuilles $(\bar{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ sont des \mathbb{P}^* -martingales.

Exercice 3 Déterminer les valeurs réactualisées des portefeuilles $\bar{V}_k(\Phi) = V_k(\Phi)/(1+r)^k$ aux instants $k = 0, 1$, en fonction des prix des actifs réactualisés $\bar{S}_k^i = S_k^i/(1+r)^k$. Vérifier les formules suivantes :

$$\Delta \bar{V}_1(\Phi) = \Phi_1^2 \times \Delta \bar{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_1^1 = \bar{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 \times \bar{S}_0^2$$

Exercice 4 On considère le modèle de marché à deux états sur une période $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ décrit par le tableau suivant

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

1. Décrire le tableau, et l'arbre des épreuves correspondant au marché réactualisé $(\bar{S}_k^1, \bar{S}_k^2)_{k=0,1}$.
2. Déterminer les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à une stratégie d'aménagement sans investissement initial.
3. Discuter les situations où l'on peut enrichir son portefeuille $\Delta \bar{V}_1(\Phi) > 0$, sans apport initial.
4. Discuter les possibilités d'arbitrage dans les neuf modèles de marchés suivants :

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; 5)$	$((1+5 \cdot 10^{-2}); s_{1,1})$
ω^2	$(1; 5)$	$((1+5 \cdot 10^{-2}); s_{1,2})$

avec

1) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 6 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 4 \end{cases}$	2) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 6 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 7 \end{cases}$	3) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 10 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 1 \end{cases}$
4) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 3 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 2 \end{cases}$	5) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 5 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 6 \end{cases}$	6) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 5 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 4 \end{cases}$
7) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 3 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 10 \end{cases}$	8) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 8 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 9 \end{cases}$	9) $\begin{cases} s_{1,1} = 1,05 \times 2 \\ s_{1,2} = 1,05 \times 10 \end{cases}$

Exercice 5 On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad \bar{S}_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \quad \text{avec } 0 < \bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2} \\ \omega^2 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

Une banque émet une option de vente de fonction de paiement $f(\omega^i) = f_i$, avec $i = 1, 2$. On note $\bar{f}_i = f_i/(1+r)$ les valeurs réactualisées de cette option.

1. Déterminer les stratégies de couverture de cette option, en fonction des portefeuilles et des actifs réactualisés.
2. Montrer qu'une stratégie de couverture est donnée par

$$\phi^{2,*} = (\bar{f}_1 - \phi^{1,*}) / \bar{s}_{1,1}$$

où $\phi^{1,*}$ désigne le point d'intersection des deux droites $(\Delta_i)_{i=1,2}$ déterminées par les équations suivantes :

$$\Delta_i : \phi^1 \mapsto \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} \bar{f}_i + \phi^1 \left(1 - \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_{1,i}} \right)$$

On Vérifiera que la stratégie de couverture $(\phi^{1,*}, \phi^{2,*})$ est l'unique solution du système d'équations

$$\begin{cases} \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,1} = \bar{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2 \bar{s}_{1,2} = \bar{f}_2 \end{cases}$$

3. Montrer que le coût initial du portefeuille (réactualisé) permettant de couvrir l'option est donné par la formule

$$\bar{V}_0(\Phi) = \bar{f}_1 \left(\frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \frac{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_0}{\bar{s}_{1,2} - \bar{s}_{1,1}} \right)$$

Exercice 6 Vérifier la viabilité des marchés suivants, et déterminer les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1,*}, \phi^{2,*})$ dans chaque situation.

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 3 \\ \bar{s}_{1,2} = 6 \end{cases} & 2) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 1 \\ \bar{s}_{1,2} = 10 \end{cases} & 3) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 4 \\ \bar{s}_{1,2} = 7 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 1 \\ \bar{s}_{1,2} = 6 \end{cases} & 5) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 1 \\ \bar{s}_{1,2} = 20 \end{cases} & 6) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 2 \\ \bar{s}_{1,2} = 7 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 3 \\ \bar{s}_{1,2} = 50 \end{cases} & 8) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 4 \\ \bar{s}_{1,2} = 100 \end{cases} & 9) \begin{cases} \bar{s}_{1,1} = 2 \\ \bar{s}_{1,2} = 1000 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 7 On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad \bar{S}_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,1}) \quad \text{avec } 0 < \bar{s}_{1,1} < \bar{s}_0 < \bar{s}_{1,2} \\ \omega^2 \quad (1; \bar{s}_0) \quad (1; \bar{s}_{1,2}) \end{array}$$

1. Déterminer l'unique probabilité \mathbb{P}^* sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que

$$\mathbb{E}^*(\bar{S}_1^2 \mid \bar{S}_0^2) = \bar{S}_0^2$$

2. Montrer que pour tout portefeuille autofinancé, nous avons

$$\mathbb{E}^*(\bar{V}_1(\Phi) \mid \bar{S}_0^2) = \bar{V}_0(\Phi)$$

3. Déterminer la valeur moyenne sous \mathbb{P}^* d'une fonction de paiement réactualisée \bar{f} .

4. Décrire une stratégie de couverture $\Phi^* = (\phi^1, *, \phi^2, *)$ de l'option \bar{f} , et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\bar{V}_0(\Phi^*) = \mathbb{E}^*(\bar{f}) = C(f)$.

Exercice 8 Déterminer les prix, et les stratégies de couverture des options de vente suivantes

$$\begin{array}{l} 1) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (10 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 3) \quad 7 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 6) \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (8 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 1) \quad 7 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 10) \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (8 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 2) \quad 6 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 7) \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (10 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 3) \quad 7 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 50) \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (100 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 1) \quad 99 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 20) \quad 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (6 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 2) \quad 4 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 7) \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7) \quad \Omega \quad \bar{S}_0 = (\bar{S}_0^1, \bar{S}_0^2) \quad S_1 = (\bar{S}_1^1, \bar{S}_1^2) \quad \bar{f} = (6 - \bar{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 \quad (1; 5) \quad (1; 3) \quad 3 \\ \omega^2 \quad (1; 5) \quad (1; 50) \quad 0 \end{array}$$