TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 *On appelle le rendement instantané d'un titre S_k au temps k, la quantité R_k^S définie par*

$$R_k^S = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{\Delta S_k}{S_{k-1}}$$

On rappelle que S_k représente le prix d'une part d'un titre donné au temps k. On note $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ le modèle à deux états décrit par le tableau

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

On suppose que ce marché est viable

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

et l'on note $\mathbb{P}^\star$ la mesure à risque neutre définie par

$$\mathbb{P}^\star(\omega^1) = p^\star =_{\text{déf.}} \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \ \in \ (0,1)$$

1. *Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ avec*

   $$\mathbb{P}(\omega^1) = p = 1 - \mathbb{P}(\omega^2)$$

   Vérifier que l'on a

   $$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(R_1^{S^2}) = \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0}$$

2. *Déduire de la question précédente que le rendement instantané du titre risqué est supérieur à celui du titre non risqué, si la probabilité p est suffisamment petite.*
3. *Montrer que sous $\mathbb{P}^\star$, le rendement instantané du titre risqué est le même que celui du titre non risqué.*

Solution :

1. Par définition du rendement instantané, on vérifie aisément que

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) \quad = \quad \mathbb{E}\left(\frac{S_1^1 - S_0^1}{S_0^1}\right) = \frac{(1+r)-1}{1} = r$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_1^{S^2}) \quad &= \quad \mathbb{E}\left(\frac{S_1^2 - S_0^2}{S_0^2}\right) = \frac{s_{1,1} - s_0}{s_0}\ p + (1-p)\ \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} \\ &= \quad \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0}\end{aligned}$$

2. Il suffit de noter que l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_1^{S^2}) > \mathbb{E}(R_1^{S^1}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0} > r \\ &\Longleftrightarrow \quad p < \frac{s_0}{s_{1,2} - s_{1,1}} \left(\frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - r\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad p < p^\star = \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})}\end{aligned}$$

3. Lorsque $\mathbb{P} = \mathbb{P}^\star$, on a bien évidement

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r$$

De plus, un simple calcul montre que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\star(R_1^{S^2}) \quad &= \quad \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \times \frac{(s_{1,2} - s_{1,1})}{s_0} \\ &= \quad \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{s_0} = (1+r) - 1 = r\end{aligned}$$

Par conséquent, sous $\mathbb{P}^\star$, les rendement instantanés des titres risqués et non risqués coïncident.

■

Exercice 2 *On considère le modèle de marché viable décrit dans l'exercice 1.*

1. *Décrire les prix des actifs réactualisés* $(\overline{S}^1_k, \overline{S}^2_k)_{k=0,1}$, *ainsi que les valeurs réactualisées d'un portefeuille* $(\overline{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ *associé à une stratégie d'aménagement* $\Phi_1 = (\Phi^1_1, \Phi^2_1)$.
2. *Vérifier que l'on a*
$$\Phi^1_1 = \overline{V}_0(\Phi) - \Phi^2_1 \ s_0$$
et montrer que
$$\overline{V}_0(\Phi) = \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \ s_0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \Phi^2_1 \ [\overline{S}^2_1 - \ \overline{S}^2_0]$$
3. *En déduire que les valeurs réactualisées des portefeuilles* $(\overline{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ *sont des* $\mathbb{P}^\star$*-martingales.*

Solution :

1. Les valeurs des portefeuilles associées à une stratégie de réaménagement
$$\Phi_1 = (\Phi^1_1, \Phi^2_1)$$
sont données par les formules suivantes
$$\begin{array}{rcl} V_0(\Phi) & = & \Phi^1_1 \ S^1_0 + \Phi^2_1 \ S^2_0 = \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \ s_0 \\ V_1(\Phi) & = & \Phi^1_1 \ S^1_1 + \Phi^2_1 \ S^2_1 = \Phi^1_1 \ (1+r) + \Phi^2_1 \ S^2_1 \end{array}$$
Leurs valeurs réactualisées sont définies par la formule
$$\overline{V}_0(\Phi) = \frac{V_0(\Phi)}{(1+r)^0} = V_0(\Phi) \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) = \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)^1} = \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)}$$
s'expriment en terme des actifs réactualisés
$$\overline{S}^1_0 = \frac{S^1_0}{(1+r)^0} = S^1_0 = 1 \ , \qquad \overline{S}^2_0 = \frac{S^2_0}{(1+r)^0} = S^2_0 = s_0$$
et
$$\overline{S}^1_1 = \frac{S^i_1}{(1+r)^1} = \frac{(1+r)}{(1+r)} = 1 \ , \qquad \overline{S}^2_1 = \frac{S^i_2}{(1+r)^1}$$
selon les formules
$$\begin{array}{rcl} \overline{V}_0(\Phi) & = & V_0(\Phi) = \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \ \overline{S}^2_0 = \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \ s_0 \\ \overline{V}_1(\Phi) & = & \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \ \overline{S}^2_1 \end{array}$$
2. D'après la question précédente, on obtient
$$\Phi^1_1 = \overline{V}_0(\Phi) - \Phi^2_1 \ \overline{S}^2_0$$
Pour conclure, on note simplement que l'on a
$$\overline{V}_1(\Phi) \quad = \quad \Phi^1_1 + \Phi^2_1 \ \overline{S}^2_1 = \overline{V}_0(\Phi) + \Phi^2_1 \ [\overline{S}^2_1 - \ \overline{S}^2_0]$$

3. D'après la formule précédente, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\star}\left(\overline{V}_1(\Phi)\mid\mathcal{F}_0\right) &= \overline{V}_0(\Phi)+\Phi_1^2\,[\mathbb{E}^{\star}\left(\overline{S}_1^2\mid\mathcal{F}_0\right)-\ \overline{S}_0^2] \\ &= \overline{V}_0(\Phi)+\Phi_1^2\times 0=\overline{V}_0(\Phi)\end{aligned}$$

■

Exercice 3 *Déterminer les valeurs réactualisées des portefeuilles* $\overline{V}_k(\Phi)=V_k(\Phi)/(1+r)^k$ *aux instants* $k=0,1$*, en fonction des prix des actifs réactualisés* $\overline{S}_k^i=S_k^i/(1+r)^k$*. Vérifier les formules suivantes :*

$$\Delta\overline{V}_1(\Phi)=\Phi_1^2\times\Delta\overline{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_1^1=\overline{V}_0(\Phi)-\Phi_1^2\times\overline{S}_0^2$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\overline{V}_0(\Phi) &= V_0(\Phi)=\Phi_0^1\,S_0^1+\Phi_0^2\,S_0^2=\Phi_1^1\,S_0^1+\Phi_1^2\,S_0^2 \quad \text{(par autofinancement)} \\ &= \Phi_1^1+\Phi_1^2\,\overline{S}_0^2 \\ \overline{V}_1(\Phi) &= \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)}=\Phi_1^1\,\frac{S_1^1}{1+r}+\Phi_1^2\,\frac{S_1^2}{1+r}=\Phi_1^1\,\frac{(1+r)\times 1}{(1+r)}+\Phi_1^2\,\frac{S_1^2}{(1+r)} \\ &= \Phi_1^1+\Phi_1^2\,\overline{S}_1^2\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\overline{V}_0(\Phi)=\Phi_1^1+\Phi_1^2\,\overline{S}_0^2 \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi)=\Phi_1^1+\Phi_1^2\,\overline{S}_1^2$$

On en déduit que

$$\Delta\overline{V}_1(\Phi)=[\overline{V}_1(\Phi)-\overline{V}_0(\Phi)]=\Phi_1^2\times\Delta\overline{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_1^1=\overline{V}_0(\Phi)-\Phi_1^2\,\overline{S}_0^2$$

■

Exercice 4 *On considère le modèle de marché à deux états sur une période* $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ *décrit par le tableau suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

1. *Décrire le tableau, et l'arbre des épreuves correspondant au marché réactualisé* $(\overline{S}_k^1, \overline{S}_k^2)_{k=0,1}$.
2. *Déterminer les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à une stratégie d'aménagement sans investissement initial.*
3. *Discuter les situations où l'on peut enrichir son portefeuille* $\Delta\overline{V}_1(\Phi) > 0$*, sans apport initial.*
4. *Discuter les possibilités d'arbitrage dans les neuf modèles de marchés suivants :*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; 5)$	$((1 + 5\ 10^{-2}); s_{1,1})$
ω^2	$(1; 5)$	$((1 + 5\ 10^{-2}); s_{1,2})$

avec

$$1)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 6 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 4 \end{array}\right. \quad 2)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 6 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 7 \end{array}\right. \quad 3)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 10 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 1 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 3 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 2 \end{array}\right. \quad 5)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 5 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 6 \end{array}\right. \quad 6)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 5 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 4 \end{array}\right.$$

$$7)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 3 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 10 \end{array}\right. \quad 8)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 8 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 9 \end{array}\right. \quad 9)\left\{\begin{array}{lcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 2 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 10 \end{array}\right.$$

Solution :

1. Le tableau des épreuves correspondant au marché réactualisé $(\overline{S}_k^1, \overline{S}_k^2)_{k=0,1}$ est donné par

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$\overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$
ω^1	$(1; \overline{s}_0)$	$(1; \overline{s}_{1,1})$
ω^2	$(1; \overline{s}_0)$	$(1; \overline{s}_{1,2})$

avec $\overline{s}_0 = s_0/(1+r)^0 = s_0$, $\overline{s}_{1,1} = s_{1,1}/(1+r)^1$, et $\overline{s}_{1,2} = s_{1,2}/(1+r)^1$.

2. Les stratégie d'aménagement $\Phi_1 = (\phi^1, \phi^2)$ sans investissement initial sont définies par la propriété suivante :

$$\overline{V}_0(\Phi) = \phi^1\ \overline{S}_0^1 + \phi^2\ \overline{S}_0^2 = \phi^1 + \phi^2\ \overline{s}_0 = 0 \Longleftrightarrow \phi^1 = -\phi^2\ \overline{s}_0$$

Par conséquent, les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à de telles stratégies sont données par

$$\overline{V}_1(\Phi) \quad = \quad \phi^1\ \overline{S}_1^1 + \phi^2\ \overline{S}_1^2 = \phi^1 + \phi^2\ \overline{S}_1^2 = \phi^2\ [\overline{S}_1^2 - \overline{s}_0]$$

On a donc

$$\overline{V}_1(\Phi)(\omega^1) \quad = \quad \phi^2\ [\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_0] \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi)(\omega^2) = \phi^2\ [\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0]$$

3. D'après la question précédente, on peut enrichir de façon certaine son son portefeuille

$$\Delta\overline{V}_1(\Phi) \quad = \quad [\overline{V}_1(\Phi) - 0] = \overline{V}_1(\Phi) = \phi^2 \; [\overline{S}_1^2 - \overline{s}_0]$$

sans apport initial, si, et seulement si, les quantités ϕ^2 et $[\overline{S}_1^2 - \overline{s}_0]$ ont toujours le même signe. Ces possibilités sont discutées dans les cas suivants :

- $\overline{s}_0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_{1,2}$ ou $\overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2} < \overline{s}_{1,1}$:
Dans ces deux situations, nous avons $[\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_0] > 0$, et $[\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0] > 0$. L'arbitrage est clair, il suffit de vendre a découvert $\phi^1 = -\phi^2 \; \overline{s}_0$ parts de titre non risqué, pour acheter ϕ^2 parts de titre risqué

$$\phi^1 = -\phi^2 \; \overline{s}_0 \Longrightarrow \overline{V}_0(\Phi) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) = \phi^2 \; [\overline{S}_1^2 - \overline{s}_0] > 0$$

- $\overline{s}_{1,1} < \overline{s}_{1,2} < \overline{s}_0$ ou $\overline{s}_{1,2} < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0$:
Dans ce cette situation, nous avons $[\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_0] < 0$, et $[\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0] < 0$. L'arbitrage est clair, il suffit de vendre a découvert $-\phi^2 (> 0)$ parts de titre risqué, pour acheter $\phi^1 = -\phi^2 \; \overline{s}_0 (> 0)$ parts de titre non risqué

$$\phi^1 = -\phi^2 \; \overline{s}_0 \Longrightarrow \overline{V}_0(\Phi) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) = \phi^2 \; [\overline{S}_1^2 - \overline{s}_0] > 0$$

- $\overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$ ou $\overline{s}_{1,2} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,1}$:
Dans ce cette situation, les quantités $[\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_0]$, et $[\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0]$, sont de signes opposés, et l'on ne peut arbitrer sans prendre de risque.

4. Dans toutes les cas de marchés financiers, nous avons $\overline{s}_0 = s_0 = 5$. D'après les questions précédentes, nous avons

$$1) \left\{ \; \overline{s}_{1,1} = 6 < \overline{s_0} = 5 < \overline{s}_{1,2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{marché viable} \right.$$

$$2) \left\{ \; \overline{s_0} = 5 < \overline{s}_{1,1} = 6 < \overline{s}_{1,2} = 7 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{arbitrage} \right.$$

$$3) \left\{ \; \overline{s}_{1,2} = 1 < \overline{s_0} = 5 < \overline{s}_{1,1} = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{marché viable} \right.$$

$$4) \left\{ \; \overline{s}_{1,2} = 2 < \overline{s}_{1,1} = 3 < \overline{s_0} = 5 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{arbitrage} \right.$$

$$5) \left\{ \; \overline{s_0} = 5 \leq \overline{s}_{1,1} = 5 < \overline{s}_{1,2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{arbitrage} \right.$$

$$6) \left\{ \; \overline{s}_{1,2} = 4 < \overline{s_0} = 5 \leq \overline{s}_{1,1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{marché viable} \right.$$

$$7) \left\{ \; \overline{s}_{1,1} = 3 < \overline{s_0} = 5 \leq \overline{s}_{1,2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{marché viable} \right.$$

$$8) \left\{ \; \overline{s_0} = 5 \leq \overline{s}_{1,1} = 8 < \overline{s}_{1,2} = 9 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{arbitrage} \right.$$

$$9) \left\{ \; \overline{s}_{1,1} = 2 < \overline{s_0} = 5 \leq \overline{s}_{1,2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{marché viable} \right.$$

■

Exercice 5 *On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & \overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1; \overline{s}_0) & (1; \overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1; \overline{s}_0) & (1; \overline{s}_{1,2}) \end{array} \quad \text{avec} \quad 0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$$

Une banque émet une option de vente de fonction de paiement $f(\omega^i) = f_i$, avec $i = 1, 2$. On note $\overline{f}_i = f_i/(1+r)$ les valeurs réactualisées de cette option.

1. *Déterminer les stratégies de couverture de cette option, en fonction des portefeuilles et des actifs réactualisés.*
2. *Montrer qu'une stratégie de couverture est donnée par*

$$\phi^{2,\,\star} = \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right)/\overline{s}_{1,1}$$

où $\phi^{1,\,\star}$ désigne le point d'intersection des deux droites $(\Delta_i)_{i=1,2}$ déterminées par les équations suivantes :

$$\Delta_i \ : \ \phi^1 \mapsto \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}} \ \overline{f}_i + \phi^1 \ \left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}}\right)$$

On vérifiera que la stratégie de couverture $(\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ est l'unique solution du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi^1 + \phi^2 \ \overline{s}_{1,1} & = & \overline{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2 \ \overline{s}_{1,2} & = & \overline{f}_2 \end{array} \right.$$

3. *Montrer que le coût initial du portefeuille (réactualisé) permettant de couvrir l'option est donné par la formule*

$$\overline{V}_0(\Phi) = \overline{f}_1 \ \left(\frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_2 \ \left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right)$$

Solution :

1. Les portefeuilles de couverture (ϕ^1, ϕ^2) doivent nécessairement satisfaire la condition suivante

$$\overline{V}_1(\Phi) = \phi^1 + \phi^2 \ \overline{S}_1^2 \geq \overline{f}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\phi^1 + \phi^2 \ \overline{s}_{1,1} \geq \overline{f}_1 \quad \text{et} \quad \phi^1 + \phi^2 \ \overline{s}_{1,2} \geq \overline{f}_2\right) \Longleftrightarrow \phi^2 \geq \max\left\{\frac{\overline{f}_1 - \phi^1}{\overline{s}_{1,1}}; \ \frac{\overline{f}_2 - \phi^1}{\overline{s}_{1,2}}\right\}$$

Par conséquent, le coût minimal d'acquisition du portefeuille initial est tel que

$$\begin{array}{rcl} \overline{V}_0(\Phi) & = & V_0(\Phi) = \phi^1 + \phi^2 \ s_0 \\ & \geq & \max\limits_{i=1,2}\left\{\phi^1 + \dfrac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}} \ [\overline{f}_i - \phi^1]\right\} = \max\limits_{i=1,2}\left\{\dfrac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}} \ \overline{f}_i + \phi^1 \left(1 - \dfrac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}}\right)\right\} \end{array}$$

2. D'après nos hypothèses, nous avons

$$\overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$$

Ainsi, la droite

$$\phi^1 \longrightarrow \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}}\ \overline{f}_1 + \phi^1 \underbrace{\left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}}\right)}_{\text{négatif}}$$

est décroissante, et la droite

$$\phi^1 \longrightarrow \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2}}\ \overline{f}_2 + \phi^1 \underbrace{\left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2}}\right)}_{\text{positif}}$$

croissante. Ces deux droites s'intersectent en un point $\phi^{1,\,\star}$ déterminé par la formule

$$\frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}}\ \overline{f}_1 + \phi^{1,\,\star}\left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}}\right) = \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2}}\ \overline{f}_2 + \phi^{1,\,\star}\left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2}}\right)$$

Autrement dit, nous avons

$$\begin{aligned}
\phi^{1,\,\star} &= \left(\frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2}} - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}}\right)^{-1}\left[\frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2}}\ \overline{f}_2 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}}\ \overline{f}_1\right] \\
&= \left(\frac{1}{\overline{s}_{1,2}} - \frac{1}{\overline{s}_{1,1}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{\overline{s}_{1,2}}\ \overline{f}_2 - \frac{1}{\overline{s}_{1,1}}\ \overline{f}_1\right] = \frac{\overline{s}_{1,2}\overline{s}_{1,1}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} \times \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,2}\overline{s}_{1,1}}
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\phi^{1,\,\star} = \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}$$

Il nous reste à vérifier que la stratégie de couverture proposée

$$\phi^{2,\,\star} = \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right)/\overline{s}_{1,1}$$

permet de réaliser l'option $\overline{f}$. Pour cela, on note que

$$\phi^{1,\,\star} + \phi^{2,\,\star}\overline{s}_{1,1} = \phi^{1,\,\star} + \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right) = \overline{f}_1$$

et

$$\begin{aligned}
\phi^{1,\,\star} + \phi^{2,\,\star}\overline{s}_{1,2} &= \phi^{1,\,\star} + \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right)\frac{\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1}} = \phi^{1,\,\star}\left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_1 \times \frac{\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1}} \\
&= \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} \times \left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_1 \times \frac{\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1}} = \overline{f}_2
\end{aligned}$$

3. D'après la propriété d'autofinancement, le coût initial $\overline{V}_0(\Phi)$ du portefeuille permettant de couvrir l'option est donné par

$$\overline{V}_0(\Phi) = \phi^{1,\,\star} + \phi^{2,\,\star}\overline{s}_0$$

On obtient ainsi la formule

$$\begin{aligned}
\overline{V}_0(\Phi) &= \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} + \left(\overline{f}_1 - \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\right)\frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}} \\
&= \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} + \left(\frac{\overline{f}_1\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_2\overline{s}_{1,1}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\right)\frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1}} \\
&= \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} + \left(\frac{\overline{f}_1 - \overline{f}_2}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\right)\overline{s}_0 \\
&= \overline{f}_1\left(\frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_2\left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right)
\end{aligned}$$

■

Exercice 6 *Vérifier la viabilité des marchés suivants, et déterminer les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ dans chaque situation.*

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$
ω^1	$(1;5)$	$(1;\overline{s}_{1,1})$
ω^2	$(1;5)$	$(1;\overline{s}_{1,2})$

avec

$$1)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 3\\ \overline{s}_{1,2} = 6\end{cases}\quad 2)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 1\\ \overline{s}_{1,2} = 10\end{cases}\quad 3)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 4\\ \overline{s}_{1,2} = 7\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 1\\ \overline{s}_{1,2} = 6\end{cases}\quad 5)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 1\\ \overline{s}_{1,2} = 20\end{cases}\quad 6)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 2\\ \overline{s}_{1,2} = 7\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 3\\ \overline{s}_{1,2} = 50\end{cases}\quad 8)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 4\\ \overline{s}_{1,2} = 100\end{cases}\quad 9)\begin{cases}\overline{s}_{1,1} = 2\\ \overline{s}_{1,2} = 1000\end{cases}$$

Solution : On rappelle que les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ sont données par

$$C(f) = \overline{f}_1\left(\frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_2\left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\phi^{1,\,\star} &= \frac{\overline{f}_1\overline{s}_{1,2} - \overline{f}_2\overline{s}_{1,1}}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}} \\
\phi^{2,\,\star} &= \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right)/\overline{s}_{1,1} = \frac{1}{\overline{s}_{1,1}}\left(\overline{f}_1 - \frac{\overline{f}_2\overline{s}_{1,1} - \overline{f}_1\overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\right) = \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}
\end{aligned}$$

Leurs valeurs dans les différents modèles de marchés proposés sont données ci-dessous.

1) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;6)$	$\overline{f}_2$	$\frac{1}{3}\overline{f}_1+\frac{2}{3}\overline{f}_2$	$\left(\frac{6\overline{f}_1-3\overline{f}_2}{3},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{3}\right)$

2) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;10)$	$\overline{f}_2$	$\frac{5}{9}\overline{f}_1+\frac{4}{9}\overline{f}_2$	$\left(\frac{10\overline{f}_1-\overline{f}_2}{9},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{9}\right)$

3) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	$\overline{f}_2$	$\frac{2}{5}\overline{f}_1+\frac{3}{5}\overline{f}_2$	$\left(\frac{7\overline{f}_1-2\overline{f}_2}{5},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{5}\right)$

4) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	$\overline{f}_2$	$\frac{45}{47}\overline{f}_1+\frac{2}{47}\overline{f}_2$	$\left(\frac{50\overline{f}_1-3\overline{f}_2}{47},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{47}\right)$

5) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;20)$	$\overline{f}_2$	$\frac{15}{19}\overline{f}_1+\frac{4}{19}\overline{f}_2$	$\left(\frac{20\overline{f}_1-\overline{f}_2}{19},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{19}\right)$

6) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	$\overline{f}_2$	$\frac{2}{5}\overline{f}_1+\frac{3}{5}\overline{f}_2$	$\left(\frac{7\overline{f}_1-2\overline{f}_2}{5},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{5}\right)$

7) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	$\overline{f}_2$	$\frac{45}{47}\overline{f}_1+\frac{2}{47}\overline{f}_2$	$\left(\frac{50\overline{f}_1-3\overline{f}_2}{47},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{47}\right)$

8) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;4)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;100)$	$\overline{f}_2$	$\frac{95}{96}\overline{f}_1+\frac{1}{96}\overline{f}_2$	$\left(\frac{100\overline{f}_1-4\overline{f}_2}{96},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{96}\right)$

9) Ω	$\overline{S}_0=(\overline{S}_0^1,\overline{S}_0^2)$	$S_1=(\overline{S}_1^1,\overline{S}_1^2)$	$\overline{f}$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star},\phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	$\overline{f}_1$		
ω^2	$(1;5)$	$(1;1000)$	$\overline{f}_2$	$\frac{995}{998}\overline{f}_1+\frac{3}{998}\overline{f}_2$	$\left(\frac{1000\overline{f}_1-2\overline{f}_2}{998},\frac{\overline{f}_2-\overline{f}_1}{998}\right)$

$\blacksquare$

Exercice 7 *On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & \overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1; \overline{s}_0) & (1; \overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1; \overline{s}_0) & (1; \overline{s}_{1,2}) \end{array} \quad \text{avec} \quad 0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$$

1. *Déterminer l'unique probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que*

$$\mathbb{E}^\star(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2) = \overline{S}_0^2$$

2. *Montrer que pour tout portefeuille autofinancé, nous avons*

$$\mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi) \mid \overline{S}_0^2) = \overline{V}_0(\Phi)$$

3. *Déterminer la valeur moyenne sous $\mathbb{P}^\star$ d'une fonction de paiement réactualisée $\overline{f}$.*
4. *Décrire une stratégie de couverture $\Phi^\star = (\phi^{1,\ \star}, \phi^{2,\ \star})$ de l'option $\overline{f}$, et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = C(f)$.*

Solution :

1. L'unique probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que $\mathbb{E}^\star(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2) = \overline{S}_0^2$, est donnée par la formule suivante

$$\mathbb{E}^\star(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2 = \overline{s}_0) = \overline{s}_{1,1}\ \mathbb{P}^\star(\omega^1) + \overline{s}_{1,2}\ (1 - \mathbb{P}^\star(\omega^1)) = \overline{s}_0$$

   Autrement dit, nous avons

$$\mathbb{P}^\star(\omega^1) = 1 - \mathbb{P}^\star(\omega^2) = \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}$$

2. Pour tout portefeuille autofinancé (et prévisible), nous avons

$$\mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi) \mid \overline{S}_0^2) \quad = \quad \overline{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2\ \mathbb{E}^\star(\Delta \overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2) = \overline{V}_0(\Phi)$$

3. Sous $\mathbb{P}^\star$, d'une fonction de paiement réactualisée $\overline{f}$, est donnée par

$$\mathbb{E}^\star(\overline{f}) = \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\ \overline{f}_1 + \left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right)\ \overline{f}_2$$

   avec $\overline{f}(\omega^i) = \overline{f}_i$, pour chaque $i = 1, 2$.
4. Décrire une stratégie de couverture $\Phi^\star = (\phi^{1,\ \star}, \phi^{2,\ \star})$ de l'option $\overline{f}$, et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f})$.
5. En utilisant la formule du delta de couverture,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi^1 + \phi^2 \overline{s}_{1,1} & = & \overline{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2 \overline{s}_{1,2} & = & \overline{f}_2 \end{array} \right.$$

on obtient la stratégie de couverture $\Phi^\star = (\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ de l'option $\overline{f}$,

$$\phi^{1,\,\star} = \left(\frac{1}{\overline{s}_{1,1}} - \frac{1}{\overline{s}_{1,2}}\right)^{-1} \left(\frac{\overline{f}_1}{\overline{s}_{1,1}} - \frac{\overline{f}_2}{\overline{s}_{1,2}}\right) = \frac{\overline{s}_{1,2}\overline{f}_1 - \overline{s}_{1,1}\overline{f}_2}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}} \quad \text{et} \quad \phi^{2,\,\star} = \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}$$

Le coût initial du portefeuille de couverture est donné par

$$\overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f})$$

Par définition de $C^\star(f)$ et $C_\star(f)$

$$\begin{aligned} C^\star(f) &= \inf\left\{x \in \mathbb{R}_+ \ : \ \exists \Phi = (\Phi_k)_{k=0,1} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) \geq \overline{f}\right\} \\ C_\star(f) &= \sup\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{k=0,1} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) \leq \overline{f}\right\} \end{aligned}$$

nous avons,

$$\forall \Phi \ : \ \overline{V}_1(\Phi) \geq \overline{f} \Longrightarrow \mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi)) \geq \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = \overline{V}_0(\Phi^\star)$$

et

$$\forall \Phi \ : \ \overline{V}_1(\Phi) \leq \overline{f} \Longrightarrow \mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi)) \leq \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = \overline{V}_0(\Phi^\star)$$

Par conséquent, on obtient l'encadrement suivant

$$C_\star(f) \leq \overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) \leq C^\star(f)$$

Comme la stratégie de couverture $\Phi^\star$ appartient aux deux ensembles décrits ci-dessus, on a aussi

$$C^\star(f) \leq \overline{V}_0(\Phi^\star) \leq C_\star(f)$$

On en conclut que

$$\overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = C(f) = C^\star(f) = C_\star(f)$$

■

Exercice 8 *Déterminer les prix, et les stratégies de couverture des options de vente suivantes*

1) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;6)$	4

2) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;10)$	0

3) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	6
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	1

4) Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0

5)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (100 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	99
ω^2	$(1;5)$	$(1;20)$	80

6)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	4
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	0

7)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	3
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0

Solution : Les prix, et les stratégies de couverture des options de vente sont donnés ci-dessous :

1)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7	$\frac{1}{3}\overline{f}_1 + \frac{2}{3}\overline{f}_2$	$\left(\frac{6\overline{f}_1 - 3\overline{f}_2}{3}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{3}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;6)$	4	$= \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = 5$	$= \left(\frac{30}{3}, \frac{-3}{3}\right) = (10;-1)$

2)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	7	$\frac{5}{9}\overline{f}_1 + \frac{4}{9}\overline{f}_1$	$\left(\frac{10\overline{f}_1 - \overline{f}_2}{9}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{9}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;10)$	0	$= \frac{35}{9}$	$= \left(\frac{70}{9}, \frac{-7}{9}\right)$

3)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	6	$\frac{2}{5}\overline{f}_1 + \frac{3}{5}\overline{f}_2$	$\left(\frac{7\overline{f}_1 - 2\overline{f}_2}{5}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	1	$= \frac{15}{5} = 3$	$= \left(\frac{40}{5}, \frac{-5}{5}\right) = (8;-1)$

4)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7	$\frac{45}{47}\overline{f}_1 + \frac{2}{47}\overline{f}_2$	$\left(\frac{50\overline{f}_1 - 3\overline{f}_2}{47}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{47}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0	$= \frac{315}{47}$	$= \left(\frac{350}{47}, \frac{-7}{47}\right)$

5)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (100 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	99	$\frac{15}{19}\overline{f}_1 + \frac{4}{19}\overline{f}_2$	$\left(\frac{20\overline{f}_1 - \overline{f}_2}{19}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{19}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;20)$	80	$\frac{1805}{19}$	$= (100;-1)$

6)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	4	$\frac{2}{5}\overline{f}_1 + \frac{3}{5}\overline{f}_2$	$\left(\frac{7\overline{f}_1 - 2\overline{f}_2}{5}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{5}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	0	$= \frac{8}{5}$	$= \left(\frac{28}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

7)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$	$C(f)$	$(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	3	$\frac{45}{47}\overline{f}_1 + \frac{2}{47}\overline{f}_2$	$\left(\frac{50\overline{f}_1 - 3\overline{f}_2}{47}, \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{47}\right)$
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0	$= \frac{135}{47}$	$\left(\frac{150}{47}, \frac{-3}{47}\right)$

■