

TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 On considère le modèle de marché suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1, S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1, S_1^2) \\ \omega^1 \quad \quad (1; 4) \quad \quad (1, 05; 5) \\ \omega^2 \quad \quad (1; 4) \quad \quad (1, 05; 10) \end{array}$$

1. Construire l'arbre des épreuves représentant l'évolution de ce marché financier.
2. On note $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$, et $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1)$ les algèbres représentant l'information disponible à l'origine, et au temps 1. Montrer que

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

3. Calculer le taux d'intérêt $r = \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1}$ de l'actif sans risque.

Solution : Les deux premières questions sont immédiates. Pour résoudre la dernière, on notera que

$$r = \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1} = \frac{1,05 - 1}{1} = 5\%$$

■

Exercice 2 Résoudre les mêmes questions que celles posées dans l'exercice 1 pour le modèle de marché financier suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1, S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1, S_1^2) \quad S_2 = (S_2^1, S_2^2) \\ \omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad (1, 05; 10) \quad \quad (1, 10; 20) \\ \omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad (1, 05; 5) \quad \quad (1, 10; 10) \\ \omega^3 \quad \quad (1; 5) \quad \quad (1, 05; 5) \quad \quad (1, 10; 5) \end{array}$$

Solution : Les deux premières questions sont à nouveau immédiates. Pour résoudre la dernière, on notera que

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1} = \frac{1,05 - 1}{1} = 5\% \\ &\simeq \frac{\Delta S_2^1}{S_1^1} = \frac{1,10 - 1,05}{1,05} = \frac{0,05}{1,05} \simeq 5\% \end{aligned}$$

Il convient de souligner que les valeurs des actifs sont des valeurs arrondies. Pour un rendement fixe de 5%, la valeur "mathématique" exacte de S_2^1 est donnée par

$$S_2^1 = (1 + 0,05)^2 = 1,1025 \implies \frac{\Delta S_2^1}{S_1^1} = \frac{1,1025 - 1,05}{1,05} = \frac{0,0525}{1,05} = 5\%$$

■

Exercice 3 On considère le modèle de marché suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1; S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1; S_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; 4) \quad (1, 05; 5) \\ \omega^2 \quad (1; 4) \quad (1, 05; 10) \end{array}$$

1. Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert 8 parts d'actifs sans risque, pour acheter 2 parts d'actifs risqué.
2. Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on vend, ou rembourse, les actifs sans risque, et l'on conserve les deux parts d'actifs risqués.
3. Trouver une stratégie pour gagner au moins 800 Euros à moindre frais.

Solution :

1. Les prix initiaux étant fixés $(S_0^1; S_0^2)(\omega_1) = (S_0^1; S_0^2)(\omega_2) = (1; 4)$, le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert $-\Phi_1^1 = 8$ parts d'actifs sans risque, pour acheter $\Phi_2 = 2$ parts d'actifs risqué

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (-8 ; 2)$$

est donné par

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 = -8 \times 1 + 2 \times 4 = 0$$

2. Après évolution du cours des actifs, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) S_1^2(\omega^1) \\ &= -8 \times 1,05 + 2 \times 5 = 10 - 8,4 = 1,6 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) S_1^2(\omega^2) \\ &= -8 \times 1,05 + 2 \times 10 = 20 - 8,4 = 11,6 \end{aligned}$$

3. Pour gagner de l'argent à moindre frais, la stratégie consiste à s'endetter de $4m$ parts d'actifs non risqué (ou vendre à découvert $4m$ part de ces actifs non risqués), pour acheter m parts d'actif risqué. Le coût initial d'une telle opération est nul

$$\Phi_1 = (-4m, m) \Rightarrow V_0(\Phi) = (-4m) \times 1 + (m) \times 4 = 0$$

Les valeurs possibles du portefeuille à l'instant suivant sont données par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= (-4m) \times 1,05 + (m) \times 5 = 0,8 m \\ V_1(\Phi)(\omega^2) &= (-4m) \times 1,05 + (m) \times 10 = 5,8 m \end{aligned}$$

Si l'on rembourse les $(-4m)$ parts actifs sans risque, et l'on conserve les m parts d'actifs risqués, la valeur de notre portefeuille sera telle que

$$\Phi_2 = (-4m, m) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^2 \times S_1^2 = V_1(\Phi) \geq 0, 8 m$$

Pour gagner 800 Euros à moindre frais, il suffit donc d'emprunter 4000 parts d'actifs non risqué, pour acheter 1000 parts d'actifs risqués. Le coût initial de cette opération sera nul, et après l'annonce des prix S_1 des actifs, notre gain prendra l'une des valeurs

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 800 \quad \text{ou} \quad V_1(\Phi)(\omega^2) = 5.800$$

■

Exercice 4 *On considère le modèle de marché suivant*

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1; S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1; S_1^2) \\ \omega^1 \quad \quad (1; 4) \quad \quad (1, 05; 2) \\ \omega^2 \quad \quad (1; 4) \quad \quad (1, 05; 3) \end{array}$$

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert 2 parts d'actifs risqués, pour acheter 8 parts d'actifs sans risque. Autrement dit, l'investisseur vend deux parts d'actions risquées qu'il ne possède pas, et dépose immédiatement l'argent obtenu par cette vente dans un compte épargne qui rapporte 5%.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos deux parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos huit parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins 1.200 Euros à moindre frais.*

Solution :

1. La stratégie initiale d'un investisseur vendant à découvert 2 parts d'actifs risqués, pour acheter 8 parts d'actifs sans risque est représenté par le vecteur

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (8 ; -2)$$

Le coût d'acquisition du portefeuille correspondant est nulle

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 = 8 \times 1 + (-2) \times 4 = 0$$

2. Après évolution du cours des actifs, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) S_1^2(\omega^1) \\ &= 8 \times 1,05 + (-2) \times 2 = 8,4 - 4 = 4,4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) S_1^2(\omega^2) \\ &= 8 \times 1,05 + (-2) \times 3 = 8,4 - 6 = 2,4 \end{aligned}$$

Lorsque l'on rembourse nos deux parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos huit parts d'actifs sans risques, nous utilisons la stratégie de réaménagement

$$\Phi_2 = \Phi_1 = (8, -2) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^2 \times S_1^2 = V_1(\Phi) = \Phi_1^1 S_1^1 + \Phi_1^2 S_1^2$$

3. Pour gagner de l'argent à moindre frais, une stratégie consiste à vendre à découvert m parts d'actifs risqués, pour acheter $4m$ parts d'actif non risqué. Le coût initial d'une telle opération est nul

$$\Phi_1 = (4m, -m) \Rightarrow V_0(\Phi) = (4m) \times 1 + (-m) \times 4 = 0$$

Les valeurs possibles du portefeuille à l'instant suivant sont données par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= (4m) \times 1,05 + (-m) \times 2 = 2,2m \\ V_1(\Phi)(\omega^2) &= (4m) \times 1,05 + (-m) \times 3 = 1,2m \end{aligned}$$

Si l'on rembourse les $(-m)$ parts actifs risqués, et l'on conserve les $(4m)$ parts d'actifs non risqués, la valeur de notre portefeuille sera telle que

$$\Phi_2 = (4m, -m) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^2 \times S_1^2 = V_1(\Phi) \geq 1,2m$$

Pour gagner 1.200 Euros à moindre frais, il suffit donc de vendre à découvert 1000 parts d'actifs risqués, pour acheter 4000 parts d'actifs non risqués. Le coût initial de cette opération sera nul, et après l'annonce des prix S_1 des actifs, notre gain prendra l'une des valeurs

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 2.200 \quad \text{ou} \quad V_1(\Phi)(\omega^2) = 1.200$$

■

Exercice 5 On considère le modèle de marché suivant

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1; S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1; S_1^2) \\ \omega^1 \quad (1; 10) \quad (1, 05; 5) \\ \omega^2 \quad (1; 10) \quad (1, 05; 10) \end{array}$$

1. Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert 20 parts d'actifs risqués, et dépose immédiatement l'argent obtenu, soit 200 Euros, dans un compte épargne à 5%.
2. Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos vingt parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos deux cents parts d'actifs sans risques.
3. Trouver une stratégie pour gagner au moins 100 Euros à moindre frais.

Solution :

1. La stratégie initiale d'un investisseur vendant à découvert 20 parts d'actifs risqués, pour acheter 200 parts d'actifs sans risques est représenté par le vecteur

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (200 ; -20)$$

Le coût d'acquisition du portefeuille correspondant est nulle

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 = 200 \times 1 + (-20) \times 10 = 0$$

2. Après évolution du cours des actifs, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) S_1^2(\omega^1) \\ &= 200 \times 1,05 + (-20) \times 5 = 210 - 100 = 110 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) S_1^2(\omega^2) \\ &= 200 \times 1,05 + (-20) \times 10 = 210 - 100 = 10 \end{aligned}$$

Lorsque l'on rembourse nos deux vingt parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos deux cents parts d'actifs sans risques, nous utilisons la stratégie de réaménagement

$$\Phi_2 = \Phi_1 = (200 ; -20) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^2 \times S_1^2 = V_1(\Phi) = \Phi_1^1 S_1^1 + \Phi_1^2 S_1^2$$

3. Pour gagner de l'argent à moindre frais, une stratégie consiste à vendre à découvert m parts d'actifs risqués, pour placer $(10 m)$ Euros dans un un compte épargne à 5%. Le coût initial d'une telle opération est nul

$$\Phi_1 = (10m ; -m) \Rightarrow V_0(\Phi) = (10m) \times 1 + (-m) \times 10 = 0$$

Les valeurs possibles du portefeuille à l'instant suivant sont données par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= (10m) \times 1,05 + (-m) \times 5 = 5,5 m \\ V_1(\Phi)(\omega^2) &= (10m) \times 1,05 + (-m) \times 10 = 0,5 m \end{aligned}$$

Si l'on rembourse les $(-m)$ parts actifs risqués, et l'on conserve les $(10m)$ parts d'actifs non risqués, la valeur de notre portefeuille sera telle que

$$\Phi_2 = (10m ; -m) \Rightarrow \Phi_2^1 \times S_1^1 + \Phi_2^2 \times S_1^2 = V_1(\Phi) \geq 0,5 m$$

Pour gagner 100 Euros à moindre frais, il suffit donc de vendre à découvert 200 parts d'actifs risqués, pour placer 2000 Euros dans un compte épargne à 5%. Le coût initial de cette opération sera nul, et après l'annonce des prix S_1 des actifs, notre gain prendra l'une des valeurs

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 100 \quad \text{ou} \quad V_1(\Phi)(\omega^2) = 1.100$$

■

Exercice 6 *Montrer que le modèle de marché suivant est viable*

$$\begin{array}{l} \Omega \quad S_0 = (S_0^1; S_0^2) \quad S_1 = (S_1^1; S_1^2) \\ \omega^1 \quad \quad (1; 5) \quad \quad (1,05; 10) \\ \omega^2 \quad \quad (1; 5) \quad \quad (1,05; 5) \end{array}$$

Solution : S'il existait une stratégie d'arbitrage, on aurait initialement

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 = \Phi_1^1 \cdot 1 + \Phi_1^2 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \Phi_1^1 = -5 \times \Phi_1^2$$

Après évolution du cours des actifs, nous aurions

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) S_1^2(\omega^1) \\ &= (-5\Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 10 = (10 - 5,25) \Phi_1^2 = 4,75 \Phi_1^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) S_1^2(\omega^2) \\ &= (-5\Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 5 = (-5,25 + 5) \Phi_1^2 = -0,25 \Phi_1^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, les valeurs possibles des portefeuilles $V_1(\Phi)(\omega^1)$, et $V_1(\Phi)(\omega^2)$ sont de signes contraires. On ne peut donc pas trouver de stratégie d'arbitrage. ■

Exercice 7 On considère le marché viable étudié dans l'exercice 6.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & S_0 = (S_0^1; S_0^2) & S_1 = (S_1^1; S_1^2) & f = (7 - S_1^2)_+ \\ \omega^1 & (1; 5) & (1, 05; 5) & 2 \\ \omega^2 & (1; 5) & (1, 05; 10) & 0 \end{array}$$

1. Calculer la valeur d'acquisition du portefeuille d'un investisseur vendant à découvert $2/5$ de part de titre risqué, et achetant $4/1,05$ parts d'actifs sans risques.
2. Calculer les valeurs possibles du portefeuille, après évolution des cours des actifs.
3. En déduire que ce portefeuille permet de couvrir l'option de vente associée à la fonction de paiement f .

Solution :

1. La stratégie initiale d'un investisseur vendant à découvert $2/5$ de part de titre risqué, et achetant $4/1,05$ parts d'actifs sans risques, est donnée par le vecteur

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = \left(\frac{4}{1,05}; -\frac{2}{5} \right)$$

La valeur d'acquisition du portefeuille initial est donc donnée par

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 \\ &= \frac{4}{1,05} \times 1 + \left(-\frac{2}{5} \right) \times 5 \\ &= \frac{4}{1,05} - 2 = \frac{4 - 2,1}{1,05} = \frac{1,9}{1,05} \simeq 1,81 \end{aligned}$$

2. Après évolution des cours des actifs, les deux valeurs possibles de ce portefeuille sont déterminées par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1(\omega^1) S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2(\omega^1) S_1^2(\omega^1) \\ &= \frac{4}{1,05} \times 1,05 + \left(-\frac{2}{5} \right) \times 5 = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1(\omega^2) S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2(\omega^2) S_1^2(\omega^2) \\ &= \frac{4}{1,05} \times 1,05 + \left(-\frac{2}{5} \right) \times 10 = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall \omega \in \Omega \quad V_1(\Phi)(\omega) \geq f(\omega)$$

On en conclut que ce portefeuille permet de couvrir l'option de vente associée à la fonction de paiement f .



Exercice 8 On reprend le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 7.

1. Calculer l'endettement initial d'un investisseur empruntant $4/1,05$ parts d'actifs sans risques, et achetant $2/5$ de part de titres risqués.
2. Calculer les valeurs possibles de ce portefeuille, après l'évolution des cours du marché. En déduire que l'acheteur de l'option f pourra, avec ce portefeuille rembourser sa dette initiale.

Solution :

1. La stratégie initiale $(-\Phi_1)$ d'un investisseur empruntant $4/1,05$ de part de titres sans risques, et achetant $2/5$ de part part d'actifs risqués, est donnée par le vecteur

$$-\Phi_1 = (-\Phi_1^1, -\Phi_1^2) = \left(-\frac{4}{1,05} ; \frac{2}{5} \right)$$

La valeur d'acquisition du portefeuille initial est donc donnée par

$$\begin{aligned} V_0(-\Phi) &= -\Phi_1^1 S_0^1 - \Phi_1^2 S_0^2 \\ &= -\frac{4}{1,05} \times 1 + \left(\frac{2}{5} \right) \times 5 \\ &= -\frac{4}{1,05} + 2 = -\frac{4-2,1}{1,05} = -\frac{1,9}{1,05} \simeq -1,81 \end{aligned}$$

2. Après évolution des cours des actifs, les deux valeurs possibles de ce portefeuille sont déterminées par

$$\begin{aligned} V_1(-\Phi)(\omega^1) &= -\Phi_1^1(\omega^1) S_1^1(\omega^1) - \Phi_1^2(\omega^1) S_1^2(\omega^1) \\ &= -\frac{4}{1,05} \times 1,05 + \frac{2}{5} \times 5 = -4 + 2 = -2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1(-\Phi)(\omega^2) &= -\Phi_1^1(\omega^2) S_1^1(\omega^2) - \Phi_1^2(\omega^2) S_1^2(\omega^2) \\ &= -\frac{4}{1,05} \times 1,05 + \frac{2}{5} \times 10 = -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall \omega \in \Omega \quad V_1(-\Phi)(\omega) + f(\omega) \geq 0$$

On en conclut que le portefeuille $-\Phi_1$ permet à l'acheteur de l'option f de rembourser sa dette initiale, s'élevant à $-1,81$.



Exercice 9 On reprend à nouveau le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 7.

1. Caractériser les aménagements de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut 1.
2. Pour de tels portefeuilles, combien de parts d'actifs risqués doit-on vendre à découvert, de sorte à couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa. Vérifier qu'une telle stratégie d'emprunt ne permettra pas de couvrir l'option dans le second jeu d'aléa.
3. En conclure que le prix de l'option f est nécessairement plus élevé que 1.

Solution :

1. Les aménagements $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$ de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut $V_0(\Phi) = 1$ sont données par

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 S_0^1 + \Phi_1^2 S_0^2 = 1 \iff \Phi_1^1 + 5 \Phi_1^2 = 1$$

2. Après l'évolution des cours des actifs correspondant au premier jeu d'aléa ω^1 , la valeur du portefeuille est donnée par

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1 S_1^1(\omega^1) + \Phi_1^2 S_1^2(\omega^1) = \Phi_1^1 \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 5 \\ &= (1 - 5 \Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 5 = 1,05 - 0,25 \times \Phi_1^2 \end{aligned}$$

Pour couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa, nous devons avoir

$$V_1(\Phi)(\omega^1) = 1,05 - 0,25 \times \Phi_1^2 \geq 2 = f(\omega^1) \iff \Phi_1^2 \leq -\frac{95}{25} = -\frac{19}{5}$$

Autrement dit, nous devons vendre à découvert au moins 19/5 de parts de titres risqués. Dans le second jeu d'aléa, une telle stratégie conduit à la valeur du portefeuille

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1 S_1^1(\omega^2) + \Phi_1^2 S_1^2(\omega^2) = \Phi_1^1 \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 10 \\ &= (1 - 5 \Phi_1^2) \times 1,05 + \Phi_1^2 \times 10 = 1,05 + 4,75 \times \Phi_1^2 \\ &\leq 1,05 - 4,75 \times \frac{19}{5} = 1,05 - 0,95 \times 19 < 0 \end{aligned}$$

3. Nous avons montré que le vendeur ne pourra jamais honorer son engagement, et couvrir son option, s'il son prix de vente est 1. Autrement dit, nous avons

$$\{x \in [0, 1] : \exists(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ t.q. } V_0(\Phi) = x \text{ et } V_n(\Phi) \geq f\} = \emptyset$$

Par conséquent, par définition de $C^*(f)$, nous avons

$$\begin{aligned} C^*(f) &= \inf \{x \in (1, \infty) : \exists(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ t.q. } V_0(\Phi) = x \text{ et } V_n(\Phi) \geq f\} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

■

Exercice 10 Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$ un marché financier à deux titres. $(S_k^1, S_k^2)_{0 \leq k \leq n}$. On convient que l'actif sans risque est donné par

$$S_0^1 = 1 \quad \text{et} \quad S_k^1 = (1+r) S_{k-1}^1 = (1+r)^k \quad \text{avec} \quad r > 0$$

On note $(\bar{S}_k^1, \bar{S}_k^2)_{0 \leq k \leq n}$, et $(\bar{V}_k(\Phi))_{0 \leq k \leq n}$ les valeurs réactualisées des actifs, et des portefeuilles définies par

$$\bar{S}_k^i = \frac{S_k^i}{(1+r)^k} \quad \text{et} \quad \bar{V}_k(\Phi) = \frac{V_k(\Phi)}{(1+r)^k}$$

1. Vérifier que les prix $C^*(f)$, et $C_*(f)$, associés à une option de fonction de paiement f , peuvent s'exprimer sous la forme suivante

$$\begin{aligned} C^*(f) &= \inf \{x \in [0, \infty) : \exists (\Phi_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ t.q. } \bar{V}_0(\Phi) = x \text{ et } \bar{V}_n(\Phi) \geq \bar{f}\} \\ C_*(f) &= \sup \{x \in [0, \infty) : \exists (\Phi_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ t.q. } \bar{V}_0(\Phi) = x \text{ et } \bar{V}_n(\Phi) \leq \bar{f}\} \end{aligned}$$

où $\bar{f} = f/(1+r)^n$ désigne la fonction de paiement réactualisée à la date d'échéance.

2. Soit $\bar{K} = K/(1+r)^n$ le prix d'exercice réactualisé à la date d'échéance. Vérifier les équivalences suivantes

$$f = (K - S_n^2)_+ \iff \bar{f} = (\bar{K} - \bar{S}_n^2)_+$$

et

$$f = (S_n^2 - K)_+ \iff \bar{f} = (\bar{S}_n^2 - \bar{K})_+$$