TD - ESSI2 (option MMDFA)

Exercice 1 *Deux machines industrielles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ont des taux de production quotidienne d'objets défectueux égaux à $p_1 = 5\%$ et $p_2 = 10\%$. Chacune de ces machines $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ produit respectivement $m_1 = 100$, et $m_2 = 200$ objets. Qu'elle est la probabilité pour qu'un object pris au hasard soit défectueux ? Qu'elle est la probabilité pour que ce soit la première machine $\mathcal{M}_1$ qui l'ait produit ?*

Exercice 2 *Un sac contient 2 pièces de monnaie. L'une équitable, et ayant une probabilité 1/2 de donner "pile" ou "face" ; la seconde ayant une probabilité 1/3 de donner "face". On lance au hasard l'une des pièces, et l'on observe un résultat "face". Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce équitable ?*

Exercice 3 (Formule de Bayes séquentielle) *Montrer que la probabilité conditionnelle d'une réalisation conjointe de n évènements $(A_p)_{1\leq p\leq n}$ par rapport à un évènement B (de probabilité non nulle) est donnée par la formule multiplicative*

$$\mathbb{P}(\cap_{p=1}^{n} A_n | B)$$

$$= \mathbb{P}(A_n | B \cap [\cap_{p=1}^{n-1} A_p])\ \mathbb{P}(A_{n-1} | B \cap [\cap_{p=1}^{n-2} A_p]) \ldots \mathbb{P}(A_2 | B \cap A_1)\mathbb{P}(A_1 | B)$$

$$= \prod_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p | B \cap [\cap_{q=1}^{p-1} A_q])$$

avec la convention $\prod_{\emptyset} = \Omega$, lorsque $p = 1$.

Exercice 4 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de n copies indépendantes d'une v.a. de Bernoulli X sur $\{0, 1\}$*

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p \in [0, 1]$$

On note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, les variables de comptage du nombre de succés. Montrer que pour tout $m \leq n$, et $0 \leq k \leq l \leq n$, on a

$$\mathbb{P}^{S_m|S_n}(k|l) = \frac{C_{n-m}^{l-k}\ C_m^k}{C_n^l} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}^{X_1|S_n}(1|l) = \frac{l}{n}$$

Exercice 5 *Soit $(X_p)_{0\leq p\leq n}$ une suite de v.a. définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans des espaces au plus dénombrables $(E_p, \mathcal{P}(E_p))_{0\leq p\leq n}$. Supposons que la loi conditionnelle de la séquence $(X_1, \ldots, X_n)$ en l'évènement $\{X_0 = x_0\}$ soit de la forme*

$$\mathbb{P}^{(X_1\ldots,X_n)|X_0}(x_1, \ldots, x_n | x_0)$$

$$= p_n(x_n | x_0, \ldots, x_{n-1})\ p_{n-1}(x_{n-1} | x_0, \ldots, x_{n-2}) \ldots p_2(x_2 | x_0, x_1) p_1(x_1 | x_0) \tag{1}$$

Dans la formule précédente, p_k désigne une suite de fonctions boréliennes positives, et telles que $\sum_{x_k} p_k(x_k|x_0,\ldots,x_{k-1}) = 1$, pour tout $k \geq 1$, et pour toute séquence $(x_0,\ldots,x_{k-1}) \in (E_0 \times \ldots E_{k-1})$. Montrer que l'on a nécessairement

$$\mathbb{P}^{X_k|(X_0,\ldots,X_{k-1})}(x_k|x_0,\ldots,x_{k-1}) = p_k(x_k|x_0,\ldots,x_{k-1})$$

Exercice 6 *Soit (X_1, X_2) un couple de v.a. à valeurs dans un espace produit fini $(E_1 \times E_2)$, muni de l'algèbre discrète $\mathcal{P}(E_1 \times E_2)$. Montrer que pour toute fonction $f : E_2 \to \mathbb{R}$, on a la formule*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}((f(X_2) - \mathbb{E}(f(X_2) \mid X_1))^2)\\&= \inf\{\mathbb{E}((f(X_2) - Y_1)^2) \ : \ Y_1 \text{ v.a. } \sigma(X_1) - \text{mesurable}\}\end{aligned}$$

Cette description variationnelle montre l'espérance conditionnelle est un estimateur optimal, en ce sens où elle minimise la variance d'erreur.

Exercice 7 *Soit (X_1, X_2, X_3) un triplet de v.a. à valeurs un espace produit fini $(E_1 \times E_2 \times E_3)$, muni de l'algèbre discrète. Montrer que pour toute fonction $f : E_3 \to \mathbb{R}$, on a la formule de conditionnements emboités*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_3) \mid X_2, X_1) \mid X_1) = \mathbb{E}(f(X_3) \mid X_1)$$