

TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 Soit $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) , avec

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = p \in [0, 1]$$

On conviendra que $\{\epsilon_k = +1\}$ représente l'évènement favorable ou le joueur gagne à la $k^{\text{ième}}$ séquence de jeu une unité de mise. On note

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$$

la filtration associée au déroulement du jeu, avec la convention $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, pour $k = 0$. Vérifier que le processus de comptage des succès

$$M_k = \sum_{l=1}^k \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale si $p = 1/2$, une sur-martingale lorsque $p \leq 1/2$, et enfin une sous-martingale lorsque $p \geq 1/2$.

Solution :

Il suffit de noter que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_{k+1}) = (+1)p + (-1)(1-p) = 2p - 1 \end{aligned}$$

On observe que les évènements $\{\epsilon_k = +1\}$ sont plus fréquents dès que $p \geq 1/2$. Dans ce cas, le jeu est alors favorable au joueur. ■

Exercice 2 Soit $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. indépendantes, centrées (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$), et définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . Montrer que le processus aléatoire $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$M_k = \sum_{l=0}^k \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$.

Solution :

Comme dans l'exercice précédent, on note simplement que

$$\mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) = 0$$

■

Exercice 3 Soit $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. indépendantes, de moyenne unité (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$), et définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . Vérifier que processus aléatoire $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par le produit

$$M_k = \prod_{l=0}^k \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$.

Solution :

Il suffit d'observer que l'on a

$$\mathbb{E}(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_k \times \epsilon_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k \times \mathbb{E}(\epsilon_{k+1} \mid \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) = M_k$$

■

Exercice 4 Soit L_0 , une v.a., et $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$, un couple de martingales définies sur un même espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$. Vérifier que le processus $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini ci-dessous

$$L_k = L_0 + \sum_{l=1}^k M_{l-1} \Delta N_l$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Solution :

On observe que le processus retardé

$$M'_k = M_{k-1} \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$

est prévisible. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(L_k - L_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(M_{k-1} \Delta N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= M_{k-1} \mathbb{E}(\Delta N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= M_{k-1} \mathbb{E}(N_k - N_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1} [\mathbb{E}(N_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - N_{k-1}] = 0 \end{aligned}$$

On obtient donc la propriété de martingale

$$\mathbb{E}(L_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = L_{k-1}$$

■

Exercice 5 Soit $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, centrées (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$), et définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, la filtration d'algèbres associée.

1. Vérifier que le processus aléatoire $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad M_k = \sum_{l=0}^k \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$.

2. On notera par la suite $\sigma_k^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$, les variances des v.a. ϵ_k . Montrer que

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \sigma_{k+1}^2$$

En déduire que les processus aléatoires

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad M_k^2 - \sum_{l=0}^k \sigma_l^2 \quad \text{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - \sum_{l=1}^k \sigma_l^2$$

sont des martingales par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

3. Dans le cas où les v.a. $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont i.i.d. et centrées, les processus aléatoires

$$M_k^2 - (k+1)\sigma^2 \quad \text{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - k\sigma^2 \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

forment des martingales.

Solution :

- La démonstration de ce premier point est décrite dans la solution de l'exercice 2.
- On a clairement

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(\epsilon_{k+1}^2 \mid \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) = \sigma_{k+1}^2$$

Par conséquent, nous avons

$$\langle M \rangle_k = \sum_{l=0}^k \mathbb{E}([M_l - M_{l-1}]^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^k \sigma_l^2$$

En invoquant la proposition suivante

Propriétés 0.1 Soit $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ une martingale réelle définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$. Le processus aléatoire

$$M_k^2 - \langle M \rangle_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$.

on en conclut que le processus aléatoires

$$M_k^2 - \sum_{l=0}^k \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k . Par un raisonnement analogue, on montre que

$$M_k^2 - M_0^2 - (\langle M, N \rangle_k - \langle M, N \rangle_0) = M_k^2 - M_0^2 - \sum_{l=1}^k \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

3. Dans le cas où les v.a. $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont i.i.d. et centrées, le processus croissant associé à la martingale est donné par

$$\langle M \rangle_k = \sum_{l=0}^k \sigma_l^2 = (k+1)\sigma^2$$

D'après la question précédente, les processus

$$M_k^2 - (k+1)\sigma^2 \quad \text{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - k\sigma^2 \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

forment des martingales par rapport à la filtration \mathcal{F}_k . ■

Exercice 6 Soit $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, de moyenne unité (i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$), et définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, la filtration d'algèbres associée.

1. Montrer que le processus aléatoire $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$M_k = \prod_{l=0}^k \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

2. On notera par la suite $\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2)$, les variances des v.a. ϵ_k . Vérifier que le processus aléatoire

$$\left[\prod_{l=0}^k \epsilon_l^2 \right] - \sum_{l=0}^k \left[\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2 \right] \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

Solution :

1. La démonstration de ce premier point est décrite dans la solution de l'exercice 3.
2. Avant de commencer, on peut noter que l'on a

$$\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2) = \mathbb{E}([\epsilon_k - 1]^2) = \mathbb{E}(\epsilon_k^2) - 1$$

D'autre part, un simple calcul montre que

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_k^2 [\epsilon_{k+1} - 1]^2 \mid \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) = M_k^2 \sigma_{k+1}^2 = \left[\prod_{l=0}^k \epsilon_l \right] \sigma_{k+1}^2$$

D'après la proposition 0.1, le processus aléatoire

$$M_k^2 - \langle M \rangle_k = \prod_{l=0}^k \epsilon_l^2 - \sum_{l=0}^k \left[\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2 \right] \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

■

Exercice 7 Soit $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^2 , indépendantes et centrées (en ce sens où $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$), et définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On note

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \dots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, et $(Y'_k)_{0 \leq k \leq n}$, définies par

$$Y_k = \epsilon_0 + \dots + \epsilon_k \quad \text{et} \quad Y'_k = \epsilon'_0 + \dots + \epsilon'_k$$

1. Montrer que le compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ du processus produit $X_k = Y_k Y'_k$, est donnée par la formule suivante

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^k \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. En déduire que le processus

$$\left[\sum_{l=0}^k \epsilon_l \right] \times \left[\sum_{l=0}^k \epsilon'_l \right] - \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k)$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

Solution :

1. Par définition du compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$, nous avons

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^k \mathbb{E}(\Delta Y_l \Delta Y'_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^k \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. On en conclut que le processus

$$Y_k Y'_k - \langle Y, Y' \rangle_k = \left[\sum_{l=0}^k \epsilon_l \right] \times \left[\sum_{l=0}^k \epsilon'_l \right] - \sum_{l=0}^k \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k . ■

Exercice 8 Soit $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^2 , indépendantes et telles que

$$\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$$

et définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On note

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \dots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, et $(Y'_k)_{0 \leq k \leq n}$, définies par

$$Y_k = \prod_{l=0}^k \epsilon_l \quad \text{et} \quad Y'_k = \prod_{l=0}^k \epsilon'_l$$

1. Vérifier que la formule

$$\text{Cov}(\epsilon_k, \epsilon'_k) =_{\text{déf.}} \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k - \mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k) - 1$$

2. Montrer que le compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ du processus produit $X_k = Y_k Y'_k$, est donnée par la formule suivante

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^k \left[\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m \right] \times \text{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

3. En déduire que le processus

$$\left[\prod_{l=0}^k \epsilon_l \right] \times \left[\prod_{l=0}^k \epsilon'_l \right] - \sum_{l=0}^k \left[\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m \right] \times \text{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k .

Solution :

1. On a clairement

$$\text{Cov}(\epsilon_k, \epsilon'_k) = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k - \mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}([\epsilon_k - 1][\epsilon'_k - 1]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k) - 1$$

2. Par définition du compensateur $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle Y, Y' \rangle_k &= \sum_{l=0}^k \mathbb{E}(\Delta Y_l \Delta Y'_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{l=0}^k \mathbb{E}([Y_{l-1} \times (\epsilon_l - 1)] [Y'_{l-1} \times (\epsilon'_l - 1)] \mid \mathcal{F}_{l-1}) \\ &= \sum_{l=0}^k [Y_{l-1} Y'_{l-1}] \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1) \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{k=0}^n [Y_{l-1} Y'_{l-1}] \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1)) \\ &= \sum_{l=0}^k [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1)) \end{aligned}$$

3. Par définition du compensateur $\langle Y, Y' \rangle$, on en conclut que le processus

$$Y_k Y'_k - \langle Y, Y' \rangle_k = [\prod_{l=0}^k \epsilon_l] \times [\prod_{l=0}^k \epsilon'_l] - \sum_{l=0}^k [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathbb{E}((\epsilon_l - 1)(\epsilon'_l - 1))$$

est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_k . ■

Exercice 9 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η_0 . On associe à toute fonction f_{k+1} sur E_{k+1} , la fonction $M_{k+1}(f_{k+1})$ sur E_k définie par

$$\forall x_k \in E_k \quad M_{k+1}(f_{k+1})(x_k) = \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) f(x_{k+1}) = \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k)$$

1. Soit $f = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de fonctions définies sur les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$. Montrer que le processus

$$M_k(f) = \sum_{l=1}^k [f_l(X_l) - K_l(f_l)(X_{l-1})]$$

est une martingale nulle en l'origine, par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ associée au processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

2. Déterminer le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0 \leq k \leq n}$.

Solution :

1. Il suffit de noter que l'on a

$$\Delta M_k(f) = M_k(f) - M_{k-1}(f) = f_k(X_k) - K_k(f_k)(X_{k-1}) = f_k(X_k) - \mathbb{E}[f_k(X_k) \mid X_{k-1}]$$

On en déduit de cette observation que

$$\mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid \mathcal{F}_{k-1}^X) = \mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid X_{k-1}) = 0$$

On en conclut que

$$\mathbb{E}(M_k(f) \mid \mathcal{F}_{k-1}^X) = \sum_{l=1}^{k-1} \Delta M_l(f) + \mathbb{E}(\Delta M_k(f) \mid \mathcal{F}_{k-1}^X) = M_{k-1}(f)$$

2. Le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0 \leq k \leq n}$ est donné par la formule

$$\begin{aligned} \langle M(f) \rangle_k &= \langle M(f), M(f) \rangle_k \\ &= \sum_{l=1}^k [\mathbb{E}(M_l(f)M_l(f) \mid \mathcal{F}_{l-1}^X) - M_{l-1}(f)M_{l-1}(f)] \\ &= \sum_{l=1}^k \mathbb{E}([\Delta M_l(f)]^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}^X) = \sum_{l=1}^k \mathbb{E}([f_l(X_l) - \mathbb{E}[f_l(X_l) \mid X_{l-1}]]^2 \mid X_{l-1}) \end{aligned}$$

■

Exercice 10 Soit $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes et centrées, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec

$$u_k < 0 \leq v_k \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0, 1)$$

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \dots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.

1. Vérifier la propriété suivante :

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad u_k p_k + v_k (1 - p_k) = 0$$

2. Montrer que le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad Y_k = \epsilon_0 + \dots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$) à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \left\{ \sum_{l=0}^k w_l : w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k \right\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

3. Vérifier que le processus $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$ est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.

Solution :

1. Les v.a. ϵ_k étant supposées centrées, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(\epsilon_k) = u_k p_k + v_k (1 - p_k) = 0$$

Autrement dit, les probabilités p_k sont nécessairement données par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad p_k = v_k / [v_k - u_k]$$

On notera que

$$u_k < 0 \leq v_k \implies -u_k > 0 \leq v_k \implies p_k = v_k / [v_k - u_k] \in [0, 1)$$

2. Le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad Y_k = \epsilon_0 + \dots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

est clairement à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \left\{ \sum_{l=0}^k w_l : w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k \right\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

Pour vérifier que ce dernier est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$, il suffit de noter que l'on a

$$\mathbb{E}(\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$$

3. On remarque que l'on a

$$Y_k = Y_{k-1} + \epsilon_k \implies \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} + u_k \mid Y_{k-1} = y_k) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} + v_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k$$

Par conséquent, Y_k est un processus de Markov de loi initiale

$$\eta_0(y_0) = \mathbb{P}(\epsilon_0 = y_0) = p_0 \mathbf{1}_{u_0}(y_0) + (1 - p_0) \mathbf{1}_{v_0}(y_0)$$

et de probabilités de transitions

$$M_k(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}(Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_{k-1}) = p_k \mathbf{1}_{y_{k-1} + u_k}(y_k) + (1 - p_k) \mathbf{1}_{y_{k-1} + v_k}(y_k)$$

■

Exercice 11 Soit $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec

$$u_k < 1 \leq v_k \quad \mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0, 1)$$

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \dots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.

1. Vérifier la propriété suivante :

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad u_k p_k + v_k (1 - p_k) = 1$$

2. Montrer que le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad Y_k = \epsilon_0 \times \dots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$) à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \left\{ \prod_{l=0}^k w_l : w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k \right\}$$

3. Vérifier que le processus $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$ est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.

Solution :

1. Les v.a. ϵ_k étant supposées telles que $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(\epsilon_k) = u_k p_k + v_k (1 - p_k) = 1$$

Autrement dit, les probabilités p_k sont nécessairement données par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad p_k = (1 - v_k) / [u_k - v_k]$$

On notera que cette condition exprime le fait que 1 est un barycentre des points $\{u_k, v_k\}$. Cette propriété de ne peut donc être réalisée que si les états du système $\{u_k, v_k\}$ sont tels que

$$u_k < 1 \leq v_k \quad \text{ou} \quad v_k < 1 \leq u_k$$

2. Le processus défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad Y_k = \epsilon_0 \times \dots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

est clairement à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \left\{ \prod_{l=0}^k w_l : w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k \right\} = E_{k-1}^Y \cdot \{u_k, v_k\}$$

Pour vérifier que ce dernier est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$, il suffit de noter que l'on a

$$\mathbb{E}(\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} \times \mathbb{E}([\epsilon_k - 1] \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Y_{k-1} \times [\mathbb{E}(\epsilon_k) - 1] = 0$$

3. On remarque que l'on a

$$Y_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k \implies \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} u_k \mid Y_{k-1} = y_k) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = y_{k-1} v_k \mid Y_{k-1} = y_k) = p_k$$

Par conséquent, Y_k est un processus de Markov de loi initiale

$$\eta_0(y_0) = \mathbb{P}(\epsilon_0 = y_0) = p_0 1_{u_0}(y_0) + (1 - p_0) 1_{v_0}(y_0)$$

et de probabilités de transitions

$$M_k(y_{k-1}, y_k) = \mathbb{P}(Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_{k-1}) = p_k 1_{y_{k-1}u_k}(y_k) + (1 - p_k) 1_{y_{k-1}v_k}(y_k)$$

■

Exercice 12 Soit $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η_0 . On associe à toute fonction f_n sur E_n , le processus $(Z_k(f_n))_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad Z_k(f_n) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid Y_k) = M_{k+1}M_{k+2} \dots M_n(f_n)(Y_k)$$

avec la convention $M_{k+1}M_{k+2} \dots M_n = Id$, lorsque $k = n$.

1. Montrer que $(Z_k(f_n))_{0 \leq k \leq n}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_k^Y)_{0 \leq k \leq n}$ associée au processus $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$.
2. On considère la suite de fonctions $(V_k)_{0 \leq k \leq n}$ définies par la formule de récurrence inverse

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= f_n(y_n) \\ V_k(y_k) &= \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \end{aligned}$$

Montrer que l'on a

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad V_k = M_{k+1}M_{k+2} \dots M_n(f_n)$$

En déduire que le processus $(V_k(Y_k))_{0 \leq k \leq n}$ coïncide avec $(Z_k(f_n))_{0 \leq k \leq n}$.

Solution :

1. On a clairement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_k(f_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid \mathcal{F}_k^Y) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}^Y) \\ &= Z_{k-1}(f_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, le processus $(Z_k(f_n))_{0 \leq k \leq n}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_k^Y)_{0 \leq k \leq n}$.

2. D'après les formules de récurrence inverse, nous avons

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= f_n(y_n) \\ V_{n-1}(y_{n-1}) &= \mathbb{E}(V_n(Y_n) \mid Y_{n-1} = y_{n-1}) = M_n(V_n)(y_{n-1}) \\ V_{n-2}(y_{n-2}) &= \mathbb{E}(V_{n-1}(Y_{n-1}) \mid Y_{n-2} = y_{n-2}) = \mathbb{E}(M_n(V_n)(Y_{n-1}) \mid Y_{n-2} = y_{n-2}) \\ &= M_{n-1}M_n(V_n)(y_{n-2}) \\ &\dots = \dots \\ V_k(y_k) &= \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) = \mathbb{E}(M_{k+2} \dots M_n(V_n)(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \\ &= M_{k+1}M_{k+2} \dots M_n(V_n)(y_k) \end{aligned}$$

On en conclut que

$$V_k = M_{k+1}M_{k+2} \dots M_n(f_n) \quad \text{et} \quad V_k(Y_k) = M_{k+1}M_{k+2} \dots M_n(f_n)(Y_k) = Z_k(f_n) \quad \blacksquare$$