

TD - ESSI2 (option MMDFa)

Exercice 1 Deux machines industrielles \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 ont des taux de production quotidienne d'objets défectueux égaux à $p_1 = 5\%$ et $p_2 = 10\%$. Chacune de ces machines \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 produit respectivement $m_1 = 100$, et $m_2 = 200$ objets. Qu'elle est la probabilité pour qu'un objet pris au hasard soit défectueux ? Qu'elle est la probabilité pour que ce soit la première machine \mathcal{M}_1 qui l'ait produit ?

Solution :

Pour comprendre ce problème de statistique, il convient de noter que l'on a supposé implicitement que les taux d'objets défectueux p_1, p_2 ont été calculés sur la même base de production. Autrement dit, \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 produisent chaque jours

$$d_1 = m_1 p_1 = 5 \quad \text{et} \quad d_2 = m_2 p_2 = 20$$

objets défectueux. On représente le choix au hasard d'un objet parmi les $m_1 + m_2$ objet par l'ensemble des indices $\Omega = \{1, \dots, (m_1 + m_2)\}$, muni de la tribu discrète $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et de la probabilité uniforme

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{300}$$

Sans perte de généralité, et à une permutation d'indices près, on peut supposer que les événements $A_1 = \{1, \dots, m_1\}$, et $A_2 = m_1 + \{1, \dots, m_2\}$, représentent respectivement les objets produits par \mathcal{M}_1 , et par \mathcal{M}_2 . Le couple $\{A_1, A_2\}$ forme clairement une partition de Ω , et l'on a

$$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_2) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3}$$

L'ensemble des objets défectueux quotidien B est formé de $d_1 + d_2$ objets, dont d_1 dans A_1 , et d_2 dans A_2 . On retrouve ainsi le fait que

$$\mathbb{P}(B|A_i) = |B \cap A_i|/|A_i| = d_i/m_i = p_i$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i \in \{1,2\}} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) \\ &= \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m_1 + m_2} = \frac{d_1 + d_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{60} + \frac{1}{15} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Ce résultat peut être retrouvé de façon immédiate, en notant que tout simplement que $\mathbb{P}(B) = |B|/|\Omega|$. Ceci répond à la première question. Les probabilités

pour que l'une des machines \mathcal{M}_i , $i = 1, 2$, est produit cet objet défectueux, correspondent aux probabilités $\mathbb{P}(A_i|B)$, $i = 1, 2$, de choisir cet objet dans A_i , $i = 1, 2$, sachant que ce dernier est dans B . D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in \{1,2\}} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)} \\ &= \frac{p_i m_i}{p_1 m_1 + p_2 m_2} = \frac{d_i}{d_1 + d_2} \left(= \frac{1}{5} 1_{i=1} + \frac{4}{5} 1_{i=2} \right)\end{aligned}$$

On remarque que cette formule est bien cohérente avec notre intuition. En effet, si l'on restreint notre choix aux pièces défectueuses, on a bien évidemment $d_i/(d_1+d_2) = |A_i \cap B|/|B|$ "chances" pour qu'elle provienne de la machine \mathcal{M}_i ! ■

Exercice 2 *Un sac contient 2 pièces de monnaie. L'une équilibrée, et ayant une probabilité 1/2 de donner "pile" ou "face"; la seconde ayant une probabilité 1/3 de donner "face". On lance au hasard l'une des pièces, et l'on observe un résultat "face". Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce équilibrée ?*

Solution :

Cette expérience aléatoire se déroule en deux temps. On choisit tout d'abord une pièce $\omega_1 = \{0, 1\}$ dans un sac Ω_1 contenant deux pièces de monnaie; la valeur $\omega_1 = 1$ correspond au choix de la pièce équilibrée, et la valeur $\omega_1 = 0$ représente le choix de la pièce ayant une probabilité 1/3 de donner le coté "face". Une fois la pièce choisie, on la lance et l'on observe un résultat $\omega_2 \in \Omega_2 = \{0, 1\}$. Dans ce cas, la valeur $\omega_2 = 1$ correspond au coté "face", et la valeur $\omega_2 = 0$ représente le coté "pile". L'exercice peut être résolu selon deux approches connexes. La première consiste à décrire avec précision l'espace des événements possibles. La seconde est liée à une interprétation dynamique naturelle de l'expérience en question.

1. L'espace des épreuves associé à l'expérience complète est donc donné par $\Omega = \{0, 1\}^2$. Chaque événement élémentaire $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \{0, 1\}^2$, représente le choix de la pièce ω_1 , et le résultat du lancer ω_2 . D'après l'énoncé, nous avons

$$\mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{(1, 0)\})$$

et

$$\mathbb{P}(\{(0, 1)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(\{(0, 0)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

Les événements

$$\begin{aligned}F &= \{(0, 1), (1, 1)\}, & F^c &= \{(0, 0), (1, 0)\} \\ E &= \{(1, 0), (1, 1)\}, & E^c &= \{(0, 1), (0, 0)\}\end{aligned}$$

représentent respectivement la situation où le résultat du lancer est "face" (F), celle où le lancer est "pile" (F^c), le fait d'avoir choisi la pièce équilibrée

(E), et celui d'avoir choisi la pièce non équilibrée (E^c). On a donc

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

De même on montre que

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2} = 1 - \mathbb{P}(F^c|E) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F|E^c) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|F) &= \frac{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F|E^c)\mathbb{P}(E^c)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/6} \\ &= \frac{3}{5} = 1 - \mathbb{P}(E^c|F) \end{aligned}$$

2. La seconde méthode consiste à exploiter l'aspect temporel de l'expérience, de sorte à éviter une représentation complète de l'espace des épreuves. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ représentant le choix initial X_1 de la pièce, et le résultat du lancer. D'après l'énoncé, le choix de la pièce dans le sac est uniforme

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$$

D'autre part, sachant que la pièce est équilibrée, le résultat du lancer sera encore uniforme

$$\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

Si la pièce choisie n'est pas équilibrée, alors nous aurons une probabilité $1/3$ de voir le côté "face" représenté par la valeur 1

$$\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{1}{3} = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 0)$$

On retrouve ainsi le résultat recherché

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1|X_2 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\mathbb{P}(X_1=1)}{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\mathbb{P}(X_1=1) + \mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)\mathbb{P}(X_1=0)} \\ &= \frac{1/4}{1/4 + 1/6} = \frac{3}{5} = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0|X_2 = 1) \end{aligned}$$

On remarquera que cette méthode est une reformulation dynamique de la précédente. Plus précisément, si l'on considère les variables canoniques

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \quad \text{et} \quad X_2(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$$

les équations précédentes sont une reformulation de celles décrites dans la première méthode.

■

Exercice 3 (Formule de Bayes séquentielle) Montrer que la probabilité conditionnelle d'une réalisation conjointe de n évènements $(A_p)_{1 \leq p \leq n}$ par rapport à un évènement B (de probabilité non nulle) est donnée par la formule multiplicative

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\cap_{p=1}^n A_p | B) \\ &= \mathbb{P}(A_n | B \cap [\cap_{p=1}^{n-1} A_p]) \mathbb{P}(A_{n-1} | B \cap [\cap_{p=1}^{n-2} A_p]) \dots \mathbb{P}(A_2 | B \cap A_1) \mathbb{P}(A_1 | B) \\ &= \prod_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p | B \cap [\cap_{q=1}^{p-1} A_q]) \end{aligned}$$

avec la convention $\prod_{\emptyset} = \Omega$, lorsque $p = 1$.

Solution :

La formule multiplicative recherchée est une conséquence directe de la formule récursive suivante

$$\mathbb{P}(A_n \cap [\cap_{p=1}^{n-1} A_p] | B) = \mathbb{P}(A_n | B \cap [\cap_{p=1}^{n-1} A_p]) \mathbb{P}(\cap_{p=1}^{n-1} A_p | B)$$

■

Exercice 4 Soient X_1, \dots, X_n une suite de n copies indépendantes d'une v.a. de Bernoulli X sur $\{0, 1\}$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p \in [0, 1]$$

On note $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, les variables de comptage du nombre de succès. Montrer que pour tout $m \leq n$, et $0 \leq k \leq l \leq n$, on a

$$\mathbb{P}^{S_m | S_n}(k | l) = \frac{C_{n-m}^{l-k} C_m^k}{C_n^l} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{X_1 | S_n}(1 | l) = \frac{l}{n}$$

Solution :

Par définition des v.a. $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, nous avons pour tout $m \leq n$, et $0 \leq k \leq l \leq n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{S_m | S_n}(k | l) &= \frac{\mathbb{P}(S_n = l, S_m = k)}{\mathbb{P}(S_n = l)} = \frac{\mathbb{P}(S_n - S_m = (l - k), S_m = k)}{\mathbb{P}(S_n = l)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^n X_i = (l - k), \sum_{i=1}^m X_i = k)}{\mathbb{P}(S_n = l)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_{n-m} = (l - k)) \times \mathbb{P}(S_m = k)}{\mathbb{P}(S_n = l)} \\ &= \frac{[C_{n-m}^{l-k} p^{l-k} (1-p)^{(n-m)-(l-k)}] [C_m^k p^k (1-p)^{m-k}]}{C_n^l p^l (1-p)^{n-l}} \\ &= \frac{C_{n-m}^{l-k} C_m^k}{C_n^l} \end{aligned}$$

Lorsque $m = 1$, et $k = 1$, on obtient clairement

$$\mathbb{P}^{X_1|S_n}(1|l) = \frac{C_{n-1}^{l-1} C_1^1}{C_n^l} = l/n$$

■

Exercice 5 Soit $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ une suite de v.a. définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans des espaces au plus dénombrables $(E_p, \mathcal{P}(E_p))_{0 \leq p \leq n}$. Supposons que la loi conditionnelle de la séquence (X_1, \dots, X_n) en l'évènement $\{X_0 = x_0\}$ soit de la forme

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)|X_0}(x_1, \dots, x_n|x_0) \\ &= p_n(x_n|x_0, \dots, x_{n-1}) p_{n-1}(x_{n-1}|x_0, \dots, x_{n-2}) \dots p_2(x_2|x_0, x_1) p_1(x_1|x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

Dans la formule précédente, p_k désigne une suite de fonctions boréliennes positives, et telles que $\sum_{x_k} p_k(x_k|x_0, \dots, x_{k-1}) = 1$, pour tout $k \geq 1$, et pour toute séquence $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in (E_0 \times \dots \times E_{k-1})$. Montrer que l'on a nécessairement

$$\mathbb{P}^{X_k|(X_0, \dots, X_{k-1})}(x_k|x_0, \dots, x_{k-1}) = p_k(x_k|x_0, \dots, x_{k-1})$$

Solution :

Tout d'abord, on note que

$$\mathbb{P}^{X_n|(X_0, \dots, X_{n-1})} = \frac{\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)|X_0}(x_1, \dots, x_n|x_0)}{\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_{n-1})|X_0}(x_1, \dots, x_{n-1}|x_0)}$$

D'après l'équation (1), on a nécessairement

$$\mathbb{P}^{X_n|(X_0, \dots, X_{n-1})} = p_n(x_n|x_0, \dots, x_{n-1})$$

■

Exercice 6 Soit (X_1, X_2) un couple de v.a. à valeurs dans un espace produit fini $(E_1 \times E_2)$, muni de l'algèbre discrète $\mathcal{P}(E_1 \times E_2)$. Montrer que pour toute fonction $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a la formule

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}((f(X_2) - \mathbb{E}(f(X_2) | X_1))^2) \\ &= \inf \{ \mathbb{E}((f(X_2) - Y_1)^2) : Y_1 \text{ v.a. } \sigma(X_1) \text{-mesurable} \} \end{aligned}$$

Cette description variationnelle montre l'espérance conditionnelle est un estimateur optimal, en ce sens où elle minimise la variance d'erreur.

Solution :

En utilisant la formule

$$\forall Y_1 \in \sigma(X_1) \quad \mathbb{E}(Y_1 f_2(X_2)) = \mathbb{E}(Y_1 \mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1))$$

on montre que pour toute v.a. Y_1 mesurable par rapport à $\sigma(X_1)$ on a

$$\mathbb{E}(Y_1 [f_2(X_2) - \mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1)]) = 0$$

Si l'on remplace Y_1 par la v.a. $[\mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1) - Y_1]$, on trouve

$$\mathbb{E}([\mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1) - Y_1] [f_2(X_2) - \mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1)]) = 0$$

On démontre ainsi que pour toute v.a. Y_1 mesurable par rapport à $\sigma(X_1)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}((f_2(X_2) - Y_1)^2) \\ &= \mathbb{E}((f_2(X_2) - \mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1)) + [\mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1) - Y_1])^2) \\ &= \mathbb{E}([f_2(X_2) - \mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1)]^2) + \mathbb{E}([\mathbb{E}(f_2(X_2) | X_1) - Y_1]^2) \end{aligned}$$

La preuve du résultat recherché est désormais claire. ■

Exercice 7 Soit (X_1, X_2, X_3) un triplet de v.a. à valeurs un espace produit fini $(E_1 \times E_2 \times E_3)$, muni de l'algèbre discrète. Montrer que pour toute fonction $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$, on a la formule de conditionnements emboîtés

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_3) | X_2, X_1) | X_1) = \mathbb{E}(f(X_3) | X_1)$$

Solution :

On remarque tout d'abord que

$$\mathbb{P}^{X_3, X_2 | X_1}(x_3, x_2 | x_1) = \mathbb{P}^{X_3 | X_1, X_2}(x_3 | x_1, x_2) \mathbb{P}^{X_2 | X_1}(x_2 | x_1)$$

En sommant sur la seconde coordonnée, on obtient

$$\mathbb{P}^{X_3 | X_1}(x_3 | x_1) = \sum_{x_2 \in E_2} \mathbb{P}^{X_3 | X_1, X_2}(x_3 | x_1, x_2) \mathbb{P}^{X_2 | X_1}(x_2 | x_1)$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_3) \mid X_2, X_1) \mid X_1 = x_1) \\ &= \sum_{x_2} \sum_{x_3} f(x_3) \\ & \quad \times \mathbb{P}^{X_3 \mid X_2, X_1}(x_3 \mid x_2, x_1) \mathbb{P}^{X_2 \mid X_1}(x_2 \mid x_1) \\ &= \sum_{x_3} f(x_3) \\ & \quad \times \left[\sum_{x_2} \mathbb{P}^{X_3 \mid X_2, X_1}(x_3 \mid x_2, x_1) \mathbb{P}^{X_2 \mid X_1}(x_2 \mid x_1) \right] \\ &= \mathbb{E}(f(X_3) \mid X_1 = x_1) \end{aligned}$$

■