TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1;4)$	$(1,05;5)$
ω^2	$(1;4)$	$(1,05;10)$

1. *Construire l'arbre des épreuves représentant l'évolution de ce marché financier.*
2. *On note $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$, et $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1)$ les algèbres représentant l'information disponible à l'origine, et au temps 1. Montrer que*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

3. *Calculer le taux d'intérêt $r = \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1}$ de l'actif sans risque.*

Exercice 2 *Résoudre les mêmes questions que celles posées dans l'exercice 1 pour le modèle de marché financier suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$	$S_2 = (S_2^1, S_2^2)$
ω^1	$(1;5)$	$(1,05;10)$	$(1,10;20)$
ω^2	$(1;5)$	$(1,05;5)$	$(1,10;10)$
ω^3	$(1;5)$	$(1,05;5)$	$(1,10;5)$

Exercice 3 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1;4)$	$(1,05;5)$
ω^2	$(1;4)$	$(1,05;10)$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert 8 parts d'actifs sans risque, pour acheter 2 parts d'actifs risqué.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on vend, ou rembourse, les actifs sans risque, et l'on conserve les deux parts d'actifs risqués.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins 800 Euros à moindre frais.*

Exercice 4 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1; 4)$	$(1,05; 2)$
ω^2	$(1; 4)$	$(1,05; 3)$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 2 *parts d'actifs risqués, pour acheter* 8 *parts d'actifs sans risque. Autrement dit, l'investisseur vend deux parts d'actions risquées qu'il ne possède pas, et dépose immédiatement l'argent obtenu par cette vente dans un compte épargne qui rapporte* 5%.
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos deux parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos huit parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 1.200 *Euros à moindre frais.*

Exercice 5 *On considère le modèle de marché suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1; 10)$	$(1,05; 5)$
ω^2	$(1; 10)$	$(1,05; 10)$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 20 *parts d'actifs risqués, et dépose immédiatement l'argent obtenu, soit* 200 *Euros, dans un compte épargne à* 5%.
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos vingt parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos deux cents parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 100 *Euros à moindre frais.*

Exercice 6 *Montrer que le modèle de marché suivant est viable*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$
ω^1	$(1; 5)$	$(1,05; 10)$
ω^2	$(1; 5)$	$(1,05; 5)$

Exercice 7 *On considère le marché viable étudié dans l'exercice 6.*

Ω	$S_0 = (S_0^1; S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1; S_1^2)$	$f = (7 - S_1^2)_+$
ω^1	$(1; 5)$	$(1,05; 5)$	2
ω^2	$(1; 5)$	$(1,05; 10)$	0

1. *Calculer la valeur d'acquisition du portefeuille d'un investisseur vendant à découvert* $2/5$ *de part de titre risqué, et achetant* $4/1,05$ *parts d'actifs sans risques.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille, après évolution des cours des actifs.*
3. *En déduire que ce portefeuille permet de couvrir l'option de vente associée à la fonction de paiement* f.

Exercice 8 *On reprend le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 7.*

1. *Calculer l'endettement initial d'un investisseur empruntant* $4/1,05$ *parts d'actifs sans risques, et achetant* $2/5$ *de part de titres risqués.*
2. *Calculer les valeurs possibles de ce portefeuille, après l'évolution des cours du marché. En déduire que l'acheteur de l'option* f *pourra, avec ce portefeuille rembourser sa dette initiale.*

Exercice 9 *On reprend à nouveau le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 7.*

1. *Caractériser les aménagement de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut* 1.
2. *Pour de tels portefeuilles, combien de parts d'actifs risqués doit-on vendre à découvert, de sorte à couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa. Vérifier qu'une telle stratégie d'emprunt ne permettra pas de couvrir l'option dans le second jeu d'aléa.*
3. *En conclure que le prix de l'option* f *est nécessairement plus élevé que* 1.

Exercice 10 *Soit* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$ *un marché financier à deux titres.* $(S_k^1, S_k^2)_{0\leq k\leq n}$. *On convient que l'actif sans risque est donné par*

$$S_0^1 = 1 \quad \text{et} \quad S_k^1 = (1+r)\ S_{k-1}^1 = (1+r)^k \quad \text{avec} \quad r > 0$$

On note $(\overline{S}_k^1, \overline{S}_k^2)_{0\leq k\leq n}$, *et* $(\overline{V}_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}$ *les valeurs réactualisées des actifs, et des portefeuilles définies par*

$$\overline{S}_k^i = \frac{S_k^i}{(1+r)^k} \quad \text{et} \quad \overline{V}_k(\Phi) = \frac{V_k(\Phi)}{(1+r)^k}$$

1. *Vérifier que les prix* $C^\star(f)$, *et* $C_\star(f)$, *associés à une option de fonction de paiement* f, *peuvent s'exprimer sous la forme suivante*

$$\begin{array}{rcl} C^\star(f) & = & \inf\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad \overline{V}_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}\right\} \\ C^\star(f) & = & \sup\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad \overline{V}_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_n(\Phi) \leq \overline{f}\right\} \end{array}$$

   où $\overline{f} = f/(1+r)^n$ *désigne la fonction de paiement réactualisée à la date d'échéance.*

2. *Soit* $\overline{K} = K/(1+r)^n$ *le prix d'exercice réactualisé à la date d'échéance. Vérifier les équivalences suivantes*

$$f = (K - S_n^2)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{K} - \overline{S}_n^2)_+$$

   et

$$f = (S_n^2 - K)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{S}_n^2 - \overline{K})_+$$