# TD - ESSI2 (option MMDFA)

**Exercice 1** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*, avec*

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = p \in [0, 1]$$

*On conviendra que* $\{\epsilon_k = +1\}$ *représente l'évènement favorable ou le joueur gagne à la* $k^{\text{ième}}$ *séquence de jeu une unité de mise. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$$

*la filtration associée au déroulement du jeux, avec la convention* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*, pour* $k = 0$*. Vérifier que le processus de comptage des succés*

$$M_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

*est une martingale si* $p = 1/2$*, une sur-martingale lorsque* $p \leq 1/2$*, et enfin une sous-martingale lorsque* $p \geq 1/2$*.*

**Solution :**
Il suffit de noter que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)) \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_{k+1}) = (+1)\ p + \ (-1)\ (1-p) = 2p - 1 \end{aligned}$$

On observe que les évènements $\{\epsilon_k = +1\}$ sont plus fréquents dès que $p \geq 1/2$. Dans ce cas, le jeux est alors favorable au joueur. ■

**Exercice 2** *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Montrer que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$M_k = \sum_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$*.*

**Solution :**
Comme dans l'exercice précédent, on note simplement que

$$\mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) \quad = \quad \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)) = 0$$

■

**Exercice 3** *Soit $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. indépendantes, de moyenne unité (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$), et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Vérifier que processus aléatoire $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par le produit*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)$.*

**Solution :**
Il suffit d'observe que l'on a

$$\mathbb{E}(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \quad = \quad \mathbb{E}(M_k \times \epsilon_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k \times \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)) = M_k$$

■

**Exercice 4** *Soit $L_0$, une v.a., et $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$, un couple de martingales définies sur un même espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$. Vérifier que le processus $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini ci-dessous*

$$L_k = L_0 + \sum_{l=1}^{k} M_{l-1} \Delta N_l$$

*est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$.*

**Solution :**
On observe que le processus retardé

$$M'_k = M_{k-1} \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$

est prévisible. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(L_k - L_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(M_{k-1} \Delta N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= M_{k-1} \, \mathbb{E}(\Delta N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= M_{k-1} \, \mathbb{E}(N_k - N_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1} \, [\mathbb{E}(N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - N_{k-1}] = 0
\end{aligned}$$

On obtient donc la propriété de martingale

$$\mathbb{E}(L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = L_{k-1}$$

■

**Exercice 5** *Soit $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, centrées (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k)=0$), et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$. On note $\mathcal{F}_k=\sigma(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)$, la filtration d algèbres associée.*

1. *Vérifier que le processus aléatoire $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$\forall 0\leq k\leq n \qquad M_k=\sum_{l=0}^{k}\epsilon_l=M_{k-1}+\epsilon_k$$

*est une martingale sur $(\Omega,(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n},\mathbb{P})$.*

2. *On notera par la suite $\sigma_k^2=\mathbb{E}(\epsilon_k^2)$, les variances des v.a. $\epsilon_k$. Montrer que*

$$\mathbb{E}([M_{k+1}-M_k]^2\mid\mathcal{F}_k)=\sigma_{k+1}^2$$

*En déduire que les processus aléatoires*

$$\forall 0\leq k\leq n \qquad M_k^2-\sum_{l=0}^{k}\sigma_l^2 \quad et \quad M_k^2-M_0^2-\sum_{l=1}^{k}\sigma_l^2$$

*sont des martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.*

3. *Dans le cas où les v.a. $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ sont i.i.d. et centrées, les processus aléatoires*

$$M_k^2-(k+1)\sigma^2 \quad et \quad M_k^2-M_0^2-k\,\sigma^2 \qquad avec \quad \sigma^2=\mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

*forment des martingales.*

**Solution :**

1. La démonstration de ce premier point est décrite dans la solution de l'exercice 2.
2. On a clairement

$$\mathbb{E}([M_{k+1}-M_k]^2\mid\mathcal{F}_k)=\mathbb{E}(\epsilon_{k+1}^2\mid\sigma(\epsilon_1,\ldots\epsilon_k))=\sigma_{k+1}^2$$

Par conséquent, nous avons

$$\langle M\rangle_k=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}([M_l-M_{l-1}]^2\mid\mathcal{F}_{l-1})=\sum_{l=0}^{k}\sigma_l^2$$

En invoquant la proposition suivante

**Propriétés 0.1** *Soit $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ une martingale réelle définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n},\mathbb{P})$. Le processus aléatoire*

$$M_k^2-\langle M\rangle_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$.*

on en conclut que le processus aléatoires

$$M_k^2 - \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$. Par un raisonnement analogue, on montre que

$$M_k^2 - M_0^2 - (\langle M, N\rangle_k - \langle M, N\rangle_0) = M_k^2 - M_0^2 - \sum_{l=1}^{k} \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

3. Dans le cas où les v.a. $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ sont i.i.d. et centrées, le processus processus croissant associé à la martingale est donné par

$$\langle M\rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2 = (k+1)\sigma^2$$

D'après la question précédente, les processus

$$M_k^2 - (k+1)\sigma^2 \quad \text{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - k\ \sigma^2 \qquad \text{avec} \qquad \sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

forment des martingales par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

**Exercice 6** *Soit $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, de moyenne unité (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$), et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$, la filtration d algèbres associée.*

1. *Montrer que le processus aléatoire $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

*est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.*

2. *On notera par la suite $\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2)$, les variances des v.a. $\epsilon_k$. Vérifier que le processus aléatoire*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l^2] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2]\ \sigma_l^2$$

*est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.*

**Solution :**

1. La démonstration de ce premier point est décrite dans la solution de l'exercice 3.
2. Avant de commencer, on peut noter que l'on a

$$\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2) = \mathbb{E}([\epsilon_k - 1]^2) = \mathbb{E}(\epsilon_k^2) - 1$$

D'autre part, un simple calcul montre que

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_k^2\ [\epsilon_{k+1} - 1]^2 \mid \sigma(\epsilon_1, \ldots \epsilon_k)) = M_k^2\ \sigma_{k+1}^2 = [\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l]\ \sigma_{k+1}^2$$

D'après la proposition 0.1, le processus aléatoire

$$M_k^2 - \langle M \rangle_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l^2 - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2]\ \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

**Exercice 7** *Soit $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, indépendantes et centrées (en ce sens où $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$), et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

*la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, et $(Y'_k)_{0 \leq k \leq n}$, définies par*

$$Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k \quad \text{et} \quad Y'_k = \epsilon'_0 + \ldots + \epsilon'_k$$

1. *Montrer que le compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ du processus produit $X_k = Y_k Y'_k$, est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. *En déduire que le processus*

$$[\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\sum_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k)$$

*est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.*

**Solution :**

1. Par définition du compensateur $(\langle Y, Y'\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$, nous avons

$$\langle Y, Y'\rangle_k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\Delta Y_l \Delta Y'_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. On en conclut que le processus

$$Y_k Y'_k - \langle Y, Y'\rangle_k = [\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\sum_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

**Exercice 8** *Soit $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, indépendantes et telles que*

$$\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$$

*et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

*la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$, et $(Y'_k)_{0\leq k\leq n}$, définies par*

$$Y_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l \quad \textit{et} \quad Y'_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l$$

1. *Vérifier que la formule*

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_k, \epsilon'_k) =_{\text{déf.}} \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k - \mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k) - 1$$

2. *Montrer que le compensateur $(\langle Y, Y'\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$ du processus produit $X_k = Y_k Y'_k$, est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y'\rangle_k = \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

3. *En déduire que le processus*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

*est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.*

**Solution :**

1. On a clairement

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_k, \epsilon'_k) \quad = \quad \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k - \mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}([\epsilon_k - 1][\epsilon'_k - 1]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k) - 1$$

2. Par définition du compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle Y, Y' \rangle_k &= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\Delta Y_l \Delta Y'_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}([Y_{l-1} \times (\epsilon_l - 1)]\ [Y'_{l-1} \times (\epsilon'_l - 1)] \mid \mathcal{F}_{l-1}) \\
&= \sum_{l=0}^{k} [Y_{l-1} Y'_{l-1}] \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1) \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{k=0}^{n} [Y_{l-1} Y'_{l-1}] \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1)) \\
&= \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1))
\end{aligned}$$

3. Par définition du compensateur $\langle Y, Y' \rangle$, on en conclut que le processus

$$Y_k Y'_k - \langle Y, Y' \rangle_k = [\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1))$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

■

**Exercice 9** *Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale $\eta_0$. On associe à toute fonction $f_{k+1}$ sur $E_{k+1}$, la fonction $M_{k+1}(f_{k+1})$ sur $E_k$ définie par*

$$\forall x_k \in E_k \qquad M_{k+1}(f_{k+1})(x_k) = \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) f(x_{k+1}) = \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k)$$

1. *Soit $f = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de fonctions définies sur les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$. Montrer que le processus*

$$M_k(f) = \sum_{l=1}^{k} [f_l(X_l) - K_l(f_l)(X_{l-1})]$$

*est une martingale nulle en l'origine, par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ associée au processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.*

2. *Déterminer le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0 \leq k \leq n}$.*

**Solution :**

1. Il suffit de noter que l'on a

$$\Delta M_k(f) = M_k(f) - M_{k-1}(f) = f_k(X_k) - K_k(f_k)(X_{k-1}) = f_k(X_k) - \mathbb{E}[f_k(X_k) \mid X_{k-1})$$

On en déduit de cette observation que

$$\mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid \mathcal{F}_{k-1}^X) = \mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid X_{k-1}) = 0$$

On en conclut que

$$\mathbb{E}(M_k(f) \mid \mathcal{F}_{k-1}^X) = \sum_{l=1}^{k-1} \Delta M_l(f) + \mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid \mathcal{F}_{k-1}^X) = M_{k-1}(f)$$

2. Le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0\leq k\leq n}$ est donné par la formule

$$\begin{aligned}
\langle M(f)\rangle_k &= \langle M(f), M(f)\rangle_k \\
&= \sum_{l=1}^{k} [\mathbb{E}(M_l(f)M_l(f) \mid \mathcal{F}_{l-1}^X) - M_{l-1}(f)M_{l-1}(f)] \\
&= \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}([\Delta M_l(f)]^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}^X) = \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}([f_l(X_l) - \mathbb{E}[f_l(X_l) \mid X_{l-1})]^2 \mid X_{l-1})
\end{aligned}$$

■

**Exercice 10** *Soit $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes et centrées, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec*

$$u_k < 0 \leq v_k \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

*On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.*

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k\ p_k + v_k\ (1 - p_k) = 0$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

*est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$) à valeurs dans les espaces*

$$E_k^Y = \{\sum_{l=0}^{k} w_l \ :\ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

3. *Vérifier que le processus $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

**Solution :**

1. Les v.a. $\epsilon_k$ étant supposées centrées, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = u_k\ p_k + v_k\ (1-p_k) = 0$$

Autrement dit, les probabilités $p_k$ sont nécessairement données par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad p_k = v_k/[v_k - u_k]$$

On notera que

$$u_k < 0 \leq v_k \Longrightarrow -u_k > 0 \leq v_k \Longrightarrow p_k = v_k/[v_k - u_k] \in [0,1)$$

2. Le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

est clairement à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \{\sum_{l=0}^{k} w_l\ :\ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

Pour vérifier que ce dernier est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$, il suffit de noter que l'on a

$$\mathbb{E}(\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$$

3. On remarque que l'on a

$$Y_k = Y_{k-1} + \epsilon_k \Longrightarrow \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} + u_k \mid Y_{k-1} = y_k) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} + v_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k$$

Par conséquent, $Y_k$ est un processus de Markov de loi initiale

$$\eta_0(y_0) = \mathbb{P}(\epsilon_0 = y_0) == p_0\ 1_{u_0}(y_0) + (1-p_0)\ 1_{v_0}(y_0)$$

et de probabilités de transitions

$$M_k(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}(Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k\ 1_{y_{k-1}+u_k}(y_k) + (1-p_k)\ 1_{y_{k-1}+v_k}(y_k)$$

■

**Exercice 11** *Soit $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec*

$$u_k < 1 \leq v_k \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

*On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.*

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k \; p_k + v_k \; (1 - p_k) = 1$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 \times \ldots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

*est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$) à valeurs dans les espaces*

$$E_k^Y = \{\prod_{l=0}^{k} w_l \; : \; w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\}$$

3. *Vérifier que le processus $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$ est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

**Solution :**

1. Les v.a. $\epsilon_k$ étant supposées telles que $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = u_k \; p_k + v_k \; (1 - p_k) = 1$$

Autrement dit, les probabilités $p_k$ sont nécessairement données par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad p_k = (1 - v_k)/[u_k - v_k]$$

On notera que cette condition exprime le fait que 1 est un barycentre des points $\{u_k, v_k\}$. Cette propriété de ne peut donc être réalisée que si les états du système $\{u_k, v_k\}$ sont tels que

$$u_k < 1 \leq v_k \quad \text{ou} \quad v_k < 1 \leq u_k$$

2. Le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 \times \ldots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

est clairement à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \left\{ \prod_{l=0}^{k} w_l \; : \; w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k \right\} = E_{k-1}^Y . \{u_k, v_k\}$$

Pour vérifier que ce dernier est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$, il suffit de noter que l'on a

$$\mathbb{E}(\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} \times \mathbb{E}([\epsilon_k - 1] \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} \times [\mathbb{E}(\epsilon_k) - 1] = 0$$

3. On remarque que l'on a

$$Y_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k \Longrightarrow \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} u_k \mid Y_{k-1} = y_k) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} v_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k$$

Par conséquent, $Y_k$ est un processus de Markov de loi initiale

$$\eta_0(y_0) = \mathbb{P}(\epsilon_0 = y_0) == p_0\ 1_{u_0}(y_0) + (1-p_0)\ 1_{v_0}(y_0)$$

et de probabilités de transitions

$$M_k(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}(Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k\ 1_{y_{k-1}u_k}(y_k) + (1-p_k)\ 1_{y_{k-1}v_k}(y_k)$$

■

**Exercice 12** *Soit $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0\leq k\leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, et de loi initiale $\eta_0$. On associe à toute fonction $f_n$ sur $E_n$, le processus $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Z_k(f_n) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid Y_k) = M_{k+1}M_{k+2}\dots M_n(f_n)(Y_k)$$

*avec la convention $M_{k+1}M_{k+2}\dots M_n = Id$, lorsque $k = n$.*

1. *Montrer que $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_k^Y)_{0\leq k\leq n}$ associée au processus $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$.*
2. *On considère la suite de fonctions $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ définies par la formule de récurrence inverse*

$$\begin{array}{rcl} V_n(y_n) & = & f_n(y_n) \\ V_k(y_k) & = & \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \end{array}$$

*Montrer que l'on a*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad V_k = M_{k+1}M_{k+2}\dots M_n(f_n)$$

*En déduire que le processus $(V_k(Y_k))_{0\leq k\leq n}$ coïncide avec $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$.*

**Solution :**

1. On a clairement

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Z_k(f_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid \mathcal{F}_k^Y) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) \\ & = & Z_{k-1}(f_n) \end{array}$$

Par conséquent, le processus $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_k^Y)_{0\leq k\leq n}$.

2. D'après les formules de récurrence inverse, nous avons

$$\begin{array}{rcl} V_n(y_n) & = & f_n(y_n) \\ V_{n-1}(y_{n-1}) & = & \mathbb{E}(V_n(Y_n) \mid Y_{n-1} = y_{n-1}) = M_n(V_n)(y_{n-1}) \\ V_{n-2}(y_{n-2}) & = & \mathbb{E}(V_{n-1}(Y_{n-1}) \mid Y_{n-2} = y_{n-2}) = \mathbb{E}(M_n(V_n)(Y_{n-1}) \mid Y_{n-2} = y_{n-2}) \\ & = & M_{n-1}M_n(V_n)(y_{n-2}) \\ \dots & = & \dots \\ V_k(y_k) & = & \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) = \mathbb{E}(M_{k+2}\dots M_n(V_n)(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \\ & = & M_{k+1}M_{k+2}\dots M_n(V_n)(y_k) \end{array}$$

On en conclut que

$$V_k = M_{k+1}M_{k+2}\dots M_n(f_n) \quad \text{et} \quad V_k(Y_k) = M_{k+1}M_{k+2}\dots M_n(f_n)(Y_k) = Z_k(f_n)$$ ■