# TD - ESSI2 (option MMDFA)

**Exercice 1** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*, avec*

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = p \in [0,1]$$

*On conviendra que* $\{\epsilon_k = +1\}$ *représente l'évènement favorable ou le joueur gagne à la* $k^{\text{ième}}$ *séquence de jeu une unité de mise. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$$

*la filtration associée au déroulement du jeux, avec la convention* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*, pour* $k = 0$*. Vérifier que le processus de comptage des succés*

$$M_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

*est une martingale si* $p = 1/2$*, une sur-martingale lorsque* $p \leq 1/2$*, et enfin une sous-martingale lorsque* $p \geq 1/2$*.*

**Exercice 2** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Montrer que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$M_k = \sum_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$*.*

**Exercice 3** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, de moyenne unité (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Vérifier que processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par le produit*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$*.*

**Exercice 4** *Soit* $L_0$*, une v.a., et* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *et* $(N_k)_{0\leq k\leq n}$*, un couple de martingales définies sur un même espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*. Vérifier que le processus* $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini ci-dessous*

$$L_k = L_0 + \sum_{l=1}^{k} M_{l-1} \Delta N_l$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$*.*

**Exercice 5** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k)=0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathbb{P})$*. On note* $\mathcal{F}_k=\sigma(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)$*, la filtration d algèbres associée.*

1. *Vérifier que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$\forall 0\leq k\leq n \qquad M_k=\sum_{l=0}^{k}\epsilon_l=M_{k-1}+\epsilon_k$$

*est une martingale sur* $(\Omega,(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n},\mathbb{P})$*.*

2. *On notera par la suite* $\sigma_k^2=\mathbb{E}(\epsilon_k^2)$*, les variances des v.a.* $\epsilon_k$*. Montrer que*

$$\mathbb{E}([M_{k+1}-M_k]^2\mid\mathcal{F}_k)=\sigma_{k+1}^2$$

*En déduire que les processus aléatoires*

$$\forall 0\leq k\leq n \qquad M_k^2-\sum_{l=0}^{k}\sigma_l^2 \quad et \quad M_k^2-M_0^2-\sum_{l=1}^{k}\sigma_l^2$$

*sont des martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k$*.*

3. *Dans le cas où les v.a.* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *sont i.i.d. et centrées, les processus aléatoires*

$$M_k^2-(k+1)\sigma^2 \quad et \quad M_k^2-M_0^2-k\ \sigma^2 \qquad avec \quad \sigma^2=\mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

*forment des martingales.*

**Exercice 6** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles indépendantes, de moyenne unité (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k)=1$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathbb{P})$*. On note* $\mathcal{F}_k=\sigma(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)$*, la filtration d algèbres associée.*

1. *Montrer que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$M_k=\prod_{l=0}^{k}\epsilon_l=M_{k-1}\times\epsilon_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k$*.*

2. *On notera par la suite* $\sigma_k^2=\mathbb{E}([\epsilon_k-\mathbb{E}(\epsilon_k)]^2)$*, les variances des v.a.* $\epsilon_k$*. Vérifier que le processus aléatoire*

$$[\prod_{l=0}^{k}\epsilon_l^2]-\sum_{l=0}^{k}[\prod_{m=0}^{l-1}\epsilon_m^2]\ \sigma_l^2$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k$*.*

**Exercice 7** *Soit* $((\epsilon_k,\epsilon'_k))_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, indépendantes et centrées (en ce sens où* $\mathbb{E}(\epsilon_k)=0=\mathbb{E}(\epsilon'_k)$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathbb{P})$*. On note*

$$\mathcal{F}_k=\sigma((\epsilon_1,\epsilon'_1),\ldots,(\epsilon_k,\epsilon'_k))$$

*la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(Y'_k)_{0\leq k\leq n}$*, définies par*

$$Y_k=\epsilon_0+\ldots+\epsilon_k \quad \text{et} \quad Y'_k=\epsilon'_0+\ldots+\epsilon'_k$$

1. *Montrer que le compensateur* $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ *du processus produit* $X_k = Y_k Y'_k$, *est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. *En déduire que le processus*

$$[\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\sum_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k)$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k$.

**Exercice 8** *Soit* $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0 \leq k \leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$, *indépendantes et telles que*

$$\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$$

*et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$. *On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

*la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales* $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, *et* $(Y'_k)_{0 \leq k \leq n}$, *définies par*

$$Y_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l \quad \textit{et} \quad Y'_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l$$

1. *Vérifier que la formule*

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_k, \epsilon'_k) =_{\text{déf.}} \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k - \mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k) - 1$$

2. *Montrer que le compensateur* $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ *du processus produit* $X_k = Y_k Y'_k$, *est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

3. *En déduire que le processus*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k$.

**Exercice 9** *Soit* $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans les espaces* $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, *de probabilités de transitions* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, *et de loi initiale* $\eta_0$. *On associe à toute fonction* $f_{k+1}$ *sur* $E_{k+1}$, *la fonction* $M_{k+1}(f_{k+1})$ *sur* $E_k$ *définie par*

$$\forall x_k \in E_k \qquad M_{k+1}(f_{k+1})(x_k) = \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) f(x_{k+1}) = \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k)$$

1. *Soit* $f = (f_k)_{0\leq k\leq n}$ *une famille de fonctions définies sur les espaces* $(E_k)_{0\leq k\leq n}$. *Montrer que le processus*

$$M_k(f) = \sum_{l=1}^{k} \left[f_l(X_l) - K_l(f_l)(X_{l-1})\right]$$

   *est une martingale nulle en l'origine, par rapport à la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_k^X)_{0\leq k\leq n}$ *associée au processus* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$.
2. *Déterminer le compensateur de la martingale* $(M_k(f))_{0\leq k\leq n}$.

**Exercice 10** *Soit* $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles, indépendantes et centrées, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points* $E_k = \{u_k, v_k\}$, *avec*

$$u_k < 0 \leq v_k \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

*On note* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, *avec* $0 \leq k \leq n$, *la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.*

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k\ p_k + v_k\ (1-p_k) = 0$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

   *est une martingale (par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$*) à valeurs dans les espaces*

$$E_k^Y = \{\sum_{l=0}^{k} w_l\ :\ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

3. *Vérifier que le processus* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

**Exercice 11** *Soit* $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles, indépendantes, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points* $E_k = \{u_k, v_k\}$, *avec*

$$u_k < 1 \leq v_k \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

*On note* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, *avec* $0 \leq k \leq n$, *la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.*

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k\ p_k + v_k\ (1-p_k) = 1$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 \times \ldots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

   *est une martingale (par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$*) à valeurs dans les espaces*

$$E_k^Y = \{\prod_{l=0}^{k} w_l\ :\ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\}$$

3. *Vérifier que le processus* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

**Exercice 12** *Soit* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans les espaces* $(E_k)_{0\leq k\leq n}$*, de probabilités de transitions* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$*, et de loi initiale* $\eta_0$*. On associe à toute fonction* $f_n$ *sur* $E_n$*, le processus* $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$\forall 0\leq k\leq n \qquad Z_k(f_n)=\mathbb{E}(f_n(Y_n)\mid Y_k)=M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)(Y_k)$$

*avec la convention* $M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n=Id$*, lorsque* $k=n$*.*

1. *Montrer que* $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ *est une martingale par rapport à la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_k^Y)_{0\leq k\leq n}$ *associée au processus* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*.*
2. *On considère la suite de fonctions* $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ *définies par la formule de récurrence inverse*

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= f_n(y_n) \\ V_k(y_k) &= \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1})\mid Y_k=y_k) \end{aligned}$$

   *Montrer que l'on a*

$$\forall 0\leq k\leq n \qquad V_k=M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)$$

   *En déduire que le processus* $(V_k(Y_k))_{0\leq k\leq n}$ *coïncide avec* $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$*.*