

TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 En utilisant un modèle d'arbre, calculer la probabilité des évènements suivants :

- (B_1) obtenir exactement une fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs ;
- (B_2) obtenir exactement deux fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs ;
- (B_3) obtenir exactement trois fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs.

Solution :

On représente les échecs ou les succès des trois lancers par trois v.a. de Bernoulli indépendantes

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1/6 \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

Pour calculer $\mathbb{P}(B_1)$, on utilise le modèle d'arbre binomial donné par la figure suivante

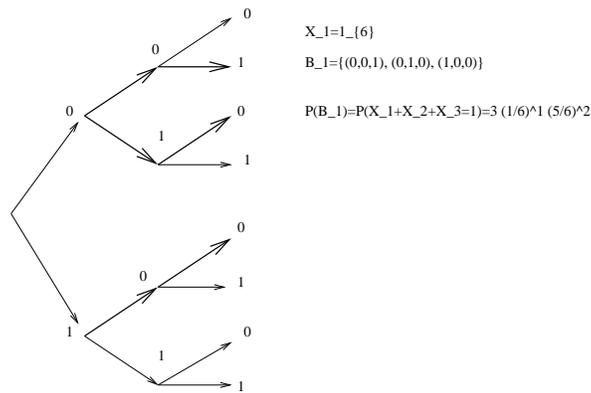
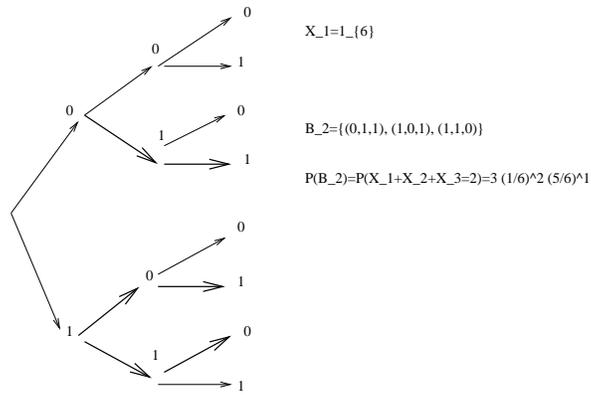


FIG. 1 – Chemins dans B_1

Pour calculer $\mathbb{P}(B_2)$, on utilise le modèle d'arbre binomial

FIG. 2 – Chemins dans B_2

Enfin, pour calculer $\mathbb{P}(B_3)$, on note simplement que

$$\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = (1/6)^3$$

■

Exercice 2 Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, de même loi de Bernoulli

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = 1/3$$

Expliquer l'espace des évènements associé à ce modèle.

Solution :

L'arbre des épreuves est donné par

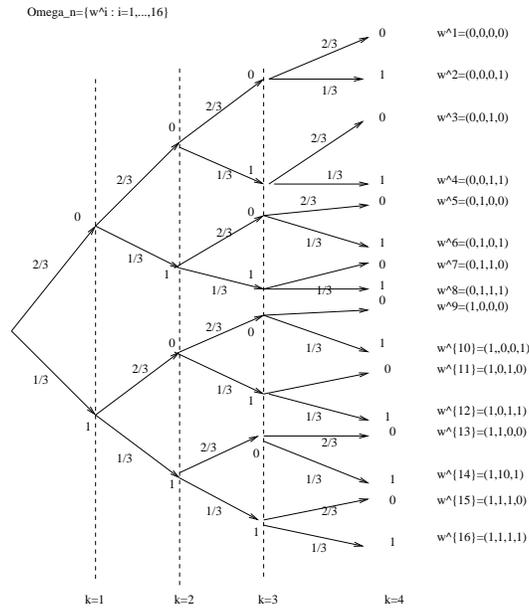


FIG. 3 – Arbre binomial

L'espace des épreuves associé à ce modèle binomial sur 4 périodes correspond à l'ensemble produit

$$\Omega = \{0, 1\}^{\{1,2,3,4\}} = \{\omega^i : i = 1, \dots, 16\}$$

■

Exercice 3 Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, de lois de Bernoulli

$$\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

Expliciter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Solution :

L'arbre des épreuves est donné par

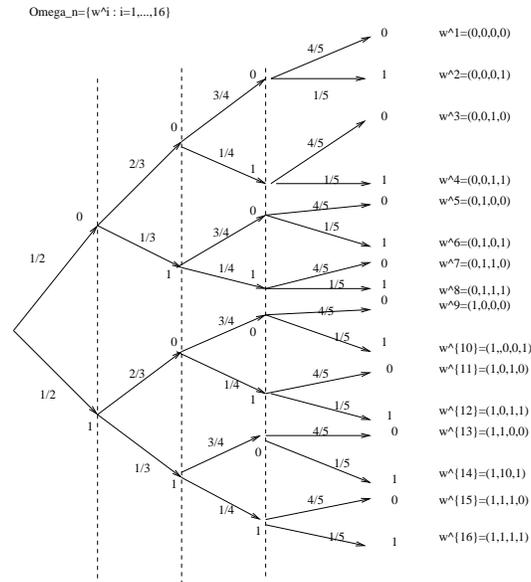


FIG. 4 – Arbre binomial

L'espace des épreuves associé à ce modèle binomial sur 4 périodes correspond à l'ensemble produit

$$\Omega = \{0, 1\}^{\{1,2,3,4\}} = \{\omega^i : i = 1, \dots, 16\}$$

■

Exercice 4 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne entre les espaces suivants

$$E_0 = \{1, 2\} \longrightarrow E_1 = \{1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{1, 2\} \longrightarrow E_3 = \{1\} \longrightarrow E_4 = \{1, 2\}$$

On note η_0 la loi initiale de la chaîne, et l'on désigne par $M_k(x_{k-1}, x_k)$ la probabilité de transition d'un état $x_{k-1} \in E_{k-1}$, vers un état $x_k \in E_k$. Décrire les probabilités pour que le processus $(X_k)_{0 \leq k \leq 4}$ suive les trajectoires suivantes

1. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 1 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 2$.
2. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 3 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1$.
3. $X_0 = 2 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1$.

Solution :

L'arbre des épreuves peut être décrit par un raisonnement similaire à ceux utilisés dans les exercices précédents. On a aussi clairement

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 2) = M_1(1, 2)M_2(2, 1)M_3(1, 1)M_4(1, 2)$$

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 1) = M_1(1, 3)M_2(3, 2)M_3(2, 1)M_4(1, 1)$$

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 1) = M_1(1, 2)M_2(2, 2)M_3(2, 1)M_4(1, 1)$$

■

Exercice 5 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur une période, entre les espaces suivants

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

1. Vérifier que cette évolution élémentaire peut être synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. Expliciter un espace des événements, et les événements cylindriques

$$\begin{aligned} A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \end{aligned}$$

3. Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \end{aligned}$$

4. Déterminer les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$.

5. Vérifier les formules suivantes

$$X_0 = x_0 \quad \text{et} \quad X_1 = \sum_{i=1}^2 x_{1,i} 1_{\{\omega^i\}}$$

6. Déterminer la quantité moyenne $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$. Pour quelle probabilité \mathbb{P}^* sur Ω a-t-on

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Solution :

1. L'arbre des épreuves associé à l'évolution markovienne sur une période

$$X_0 = x_0 \in E_0 = \{x_0\} \longrightarrow X_1 \in E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

est donné par la figure suivante.

$$\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$$

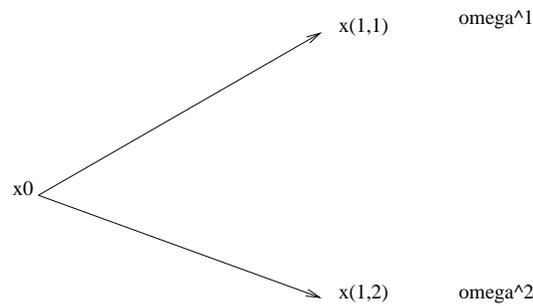


FIG. 5 –

Cette évolution markovienne correspond au tableau suivant

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. Les événements cylindriques sur l'espace $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) = \{\omega^1, \omega^2\} = \Omega \\ A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) = \{\omega^1\} \\ A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) = \{\omega^2\} \end{aligned}$$

3. Les décompositions de l'espace Ω sont décrites par

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} = \{\Omega\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} = \{\{\omega^1\}, \{\omega^2\}\}\end{aligned}$$

4. Les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$, sont données par

$$\mathcal{F}_0^X = \{\Omega, \emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1^X = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\}$$

5. Immédiat. Il suffit en effet de noter que l'on a

$$\forall \omega \in \Omega = \{\omega^1, \omega^2\} \quad X_0(\omega) = x_0$$

et

$$X_1(\omega) = \sum_{i=1}^2 x_{1,i} 1_{\{\omega^i\}}(\omega) = \begin{cases} x_{1,1} & \text{si } \omega = \omega^1 \\ x_{1,2} & \text{si } \omega = \omega^2 \end{cases}$$

6. La quantité moyenne $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) &= \mathbb{E}(X_1) \\ &= x_{1,1} \mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} | X_0 = x_0) + x_{1,2} \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} | X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{E}(X_1) = x_{1,1} \mathbb{P}(\{\omega^1\}) + x_{1,2} \mathbb{P}(\{\omega^2\})\end{aligned}$$

Pour trouver la probabilité \mathbb{P}^* il suffit de résoudre l'équation

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0 &\iff x_{1,1} \mathbb{P}(\{\omega^1\}) + x_{1,2} \mathbb{P}(\{\omega^2\}) = x_0 \\ &\iff x_{1,1} \mathbb{P}(\{\omega^1\}) + x_{1,2} (1 - \mathbb{P}(\{\omega^1\})) = x_0\end{aligned}$$

Il est clair que cette équation admet une solution si, et seulement si, nous avons

$$x_{1,1} < x_0 < x_{1,2} \quad \text{ou} \quad x_{1,2} < x_0 < x_{1,1}$$

Dans ces deux situations, \mathbb{P}^* est donnée par

$$\mathbb{P}(\{\omega^1\}) = \frac{x_0 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{\omega^2\}) = \frac{x_{1,1} - x_0}{x_{1,1} - x_{1,2}}$$

■

Exercice 6 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur deux périodes, entre les espaces

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}\}$$

et synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1	X_2
ω^1	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,2}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,3}$
ω^4	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,4}$

1. Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques

$$\begin{aligned}
 A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) \\
 A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\
 A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \\
 A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,1}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,1})\}) \\
 A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,2}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,2})\}) \\
 A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,3}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,3})\}) \\
 A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,4}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,4})\})
 \end{aligned}$$

2. Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\
 \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \\
 \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x, y, z)\}) : (x, y, z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\}
 \end{aligned}$$

3. Déterminer les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$.

4. Vérifier les formules suivantes

$$\begin{aligned}
 X_0 &= x_0 \\
 X_1 &= x_{1,1} 1_{\{\omega^1, \omega_2\}} + x_{1,2} 1_{\{\omega^3, \omega_4\}} \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{i=1}^4 x_{2,i} 1_{\omega^i}
 \end{aligned}$$

5. Déterminer les quantités moyennes

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X)$$

6. Existe-t-il une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Solution :

L'arbre des épreuves correspondant à ce modèle est décrit dans la figure suivante.

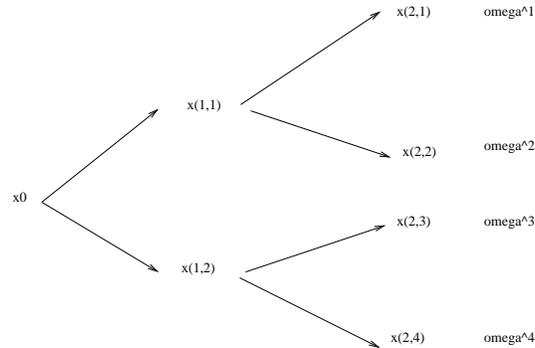


FIG. 6 – Arbre binomial

1. Sur l'espace des évènements $\Omega = \{\omega^i, i = 1, 2, 3, 4\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) = \Omega \\
A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) = \{\omega^1, \omega^2\} \\
A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) = \{\omega^3, \omega^4\} \\
A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,1}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,1})\}) = \{\omega^1\} \\
A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,2}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,2})\}) = \{\omega^2\} \\
A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,3}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,3})\}) = \{\omega^3\} \\
A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,4}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,4})\}) = \{\omega^4\}
\end{aligned}$$

2. Les décompositions \mathcal{D}_k^X de Ω sont données par

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0^X &= \{\Omega\} \\
\mathcal{D}_1^X &= \{\{\omega^1, \omega^2\}, \{\omega^3, \omega^4\}\} \\
\mathcal{D}_2^X &= \{\{\omega^1\}, \{\omega^2\}, \{\omega^3\}, \{\omega^4\}\}
\end{aligned}$$

3. Les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , sont décrites ci-après

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0^X &= \{\emptyset, \Omega\} \\
\mathcal{F}_1^X &= \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1, \omega^2\}, \{\omega^3, \omega^4\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2^X = \mathcal{P}(\Omega)
\end{aligned}$$

4. Immédiat. Il suffit en effet de noter que pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned}
X_0(\omega) &= x_0 \\
X_1(\omega) &= x_{1,1} 1_{\{\omega^1, \omega^2\}}(\omega) + x_{1,2} 1_{\{\omega^3, \omega^4\}}(\omega) \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{i=1}^4 x_{2,i} 1_{\omega^i}(\omega)
\end{aligned}$$

5. Par construction, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) &= \mathbb{E}(X_1) \\
&= x_{1,1} \mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} | X_0 = x_0) + x_{1,2} \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} | X_0 = x_0) \\
&= x_{1,1} \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\}) + x_{1,2} \mathbb{P}(\{\omega^3, \omega^4\}) \\
\mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X) &= \mathbb{E}(X_2 | X_1 = x_{1,1}) 1_{\{\omega^1, \omega^2\}} + \mathbb{E}(X_2 | X_1 = x_{1,2}) 1_{\{\omega^3, \omega^4\}} \\
&= (x_{2,1} \mathbb{P}(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{2,2} \mathbb{P}(\{\omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2\})) 1_{\{\omega^1, \omega^2\}} \\
&\quad + (x_{2,3} \mathbb{P}(\{\omega^3\} | \{\omega^3, \omega^4\}) + x_{2,4} \mathbb{P}(\{\omega^4\} | \{\omega^3, \omega^4\})) 1_{\{\omega^3, \omega^4\}}
\end{aligned}$$

6. Pour quelle probabilité \mathbb{P}^* sur Ω a-t-on

$$\mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

D'après la question précédente, la condition $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1$ est équivalente au fait que

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= x_{2,1} \mathbb{P}^*(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{2,2} \mathbb{P}^*(\{\omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2\}) \\ &= x_{2,1} \mathbb{P}^*(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{2,2} (1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\})) \\ x_{1,2} &= x_{2,3} \mathbb{P}^*(\{\omega^3\} | \{\omega^3, \omega^4\}) + x_{2,4} \mathbb{P}^*(\{\omega^4\} | \{\omega^3, \omega^4\}) \\ &= x_{2,3} \mathbb{P}^*(\{\omega^3\} | \{\omega^3, \omega^4\}) + x_{2,4} (1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^3\} | \{\omega^3, \omega^4\})) \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'exercice 5 ces équations admettent une solution si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$1) \quad x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2} \quad \text{ou} \quad x_{2,2} < x_{1,1} < x_{2,1}$$

et

$$2) \quad x_{2,3} < x_{1,2} < x_{2,4} \quad \text{ou} \quad x_{2,4} < x_{1,2} < x_{2,3}$$

Dans ces conditions, nous avons

$$\mathbb{P}^*(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) = \frac{x_{1,1} - x_{2,2}}{x_{2,1} - x_{2,2}} = 1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2\})$$

et

$$\mathbb{P}^*(\{\omega^3\} | \{\omega^3, \omega^4\}) = \frac{x_{1,2} - x_{2,4}}{x_{2,3} - x_{2,4}} = 1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^4\} | \{\omega^3, \omega^4\})$$

Il nous reste à noter que la condition $\mathbb{E}^*(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$ est équivalente au fait que

$$x_0 = x_{1,1} \mathbb{P}^*(\{\omega^1, \omega^2\}) + x_{1,2} (1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^1, \omega^2\}))$$

Comme précédemment, cette équation admet une solution si, et seulement si, nous avons

$$3) \quad x_{1,1} < x_0 < x_{1,2} \quad \text{ou} \quad x_{1,2} < x_0 < x_{1,1}$$

Dans ce cas, on obtient

$$\mathbb{P}^*(\{\omega^1, \omega^2\}) = \frac{x_0 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} = 1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^3, \omega^4\})$$

Lorsque les trois conditions 1), 2), 3) sont vérifiées, on obtient aisément les valeurs de \mathbb{P}^* . On a par exemple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(\{\omega^1\}) &= \mathbb{P}^*(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) \times \mathbb{P}^*(\{\omega^1, \omega^2\}) \\ &= \frac{x_{1,1} - x_{2,2}}{x_{2,1} - x_{2,2}} \times \frac{x_0 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} \end{aligned}$$

■

Exercice 7 On considère l'évolution markovienne $(X_k)_{k=0,1,2,3}$ sur trois périodes décrites par l'arbre des épreuves suivant

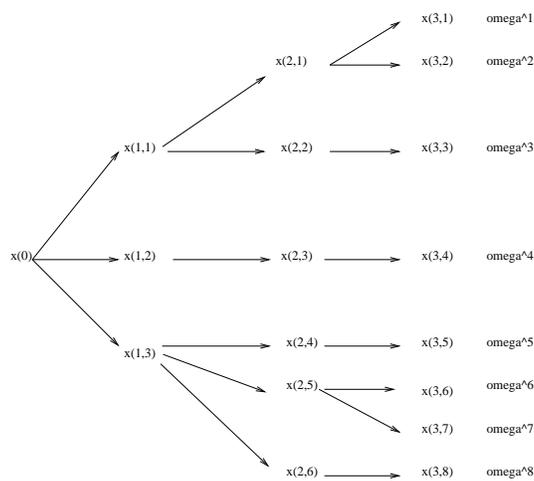


FIG. 7 –

1. Déterminer les évènements $A_{i,j}$ pour lesquels les décompositions suivantes sont satisfaites :

$$X_0 = x_0, \quad X_1 = \sum_{i=1}^3 x_{1,i} 1_{A_{1,i}}$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^6 x_{2,i} 1_{A_{2,i}}, \quad \text{et} \quad X_3 = \sum_{i=1}^8 x_{3,i} 1_{A_{3,i}}$$

Déterminer les décompositions $(\mathcal{D}_k^X)_{k=0,1,2,3}$ définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x, y, z)\}) : (x, y, z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \\ \mathcal{D}_3^X &= \{(X_0, X_1, X_2, X_3)^{-1}(\{(x, y, z, t)\}) : (x, y, z, t) \in (E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3)\} \end{aligned}$$

avec les espaces d'états

$$\begin{aligned} E_0 &= \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,i} \ i = 1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i}, \ i = 1, \dots, 6\} \\ &\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i}, \ i = 1, \dots, 8\} \end{aligned}$$

2. Déterminer les probabilités suivantes en fonction des probabilités des évènements élémentaires ω^i .

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(X_3 = x_{3,1} | X_2 = x_{2,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,2} | X_2 = x_{2,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,6} | X_2 = x_{2,5}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,7} | X_2 = x_{2,5}) \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbb{P}(X_2 = x_{2,1} | X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,2} | X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,4} | X_1 = x_{1,3}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,5} | X_1 = x_{1,3}) \end{array} \right., \quad \mathbb{P}(X_2 = x_{2,6} | X_1 = x_{1,3})$$

et enfin

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} | X_0 = x_0) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} | X_0 = x_0) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,3} | X_0 = x_0)$$

3. On note \mathcal{F}_k^X les algèbres engendrées par les décompositions \mathcal{D}_k^X , avec la séquence d'indices $k = 0, 1, 2, 3$. Déterminer les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}(X_3 | \mathcal{F}_2^X), \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$$

4. Existe-t-il une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_3 | \mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Solution :

1. Par construction de l'espace des aléas, nous avons les décompositions suivantes

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_1 &= x_{1,1} 1_{\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}} + x_{1,2} 1_{\{\omega^4\}} + x_{1,3} 1_{\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}} \\ X_2 &= x_{2,1} 1_{\{\omega^1, \omega^2\}} + x_{2,2} 1_{\{\omega^3\}} + x_{2,3} 1_{\{\omega^4\}} \\ &\quad + x_{2,4} 1_{\{\omega^5\}} + x_{2,5} 1_{\{\omega^6, \omega^7\}} + x_{2,6} 1_{\{\omega^8\}} \\ X_3 &= \sum_{i=1}^8 x_{3,i} 1_{\{\omega^i\}} \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{\Omega\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}, \{\omega^4\}, \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{\{\omega^1, \omega^2\}, \{\omega^3\}, \{\omega^4\}, \{\omega^5\}, \{\omega^6, \omega^7\}, \{\omega^8\}\} \\ \mathcal{D}_3^X &= \{\{\omega^1\}, \{\omega^2\}, \{\omega^3\}, \{\omega^4\}, \{\omega^5\}, \{\omega^6\}, \{\omega^7\}, \{\omega^8\}\} \end{aligned}$$

avec les espaces d'états

$$\begin{aligned} E_0 &= \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,i} \mid i = 1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i} \mid i = 1, \dots, 6\} \\ &\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i} \mid i = 1, \dots, 8\} \end{aligned}$$

2. En utilisant les décompositions précédentes, on montre que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = x_{3,1}|X_2 = x_{2,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,2}|X_2 = x_{2,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2\}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,6}|X_2 = x_{2,5}) &= \mathbb{P}(\{\omega^6\} | \{\omega^6, \omega^7\}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,7}|X_2 = x_{2,5}) &= \mathbb{P}(\{\omega^7\} | \{\omega^6, \omega^7\})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = x_{2,1}|X_1 = x_{1,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,2}|X_1 = x_{1,1}) &= \mathbb{P}(\{\omega^3\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,4}|X_1 = x_{1,3}) &= \mathbb{P}(\{\omega^5\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,5}|X_1 = x_{1,3}) &= \mathbb{P}(\{\omega^6, \omega^7\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \\ \mathbb{P}(X_2 = x_{2,6}|X_1 = x_{1,3}) &= \mathbb{P}(\{\omega^8\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1}|X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2}|X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(\{\omega^4\}) \\ \mathbb{P}(X_1 = x_{1,3}|X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})\end{aligned}$$

3. L'espérance conditionnelle de la v.a. X_3 en \mathcal{F}_2^X est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3|\mathcal{F}_2^X) \\ &= \mathbb{E}(X_3|X_2) \\ &= \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,1}) 1_{\{\omega^1, \omega^2\}} + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,2}) 1_{\{\omega^3\}} \\ &\quad + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,3}) 1_{\{\omega^4\}} + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,4}) 1_{\{\omega^5\}} \\ &\quad + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,5}) 1_{\{\omega^6, \omega^7\}} + \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,6}) 1_{\{\omega^8\}}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,1}) &= \sum_{i \in \{1,2\}} x_{3,i} \mathbb{P}(X_3 = x_{3,i}|X_2 = x_{2,1}) \\ &= x_{3,1} \times \mathbb{P}(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{3,2} \times \mathbb{P}(\{\omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2\}) \\ \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,2}) &= x_{3,2} \\ \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,3}) &= x_{3,4} \\ \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,4}) &= x_{3,5} \\ \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,5}) &= \sum_{i \in \{6,7\}} x_{3,i} \mathbb{P}(X_3 = x_{3,i}|X_2 = x_{2,5}) \\ &= x_{3,6} \times \mathbb{P}(\{\omega^6\} | \{\omega^6, \omega^7\}) + x_{3,7} \times \mathbb{P}(\{\omega^7\} | \{\omega^6, \omega^7\}) \\ \mathbb{E}(X_3|X_2 = x_{2,6}) &= x_{3,8}\end{aligned}$$

L'espérance conditionnelle de la v.a. X_2 en \mathcal{F}_1^X est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1^X) &= \mathbb{E}(X_2|X_1) \\ &= \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,1}) 1_{\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}} + \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,2}) 1_{\{\omega^4\}} \\ &\quad + \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,3}) 1_{\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,1}) &= \sum_{i \in \{1,2\}} x_{2,i} \mathbb{P}(X_2 = x_{2,i} | X_1 = x_{1,1}) \\ &= x_{2,1} \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) + x_{2,2} \mathbb{P}(\{\omega^3\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ \mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,2}) &= x_{2,3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_{1,3}) &= \sum_{i \in \{4,5,6\}} x_{2,i} \mathbb{P}(X_2 = x_{2,i} | X_1 = x_{1,3}) \\ &= x_{2,4} \mathbb{P}(\{\omega^5\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) + x_{2,5} \mathbb{P}(\{\omega^6\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \\ &\quad + x_{2,6} \mathbb{P}(\{\omega^8\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})\end{aligned}$$

Afin l'espérance conditionnelle de la v.a. X_1 en \mathcal{F}_0^X est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) &= \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0^X) \\ &= \sum_{i \in \{1,2,3\}} x_{1,i} \mathbb{P}(X_1 = x_{1,i} | X_0 = x_0) \\ &= x_{1,1} \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) + x_{1,2} \mathbb{P}(\{\omega^4\}) + x_{1,3} \mathbb{P}(\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})\end{aligned}$$

4. Supposons qu'il existe une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_3|\mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^*(X_2|\mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1|\mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Dans cette situation, et en utilisant les décompositions précédentes, cette probabilité \mathbb{P}^* doit satisfaire les cinq conditions suivantes

$$\begin{aligned}x_{2,1} &\stackrel{(1)}{=} x_{3,1} \times \mathbb{P}(\{\omega^1\} | \{\omega^1, \omega^2\}) + x_{3,2} \times \mathbb{P}(\{\omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2\}) \\ x_{2,5} &\stackrel{(2)}{=} x_{3,6} \times \mathbb{P}(\{\omega^6\} | \{\omega^6, \omega^7\}) + x_{3,7} \times \mathbb{P}(\{\omega^7\} | \{\omega^6, \omega^7\})\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}x_{1,1} &\stackrel{(3)}{=} x_{2,1} \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) + x_{2,2} \mathbb{P}(\{\omega^3\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ x_{1,3} &\stackrel{(4)}{=} x_{2,4} \mathbb{P}(\{\omega^5\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) + x_{2,5} \mathbb{P}(\{\omega^6\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \\ &\quad + x_{2,6} \mathbb{P}(\{\omega^8\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})\end{aligned}$$

et enfin

$$x_0 \stackrel{(5)}{=} x_{1,1}\mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) + x_{1,2}\mathbb{P}(\{\omega^4\}) + x_{1,3}\mathbb{P}(\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\})$$

Les trois premières conditions expriment le fait que les états $x_{2,1}$, $x_{2,5}$, et $x_{1,1}$, sont respectivement des barycentres des couples de points $\{x_{3,1}, x_{3,2}\}$, $\{x_{3,6}, x_{3,7}\}$, et enfin $\{x_{2,1}, x_{2,2}\}$. On peut donc résoudre ces trois équations, si et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées

- 1) $x_{3,1} < x_{2,1} < x_{3,2}$ ou $x_{3,2} < x_{2,1} < x_{3,1}$
- 2) $x_{3,6} < x_{2,5} < x_{3,7}$ ou $x_{3,7} < x_{2,5} < x_{3,6}$
- 3) $x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2}$ ou $x_{2,2} < x_{1,1} < x_{2,1}$

Dans ces conditions, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(\{\omega^1\}|\{\omega^1, \omega^2\}) &= \frac{x_{2,1} - x_{3,2}}{x_{3,1} - x_{3,2}} = 1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^2\}|\{\omega^1, \omega^2\}) \\ \mathbb{P}^*(\{\omega^6\}|\{\omega^6, \omega^7\}) &= \frac{x_{2,5} - x_{3,7}}{x_{3,6} - x_{3,7}} = 1 - \mathbb{P}^*(\{\omega^7\}|\{\omega^6, \omega^7\}) \\ \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) &= \frac{x_{1,1} - x_{2,2}}{x_{2,1} - x_{2,2}} \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{\omega^3\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \end{aligned}$$

Les deux dernières équations (4) et (5) conditions expriment le fait que les états $x_{1,3}$, et x_0 , sont respectivement des barycentres des triplets de points $\{x_{2,4}, x_{2,5}, x_{2,6}\}$, et $\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}$. On peut donc résoudre ces deux équations, si et seulement si, les états $x_{1,3}$, et x_0 , sont dans les intervalles convexes contenant ces points. A l'inverse des situations examinées précédemment, il existe plusieurs solutions. Par exemple, lorsque l'on a

$$x_{1,1} < x_0 < x_{1,2} < x_{1,3}$$

l'équation (5) admet pour solution (non unique)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) &= 0 \\ \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) &= \frac{x_0 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} = 1 - \mathbb{P}(\{\omega^4\}) \end{aligned}$$

Enfin, si l'on a

$$x_{2,4} < x_{1,3} < x_{2,5} < x_{2,6}$$

l'équation (4) admet pour solution (non unique)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\omega^8\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) &= 0 \\ \mathbb{P}(\{\omega^5\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) &= \frac{x_{1,3} - x_{2,5}}{x_{2,4} - x_{2,5}} = 1 - \mathbb{P}(\{\omega^6\} | \{\omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8\}) \end{aligned}$$

Pour calculer les quantités $\mathbb{P}(\{\omega^i\})$ correspondantes, on procède de façon usuelle. On a par exemple

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(\{\omega^1\}) &= \mathbb{P}^*(\{\omega^1\}|\{\omega^1, \omega^2\}) \times \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2\} | \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ &\quad \times \mathbb{P}(\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}) \\ &= \frac{x_{2,1} - x_{3,2}}{x_{3,1} - x_{3,2}} \times \frac{x_{1,1} - x_{2,2}}{x_{2,1} - x_{2,2}} \times \frac{x_0 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}}\end{aligned}$$

■

Exercice 8 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η_0 . On rappelle qu'une mesure de probabilités μ_k sur E_k est une suite de nombres $(\mu_k(x_k))_{x_k \in E_k} \in [0, 1]$ telle que $\sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) = 1$. On associe à une telle mesure μ_k sur E_k , la mesure $(\mu_k M_{k+1})$ sur E_{k+1} définie par

$$\forall x_{k+1} \in E_{k+1} \quad (\mu_k M_{k+1})(x_{k+1}) = \sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) M_{k+1}(x_k, x_{k+1})$$

1. Vérifier que l'on a

$$(\mu_k M_{k+1}) M_{k+2} = \mu_k (M_{k+1} M_{k+2})$$

avec la probabilité de transition $(M_{k+1} M_{k+2})$ de E_k vers E_{k+2} définie par la formule

$$\begin{aligned}(M_{k+1} M_{k+2})(x_k, x_{k+2}) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) M_{k+2}(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+2} = x_{k+2} \mid X_k = x_k)\end{aligned}$$

2. Plus généralement, on note $(M_{k+1} \dots M_{k+l})$ la probabilité de transition de E_k vers E_{k+l} définie par la formule

$$\begin{aligned}(M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_k, x_{k+l}) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, x_{k+l-1} \in E_{k+l-1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) \dots M_{k+l}(x_{k+l-1}, x_{k+l}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+l} = x_{k+l} \mid X_k = x_k)\end{aligned}$$

Vérifier que l'on a

$$\begin{aligned}\forall x_k \in E_k \quad \eta_k(x_k) &= \stackrel{\text{def.}}{\mathbb{P}}(X_k = x_k) \\ &= \eta_0(M_1 \dots M_k)(x_k) \\ &= (\eta_0 M_1)(M_2 \dots M_k)(x_k) \\ &= ((\eta_0 M_1) M_2)(M_3 \dots M_k)(x_k) \\ &= \dots \\ &= (((\dots ((\eta_0 M_1) M_2) \dots M_{k-1}) M_k)(x_k)\end{aligned}$$

3. On associe à une fonction $f_{k+1} \in \mathbb{R}^{E_{k+1}}$, la fonction $M_k(f_{k+1}) \in \mathbb{R}^{E_k}$ définie par

$$\begin{aligned} M_k(f_{k+1})(x_k) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_k(x_k, x_{k+1}) f_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

Montrer que pour toute fonction $f_{k+l} \in \mathbb{R}^{E_{k+l}}$, nous avons

$$\mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l}) \mid X_k = x_k) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})(x_k)$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \eta_{k+l}(f_{k+l}) &=_{\text{def.}} \mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l})) \\ &= [\eta_k(M_{k+1} \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_k[(M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \\ &= [\eta_0(M_1 \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_0[(M_1 \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \end{aligned}$$

Exercice 9 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans un espace homogène et fini $E = \{x_1, \dots, x_d\}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale μ_0 . Dans ce contexte, les probabilités de transitions sont données par les matrices

$$M_k = \begin{pmatrix} M_k(x_1, x_1) & \dots & M_k(x_1, x_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_k(x_d, x_1) & \dots & M_k(x_d, x_d) \end{pmatrix}$$

On identifie les mesures de probabilités μ , et les fonctions f sur E aux vecteurs lignes et colonnes suivants

$$\mu = [\mu(x_1), \dots, \mu(x_d)] \quad \text{et} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{bmatrix}$$

1. Vérifier les formules matricielles suivantes

$$\forall x_i, x_j \in E \quad \mathbb{P}(X_{k+l} = x_j \mid X_k = x_i) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_i, x_j)$$

et

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \forall x_i \in E \quad \mathbb{E}(f(X_{k+l}) \mid X_k = x_i) = [M_{k+1} \dots M_{k+l}f](x_i)$$

et enfin

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \mathbb{E}(f(X_k)) = \eta_0 M_1 \dots M_k f$$

Exercice 10 On considère une chaîne de Markov homogène sur un espace à deux points $E = \{1, 2\}$, et associée à la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$.

Les entrées $p_{i,j} \in [0, 1]$ sont telles que $p_{1,1} + p_{1,2} = 1 = p_{2,1} + p_{2,2}$. On conviendra que $c = p_{1,2} + p_{2,1} > 0$. Montrer (par récurrence sur le paramètre temporel) que les itérées M^n de la matrice M sont données par la formule

$$M^n = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Solution :

On vérifie la formule (1) par récurrence sur n . Pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{c} - 1\right) \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - p_{1,2} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & 1 - p_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

Supposons la formule (1) vraie au rang n . Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2}(p_{1,1} - p_{2,1}) & -p_{1,2}(p_{2,2} - p_{1,2}) \\ -p_{2,1}(p_{1,1} - p_{2,1}) & p_{2,1}(p_{2,2} - p_{1,2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il reste à remarquer que

$$(1-c) = (1 - p_{1,2} - p_{2,1}) = (p_{1,1} - p_{2,1}) = (p_{2,2} - p_{1,2})$$

La fin de la preuve par récurrence est désormais claire. ■

Exercice 11 Soit $(X'_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E'_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M'_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η'_0 . On note $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ le processus historique de $(X'_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$X_k = (X'_0, \dots, X'_k)$$

1. Vérifier que $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans les espaces produits

$$E_k = (E'_0, \dots, E'_k)$$

2. Décrire les probabilités de transitions de $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Exercice 12 On considère une marche aléatoire $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie sur un espace de probabilités (Ω, \mathbb{P}) , d'origine $X_0 = 0$ et de probabilités de transitions homogènes

$$M(x, y) = \alpha 1_{x+1}(y) + (1 - \alpha) 1_{x-1}(y) \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1]$$

1. Décrire l'arbre des épreuves associé au processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.
2. Montrer que la position moyenne de la particule au temps n est donnée par la formule

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(X_k) = k \times (2\alpha - 1)$$

3. Vérifier que les transitions de la chaîne entre deux instants, l et $(l+m) \leq n$, sont données par la formule

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k - (m - k)] \mid X_l = x) = C_m^k \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}$$

pour tous les $k \in \{0, \dots, m\}$, et

$$\mathbb{P}(X_{l+m} \notin \{2k - m : k = 0, \dots, m\} \mid X_l = x) = 0$$

4. En déduire que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = \frac{(2k)!}{k!k!} (\alpha(1 - \alpha))^k$$

En utilisant la formule de Stirling ($k! \simeq \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$), montrer que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1 - \alpha))^k}{\sqrt{\pi k}} \quad (= 1/\sqrt{\pi k} \text{ si } \alpha = 1/2)$$

Solution :

1. En utilisant la réalisation dynamique de la marche aléatoire on obtient

$$X_k = X_{k-1} + \epsilon_k \implies X_k = \sum_{l=1}^k \epsilon_l$$

On vérifie ainsi aisément que la position moyenne de la marche est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(X_k) = \sum_{l=1}^k \mathbb{E}(\epsilon_l) = k(\alpha - (1 - \alpha)) = k \times (2\alpha - 1)$$

Lorsque $\alpha \in (0, 1/2)$, les v.a. ϵ_k ont tendance à prendre plus fréquemment la valeur -1 . La marche est alors en moyenne attirée vers la gauche. Lorsque $\alpha = 1/2$, la marche reste en moyenne en son origine $X_0 = 0$. Autrement dit, la chaîne X_k oscille entre la droite et la gauche. La quantité $v = (2\alpha - 1)$ correspond à la vitesse moyenne de la particule.

2. Pour chaque $p \geq 0$, les évènements

$$\{\omega \in \Omega : X_l(\omega) = x, X_{l+m}(\omega) = x + [k - (m - k)]\}$$

avec $0 \leq k \leq m$ correspondent à la situation où la particule passe par x à l'instant l , et effectue entre les instants l et $l + m$, k déplacements vers la droite, et $(m - k)$ déplacements vers la gauche. La figure ci-dessous représente un exemple d'évolution sur $m = 12$ périodes, avec $k = 5$ montées, et $(m - k) = 7$ descentes.

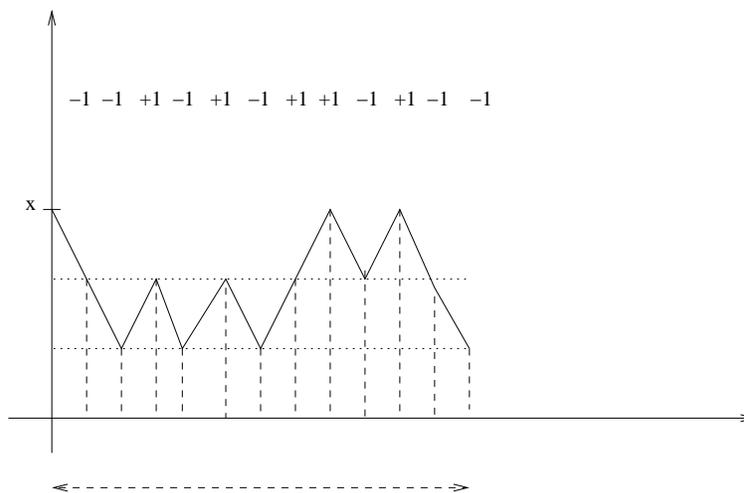


FIG. 8 – Points accessibles

Par conséquent, nous avons

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k - (m - k)] \mid X_l = x) = C_m^k \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}$$

3. D'après ce qui précède, lorsque $x = 0$ et $m = 2k$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = C_{2k}^k \alpha^k (1 - \alpha)^k = \frac{(2k)!}{k!k!} (\alpha(1 - \alpha))^k$$

On notera que les évènements

$$\{X_l = x, X_{l+m} = y\}$$

sont vides pour les couples de points $(y - x) \notin \{2l - m : l = 0, \dots, m\}$. En particulier, pour $x = 0 = y$ et $m = 2k + 1$, on a $\mathbb{P}(X_{l+2k+1} = 0 \mid X_l = 0)$. En utilisant l'approximation de Stirling

$$k! \simeq \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$$

on obtient l'estimation

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1-\alpha))^k}{\sqrt{\pi k}} \quad (= 1/\sqrt{\pi k} \text{ si } \alpha = 1/2)$$

Lorsque $\alpha \neq 1/2$, on a $4\alpha(1-\alpha) < 1$ et la probabilité de revenir à 0 en un temps $(2k)$ décroît exponentiellement vite lorsque k augmente. ■

Exercice 13 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur \mathbb{R} , associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes

$$X_k = \sum_{p=0}^k \epsilon_p = X_{k-1} + \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Solution :

On a

$$\begin{aligned} \Delta X_k &= \underbrace{\mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\text{partie prévisible}} + \underbrace{[\Delta X_k - \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})]}_{\text{partie imprévisible}} \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_k) + [\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)] \end{aligned}$$

La décomposition de Doob du processus est donc donnée par la formule

$$X_k = \sum_{p=0}^k \Delta X_p = A_k^X + M_k^X$$

avec le couple de processus $(A_k^X, M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ définis par

$$\begin{aligned} A_k^X &= \sum_{p=0}^k \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) = \sum_{p=0}^k \mathbb{E}(\epsilon_p) \\ M_k^X &= \sum_{p=0}^k [\epsilon_p - \mathbb{E}(\epsilon_p)] \end{aligned}$$

■

Exercice 14 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur \mathbb{R} , associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes

$$X_k = \prod_{p=0}^k \epsilon_p = X_{k-1} \times \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Solution :

On commence par noter que

$$\Delta X_k = X_k - X_{k-1} = X_{k-1} \times [\epsilon_k - 1]$$

On obtient ainsi la décomposition locale

$$\begin{aligned} \Delta X_k &= \underbrace{\mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\text{partie prévisible}} + \underbrace{[\Delta X_k - \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})]}_{\text{partie imprévisible}} \\ &= X_{k-1} \times \mathbb{E}(\epsilon_k - 1) + X_{k-1} \times [\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)] \end{aligned}$$

La décomposition de Doob du processus est donc donnée par la formule

$$X_k = \sum_{p=0}^k \Delta X_p = A_k^X + M_k^X$$

avec le couple de processus $(A_k^X, M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ définis par

$$\begin{aligned} A_k^X &= \sum_{p=0}^k \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) = \sum_{p=0}^k \left[\prod_{l=0}^{p-1} \epsilon_l \right] \times \mathbb{E}(\epsilon_p - 1) \\ M_k^X &= \sum_{p=0}^k \left[\prod_{l=0}^{p-1} \epsilon_l \right] \times [\epsilon_p - \mathbb{E}(\epsilon_p)] \end{aligned}$$

■