TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 *En utilisant un modèle d'arbre, calculer la probabilité des évènements suivants :*
(B_1) *obtenir exactement une fois le chiffre* 6 *lors de* 3 *lancer de dés successifs ;*
(B_2) *obtenir exactement deux fois le chiffre* 6 *lors de* 3 *lancer de dés successifs ;*
(B_3) *obtenir exactement trois fois le chiffre* 6 *lors de* 3 *lancer de dés successifs.*

Exercice 2 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes* $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$*, de même loi de Bernoulli*

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = 1/3$$

Expliter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Exercice 3 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes* $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$*, de lois de Bernoulli*

$$\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

Expliciter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Exercice 4 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne entre les espaces suivants*

$$E_0 = \{1, 2\} \longrightarrow E_1 = \{1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{1, 2\} \longrightarrow E_3 = \{1\} \longrightarrow E_4 = \{1, 2\}$$

On note η_0 *la loi initiale de la chaîne, et l'on désigne par* $M_k(x_{k-1}, x_k)$ *la probabilité de transition d'un état* $x_{k-1} \in E_{k-1}$*, vers un état* $x_k \in E_k$*. Décrire les probabilités pour que le processus* $(X_k)_{0 \leq k \leq 4}$ *suive les trajectoires suivantes*

1. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 1 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 2.$
2. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 3 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1.$
3. $X_0 = 2 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1.$

Exercice 5 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur une période, entre les espaces suivants*

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

1. *Vérifier que cette évolution élémentaire peut être synthétisée par le tableau suivant*

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. *Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques*

$$\begin{array}{rcl} A_0(x_0) & = & X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \end{array}$$

3. *Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace* Ω

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_0^X & = & \{X_0^{-1}(\{x\}) \ : \ x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X & = & \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) \ : \ (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \end{array}$$

4. *Déterminer les algèbres* $\mathcal{F}_k^X$ *engendrées par les partitions* $\mathcal{D}_k^X$*, avec* $k = 0, 1$.
5. *Vérifier les formules suivantes*

$$X_0 = x_0 \quad \text{ et } \quad X_1 = \sum_{i=1}^{2} x_{1,i} \ 1_{\{\omega^i\}}$$

6. *Déterminer la quantité moyenne* $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$. *Pour quelle probabilité* $\mathbb{P}^\star$ *sur* Ω *a-t-on*

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 6 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur deux périodes, entre les espaces*

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}\}$$

et synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1	X_2
ω^1	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,2}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,3}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,4}$

1. *Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques*

$$\begin{array}{rcl} A_0(x_0) & = & X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) & = & (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,1}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,1})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,2}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,2})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,3}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,3})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,4}) & = & (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,4})\}) \end{array}$$

2. *Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace* Ω

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_0^X & = & \{X_0^{-1}(\{x\}) \ : \ x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X & = & \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x,y)\}) \ : \ (x,y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X & = & \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x,y,z)\}) \ : \ (x,y,z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \end{array}$$

3. *Déterminer les algèbres* $\mathcal{F}_k^X$ *engendrées par les partitions* $\mathcal{D}_k^X$*, avec* $k = 0, 1$.
4. *Vérifier les formules suivantes*

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & x_0 \\ X_1 & = & x_{1,1} \ 1_{\{\omega^1, \omega_2\}} + x_{1,2} \ 1_{\{\omega^3, \omega_4\}} \quad \textit{et} \quad X_2 = \sum_{i=1}^{4} \ x_{2,i} \ 1_{\omega^i} \end{array}$$

5. *Déterminer les quantités moyennes*

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X)$$

6. *Existe-t-il une probabilité* $\mathbb{P}^\star$ *sur* Ω *telle que*

$$\mathbb{E}^\star(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 7 *On considère l'évolution markovienne* $(X_k)_{k=0,1,2,3}$ *sur trois périodes décrites par l'arbre des épreuves suivant*

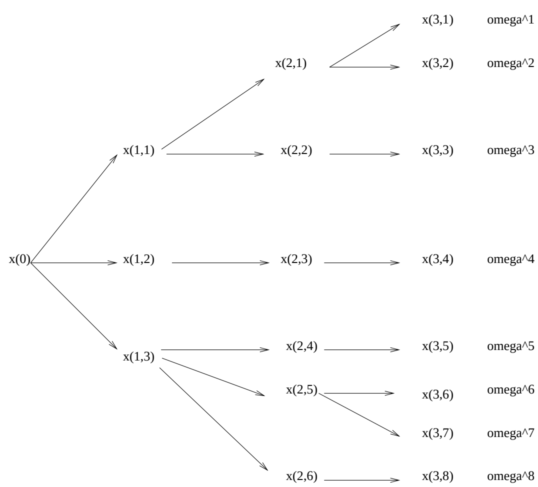

FIG. 1 –

1. *Déterminer les évènements* $A_{i,j}$ *pour lesquels les décompositions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0\ , \qquad X_1 = \sum_{i=1}^{3} x_{1,i}\ 1_{A_{1,i}} \\ X_2 &= \sum_{i=1}^{6} x_{2,i}\ 1_{A_{2,i}}\ , \quad \textit{et} \quad X_3 = \sum_{i=1}^{8}\ x_{3,i}\ 1_{A_{3,i}} \end{aligned}$$

Déterminer les décompositions $(\mathcal{D}_k^X)_{k=0,1,2,3}$ *définies par*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\})\ :\ x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x,y)\})\ :\ (x,y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x,y,z)\})\ :\ (x,y,z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \\ \mathcal{D}_3^X &= \{(X_0, X_1, X_2, X_3)^{-1}(\{(x,y,z,t)\})\ :\ (x,y,z,t) \in (E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3)\} \end{aligned}$$

avec les espaces d'états

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,i}\ i = 1,2,3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i},\ i = 1, \ldots, 6\}$$

$$\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i},\ i = 1, \ldots, 8\}$$

2. *Determiner les probabilités suivantes en fonction des probabilités des évènements élémentaires* ω^i.

$$\begin{array}{r|l} \mathbb{P}(X_3 = x_{3,1}|X_2 = x_{2,1}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,1}|X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,2}|X_2 = x_{2,1}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,2}|X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,6}|X_2 = x_{2,5}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,4}|X_1 = x_{1,3}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,7}|X_2 = x_{2,5}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,5}|X_1 = x_{1,3})\ , \qquad \mathbb{P}(X_2 = x_{2,6}|X_1 = x_{1,3}) \end{array}$$

et enfin

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1}|X_0 = x_0) \qquad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2}|X_0 = x_0) \qquad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,3}|X_0 = x_0)$$

3. *On note* $\mathcal{F}_k^X$ *les algèbres engendrées par les décompositions* $\mathcal{D}_k^X$, *avec la séquence d'indices* $k = 0,1,2,3$. *Déterminer les espérances conditionnelles*

$$\mathbb{E}(X_3|\mathcal{F}_2^X), \quad \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X)$$

4. *Existe-t-il une probabilité* $\mathbb{P}^\star$ *sur* Ω *telle que*

$$\mathbb{E}^\star(X_3|\mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^\star(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 8 *Soit* $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans les espaces* $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, *de probabilités de transitions* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, *et de loi initiale* η_0. *On rappelle qu'une mesure de probabilités* μ_k *sur* E_k *est une suite de nombres* $(\mu_k(x_k))_{x_k \in E_k} \in [0,1]$ *telle que* $\sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) = 1$. *On associe à une telle mesure* μ_k *sur* E_k, *la mesure* $(\mu_k M_{k+1})$ *sur* E_{k+1} *définie par*

$$\forall x_{k+1} \in E_{k+1} \qquad (\mu_k M_{k+1})(x_{k+1}) = \sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) M_{k+1}(x_k, x_{k+1})$$

1. *Vérifier que l'on a*

$$(\mu_k M_{k+1})M_{k+2} = \mu_k(M_{k+1}M_{k+2})$$

avec la probabilité de transition $(M_{k+1}M_{k+2})$ *de* E_k *vers* E_{k+2} *définie par la formule*

$$\begin{aligned}(M_{k+1}M_{k+2})(x_k, x_{k+2}) &= \sum_{x_{k+1}\in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1})M_{k+2}(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+2} = x_{k+2} \mid X_k = x_k)\end{aligned}$$

2. *Plus généralement, on note* $(M_{k+1}\ldots M_{k+l})$ *la probabilité de transition de* E_k *vers* E_{k+l} *définie par la formule*

$$(M_{k+1}\ldots M_{k+l})(x_k, x_{k+l})$$

$$= \textstyle\sum_{x_{k+1}\in E_{k+1},\ldots,x_{k+l-1}\in E_{k+l-1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1})\ldots M_{k+l}(x_{k+l-1}, x_{k+l})$$

$$= \mathbb{P}(X_{k+l} = x_{k+l} \mid X_k = x_k)$$

Vérifier que l'on a

$$\begin{aligned}\forall x_k \in E_k \qquad \eta_k(x_k) &= {}_{\text{déf.}}\mathbb{P}(X_k = x_k) \\ &= \eta_0(M_1\ldots M_k)(x_k) \\ &= (\eta_0 M_1)(M_2\ldots M_k)(x_k) \\ &= ((\eta_0 M_1)M_2)(M_3\ldots M_k)(x_k) \\ &= \ldots \\ &= ((\ldots((\eta_0 M_1)M_2)\ldots M_{k-1})M_k)(x_k)\end{aligned}$$

3. *On associe à une fonction* $f_{k+1} \in \mathbb{R}^{E_{k+1}}$*, la fonction* $M_k(f_{k+1}) \in \mathbb{R}^{E_k}$ *définie par*

$$\begin{aligned}M_k(f_{k+1})(x_k) &= \sum_{x_{k+1}\in E_{k+1}} M_k(x_k, x_{k+1})\ f_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k)\end{aligned}$$

Montrer que pour toute fonction $f_{k+l} \in \mathbb{R}^{E_{k+l}}$*, nous avons*

$$\mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l}) \mid X_k = x_k) = (M_{k+1}\ldots M_{k+l})(f_{k+l})(x_k)$$

En déduire que

$$\begin{aligned}\eta_{k+l}(f_{k+l}) &=_{\text{déf.}} \mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l})) \\ &= [\eta_k(M_{k+1}\ldots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_k[(M_{k+1}\ldots M_{k+l})(f_{k+l})] \\ &= [\eta_0(M_1\ldots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_0[(M_1\ldots M_{k+l})(f_{k+l})]\end{aligned}$$

Exercice 9 *Soit* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans un espace homogène et fini* $E=\{x_1,\ldots,x_d\}$*, de probabilités de transitions* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$*, et de loi initiale* μ_0*. Dans ce contexte, les probabilités de transitions sont données par les matrices*

$$M_k=\left(\begin{array}{ccc} M_k(x_1,x_1) & \ldots & M_k(x_1,x_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_k(x_d,x_1) & \ldots & M_k(x_d,x_d) \end{array}\right)$$

On identifie les mesures de probabilités μ*, et les fonctions* f *sur* E *aux vecteurs lignes et colonnes suivants*

$$\mu=[\mu(x_1),\ldots,\mu(x_d)] \quad \text{et} \quad f=\left[\begin{array}{c} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{array}\right]$$

1. *Vérifier les formules matricielles suivantes*

$$\forall x_i,x_j\in E \qquad \mathbb{P}(X_{k+l}=x_j \mid X_k=x_i)=(M_{k+1}\ldots M_{k+l})(x_i,x_j)$$

et

$$\forall f\in\mathbb{R}^E \quad \forall x_i\in E \quad \mathbb{E}(f(X_{k+l}) \mid X_k=x_i)=[M_{k+1}\ldots M_{k+l}f](x_i)$$

et enfin

$$\forall f\in\mathbb{R}^E \qquad \mathbb{E}(f(X_k))=\eta_0 M_1\ldots M_k f$$

Exercice 10 *On considère une chaîne de Markov homogène sur un espace à deux points* $E=\{1,2\}$*, et associée à la matrice de transition* $M=\left(\begin{array}{cc} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2}\end{array}\right)$. *Les entrées* $p_{i,j}\in[0,1]$ *sont telles que* $p_{1,1}+p_{1,2}=1=p_{2,1}+p_{2,1}$*. On conviendra que* $c=p_{1,2}+p_{2,1}>0$*. Montrer (par réccurrence sur le paramètre temporel) que les itérées* M^n *de la matrice* M *sont données par la formule*

$$M^n=\frac{1}{c}\left(\begin{array}{cc} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2}\end{array}\right)+\frac{(1-c)^n}{c}\left(\begin{array}{cc} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1}\end{array}\right) \tag{1}$$

Exercice 11 *Soit* $(X'_k)_{0\leq k\leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans les espaces* $(E'_k)_{0\leq k\leq n}$*, de probabilités de transitions* $(M'_k)_{0\leq k\leq n}$*, et de loi initiale* η'_0*. On note* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *le processus historique de* $(X'_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$X_k=(X'_0,\ldots,X'_k)$$

1. *Vérifier que* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une chaîne de Markov à valeurs dans les espaces produits*

$$E_k=(E'_0,\ldots,E'_k)$$

2. *Décrire les probabilités de transitions de* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$*.*

Exercice 12 *On considère une marche aléatoire $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$, d'origine $X_0 = 0$ et de probabilités de transitions homogènes*

$$M(x,y) \quad = \quad \alpha\ 1_{x+1}(y)\ +\ (1-\alpha)\ 1_{x-1}(y) \quad \textit{avec} \quad \alpha \in [0,1]$$

1. *Décrire l'arbre des épreuves associé au processus $(X_k)_{0\leq k\leq n}$.*
2. *Montrer que la position moyenne de la particule au temps n est donnée par la formule*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(X_k) = k \times (2\alpha - 1)$$

3. *Vérifier que les transitions de la chaîne entre deux instants, l et $(l+m) \leq n$, sont données par la formule*

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k - (m-k)] \mid X_l = x) = C_m^k\ \alpha^k\ (1-\alpha)^{m-k}$$

pour tous les $k \in \{0, \ldots, m\}$, et

$$\mathbb{P}(X_{l+m} \not\in \{2k - m\ :\ k = 0, \ldots, m\} | X_l = x) = 0$$

4. *En déduire que*

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = \frac{(2k)!}{k!k!}\ (\alpha(1-\alpha))^k$$

En utilisant la formule de Stirling ($k! \simeq \sqrt{2\pi k}\ k^k\ e^{-k}$), montrer que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1-\alpha))^k}{\sqrt{\pi k}}\ \left(= 1/\sqrt{\pi k}\ \text{ si } \alpha = 1/2\right)$$

Exercice 13 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, une promenade aléatoire sur $\mathbb{R}$, associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ indépendantes*

$$X_k = \sum_{p=0}^{k} \epsilon_p = X_{k-1} + \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Exercice 14 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, une promenade aléatoire sur $\mathbb{R}$, associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ indépendantes*

$$X_k = \prod_{p=0}^{k} \epsilon_p = X_{k-1} \times \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.