TD - ESSI2 (option MMDFA)

1 Probabilités élémentaires

Exercice 1 *Vérifier les formules*

$$\begin{array}{rclc} A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) & (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{array}$$

Solution :
Les quatres formules recherchées se démontrent par des arguments de logique élémentaire. Pour la première, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \omega \in A \cup (B \cap C) & \Leftrightarrow & (\omega \in A \text{ ou } \omega \in (B \cap C)) \\ & \Leftrightarrow & (\omega \in A \text{ ou } (\omega \in B \text{ et } \omega \in C)) \\ & \Leftrightarrow & ((\omega \in A \text{ ou } \omega \in B) \text{ et } (\omega \in A \text{ ou } \omega \in C)) \\ & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \omega \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & (\omega \in A \text{ et } \omega \in (B \cup C)) \\ & \Leftrightarrow & (\omega \in A \text{ et } (\omega \in B \text{ ou } \omega \in C)) \\ & \Leftrightarrow & ((\omega \in A \text{ et } \omega \in B) \text{ ou } (\omega \in A \text{ et } \omega \in C)) \\ & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}$$

Enfin on note que

$$\begin{array}{rcl} \omega \in (A \cup B)^c & \Leftrightarrow & \omega \notin (A \cup B) \\ & \Leftrightarrow & (\omega \notin A \text{ et } \omega \notin B) \Leftrightarrow \omega \in (A^c \cap B^c) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \omega \in (A \cap B)^c & \Leftrightarrow & \omega \notin (A \cap B) \\ & \Leftrightarrow & (\omega \notin A \text{ ou } \omega \notin B) \Leftrightarrow \omega \in (A^c \cup B^c) \end{array}$$

■

Exercice 2 *Montrer (par réccurrence) que pour toute collection d'évènements $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$, nous avons*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$$

Solution :
L'inégalité recherchée est triviale lorsque $n = 1$. Supposons qu'elle soit satisfaite au rang n. Comme l'on a

$$\mathbb{P}([A_1 \cup \ldots \cup A_n] \cup A_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}([A_1 \cup \ldots \cup A_n]) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}([A_1 \cup \ldots \cup A_n] \cap A_{n+1})$$

$$\leq \mathbb{P}([A_1 \cup \ldots \cup A_n]) + \mathbb{P}(A_{n+1})$$

d'après notre hypothèse, on en conclut que

$$\mathbb{P}([A_1 \cup \ldots \cup A_n] \cup A_{n+1}) \leq [\mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)] + \mathbb{P}(A_{n+1})$$

$\blacksquare$

Exercice 3 *Soit A, B un couple d'évènements. Montrer que*

$$A \triangle B = [A \cap B^c] \cup [B \cap A^c] = (A - B) \cup (B - A)$$

représente l'évènement où exactement A ou B se produit. Vérifier que l'on a

$$1_{A \triangle B} = 1_A + 1_B - 2 1_{A \cap B}$$

En déduire par le calcul, puis schématiquement, la formule

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

Solution :
En toute logique, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \omega \in A \triangle B & \Leftrightarrow & (\omega \in [A \cap B^c] \text{ ou } \omega \in [B \cap A^c]) \\ & \Leftrightarrow & ((\omega \in A \text{ et} \omega \notin B) \text{ ou } (\omega \in B \text{ et} \omega \notin A)) \\ & \Leftrightarrow & (\omega \text{ est } \underline{\text{exclusivement}} \text{ dans } A \text{ ou dans } B) \end{array}$$

Par ailleurs, les ensembles $[A \cap B^c]$ et $[B \cap A^c]$ étant disjoints, on note que

$$\begin{array}{rcl} 1_{A \triangle B} & = & 1_{[A \cap B^c] \cup [B \cap A^c]} = 1_{A \cap B^c} + 1_{A \cap A^c} \\ & = & 1_A \ (1 - 1_B) + 1_B(1 - 1_A) = 1_A + 1_B - 2 1_{A \cap B} \end{array}$$

On en conlut que

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_{A \triangle B}(\omega)\ \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

$\blacksquare$

2 Modèles d'urnes

Exercice 4 *Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants dans un classe de n personnes aient la même date d'anniversaire ? On supposera que la date d'anniversaire est l'un des 365 jours, et chaque jour est équiprobable. Estimer cette probabilité lorsque $n = 31$.*

Solution :
On interprète ce problème comme une sélection de n boules avec remise dans une urne à $N = 365$ boules. Le choix d'une boule s'interprète comme le choix d'une date d'anniversaire. Dans cette interprétation, l'espace des èvènements élémentaires est donnée par

$$\Omega = \{\omega \ : \ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \text{avec} \quad \omega_i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

L'évènement où il n'y a aucune coincidence de date est donnée par

$$A = \{\omega \ : \ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \text{avec} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j\}$$

On a clairement

$$|\Omega| = N^n \quad \text{et} \quad |A| = (N)_n (= N(N-1) \ldots (N-(n-1)))$$

de sorte que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(N)_n}{N^n} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) \ldots \left(1 - \frac{(n-1)}{N}\right)$$

En utilisant la formule $(1-x) \leq e^{-x}$, valable pour tous les $x \in [0,1]$, on obtient la majoration

$$\mathbb{P}(A) \leq \exp\left(-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} j\right) = \exp -\frac{n(n-1)}{2N}$$

La probabilité P_n pour qu'au moins deux étudiants dans un classe de n personnes aient la même date d'anniversaire, est donnée alors par

$$P_n = 1 - \frac{(365)_n}{365^n} \geq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \times 365}}$$

Pour $n = 31$, on peut remarquer que

$$n(n-1) > (n-1)^2 = 30^2 = 900 > 730 = 2 \times 365 \Rightarrow P_{31} > 1 - \frac{1}{e} \simeq 0,63$$

■

Exercice 5 *Un jeu de lotterie est formé de n billets gagnants sur un total de N. On supposera, ce qui est souvent le cas, que le nombre total de billets est plus que le double du nombre de billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins une fois, si l'on achète n billets ?*

Solution :

On commence par remarquer que l'ordre d'achat des n billets est sans effets. Ce jeu de hasard peut donc être décrit par l'ensemble

$$\Omega = \{\omega \ : \ \omega = \langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle \quad \text{avec} \quad \omega_i \in \{1, \ldots, N\} \quad \text{et} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j\}$$

Dans la formule précédente, $\omega = \langle \omega_1, \ldots, \omega_2 \rangle$ désigne les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire où l'ordre n'est pas important. On a alors $|\Omega| = C_N^n$. En supposant que les billets gagnants sont numérotés de 1à n, le contraire A^c de l'évènement recherché est donné par

$$A^c = \{\omega \ : \ \omega = \langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle \quad \text{avec} \quad \omega_i \in \{n{+}1, \ldots, N\} \quad \text{et} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j\}$$

On a donc $|A^c| = C_{N-n}^n$, et de ce fait

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c) &= \frac{C_{N-n}^n}{C_N^n} = \frac{(N-n)!}{n!(N-2n)!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \frac{(N-n)(N-(n+1))\ldots(N-(2n-1))}{N(N-1)\ldots(N-(n-1))} \\
&= \frac{(N-n)((N-1)-n)\ldots((N-n+1)-n)}{N(N-1)\ldots(N-(n-1))} \\
&= \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - \frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{N-(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

On note que

$$\mathbb{P}(A^c) \leq \left(1 - \frac{n}{N-(n-1)}\right)^n \leq \exp -\frac{n^2}{N}$$

Pour $N \leq n^2$, on remarque que $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \frac{1}{e} \simeq 0,63$ ∎

Exercice 6 *Un jeu de loto est formé de $N = 49$ boules numérotées de 1 à 49. Six d'entre elles sont gagnantes, disons les 6 premières numérotées de 1 à 6. On sélectionne sans remise $n = 6$ boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir choisi précisément ces 6 boules ?*

Solution :

Ce jeu de loto peut être décrit par l'ensemble des aléas désordonnés suivant

$$\Omega = \{\omega \ : \ \omega = \langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle \quad \text{avec} \quad \omega_i \in \{1, \ldots, N\} \quad \text{et} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j\}$$

avec $n = 6$, et $N = 49$. On note que $|\Omega| = C_N^n$, et l'évènement où l'on choisi les 6 premières boules correspond au singleton $\{\langle 1, \ldots, n\rangle\}$. La probabilité P recherchée est alors simplement donnée par

$$P = \frac{1}{C_{49}^6} \simeq 7.2\ 10^{-8}$$

■

3 Variables aléatoires

Exercice 7 *Soit $X : \Omega \to E$ une v.a., et $f : E \to F$ une fonction de E dans un ensemble fini F. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_d\} \subset E$, l'ensemble des réalisations possibles de v.a. X, montrer que la v.a. $f(X)$ peut s'écrire sous la forme suivante*

$$f(X) = \sum_{i=1}^d f(x_i)\ 1_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

Solution :
Il suffit de noter que l'on a

$$X = \sum_{i=1}^d\ x_i\ 1_{X^{-1}(\{x_i\})} \Longrightarrow f(X) = \sum_{i=1}^d f(x_i)\ 1_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

■

Exercice 8 *Soit $(A_i)_{\leq i \leq d}$ une partition de l'ensemble Ω. Montrer que pour toute collection de nombres réels $a = (a_i)_{\leq i \leq d}$, les fonctions*

$$X^a = \sum_{i=1}^d\ a_i\ 1_{A_i}$$

sont des v.a. réelles. Vérifier que toutes les v.a. réelles sont de cette forme.

Solution :
La suite $a = (a_i)_{\leq i \leq d}$ étant formée de nombres réels, la première question est immédiate. D'autre part, si X désigne une v.a. réelle sur Ω, nous avons clairement

$$X = \sum_{x \in X(\Omega)}\ x\ 1_{X^{-1}(\{x\})}$$

Ainsi, si l'on indice les éléments de l'ensemble image $X(\Omega) = \{a_i\ :\ 1 \leq i \leq d\}$, avec $d = |X(\Omega)|$, alors on obtient la formule recherchée

$$X = \sum_{i=1}^d\ a_i\ 1_{A_i} \quad \text{avec} \quad A_i = X^{-1}(\{a_i\}) = \{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) = a_i\}$$

Par construction $(A_i)_{\leq i \leq d}$ est bien une partition de l'ensemble Ω

$$\cup_{i\in I} X^{-1}(\{a_i\}) = X^{-1}(\cup_{i\in I}\{a_i\}) = X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega$$

■

Exercice 9 *Vérifier que pour tout couple d'ensembles A, B, on a les décompositions d'indicatrices suivantes*

$$\begin{array}{rcl} 1_{A\cap B} & = & 1_A 1_B \\ 1_{A\cup B} & = & 1_A + 1_B - 1_A 1_B = 1_A \vee 1_B \\ 1_{A-B} & = & 1_A\ (1 - 1_B) = 1_A - 1_A 1_B \\ 1_{A\triangle B} & = & (1_A - 1_B)^2 = |1_A - 1_B| \end{array}$$

Solution :
On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} 1_{A\cap B}(\omega) = 1 & \Leftrightarrow & (\omega \in A \ \text{ et } \omega \in B) \\ & \Leftrightarrow & (1_A(\omega) = 1 \ \text{ et } 1_B(\omega) = 1) \Leftrightarrow 1_A(\omega) 1_B(\omega) = 1 \end{array}$$

On a aussi, pour tout couple d'ensembles A, B disjoints

$$\begin{array}{rcl} 1_{A\cup B}(\omega) = 1 & \Leftrightarrow & (\omega \in A \text{ ou } \omega \in B) \\ & \Leftrightarrow & (1_A(\omega) = 1 \text{ ou } 1_B(\omega) = 1) \Leftrightarrow 1_A(\omega) + 1_B(\omega) = 1 \end{array}$$

En particulier, on notera que $1_{A^c} + 1_A = 1$. On a ainsi

$$1_{A-B} = 1_{A\cap B^c} = 1_A 1_{B^c} = 1_A\ (1 - 1_B) = 1_A - 1_A 1_B$$

En utilisant la décomposition

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

on obtient

$$\begin{array}{rcl} 1_{A\cup B} & = & 1_A(1 - 1_B) + 1_B(1 - 1_A) + 1_A 1_B \\ & = & 1_A + 1_B - 1_A 1_B = 1_A \vee 1_B \\ 1_{A\triangle B} & = & 1_A\ (1 - 1_B) + 1_B\ (1 - 1_A) \\ & = & 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B = (1_A - 1_B)^2 = |1_A - 1_B| \end{array}$$

■

Exercice 10 *Soit X une v.a. à valeurs dans un espace fini E, et définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. L'ensemble des évènements*

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{P}(E)) = \{X^{-1}(A) \ : \ A \subset E\}$$

est appelé l'algèbre sur E engendrée par la v.a. X. On dit que X est mesurable par rapport, ou adaptée à une algèbre d'évènements $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, et on note $X \underline{\in} \mathcal{F}$, lorsque l'on a

$$\forall A \subset E \qquad X^{-1}(A) \subset \mathcal{F}$$

1. *Vérifier que l'on a $X \underline{\in} \sigma(X)$*
2. *Pour tout un couple de v.a. (X, Y) à valeurs dans un espace produit fini $(E \times F)$, et défini sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a l'équivalence suivante*

$$X \underline{\in} \sigma(Y) \Longleftrightarrow \exists h : F \to E \quad X = h(Y)$$

Solution :

1. Immédiat.
2. La condition suffisante est immédiate. En effet, il suffit de noter que

$$\forall B \subset E \qquad X^{-1}(B) = h(Y)^{-1}(B) = Y^{-1}(h^{-1}(B)) \in \sigma(Y)$$

Pour vérifier que toute v.a. $X \underline{\in} \sigma(Y)$ est nécessairement de la forme $X = h(Y)$, avec $h : F \to E$, on observe que

$$X^{-1}(\{x\}) \in \sigma(Y) \Longleftrightarrow \exists A_x \subset F \quad X^{-1}(\{x\}) = Y^{-1}(A_x)$$

Il reste alors à noter que $1_{X^{-1}(\{x\})} = 1_{Y^{-1}(A_x)}$. En effet, en utilisant la décomposition

$$X = \sum_{x \in E} x \ 1_{X^{-1}(\{x\})}$$

on obtient bien $X = h(Y)$, avec la fonction $h(y) = \sum_{x \in E} x \ 1_{A_x}$.

■

Exercice 11 *Soit $\mathcal{D} = (D_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble fini Ω, muni de l'algèbre discrète $\mathcal{P}(\Omega)$. On note $a(\mathcal{D})$ la plus petite algèbre contenant les évènements $(D_i)_{i \in I}$.*

1. *Vérifier que pour toute algèbre $b(\mathcal{D})$ contenant $\mathcal{D}$, on a*

$$b(\mathcal{D}) \subset a(\mathcal{D}) \Longrightarrow a(\mathcal{D}) = b(\mathcal{D})$$

2. *On considère les v.a. indicatrices*

$$\forall i \in I \qquad X_i = 1_{D_i}$$

Montrer que

$$\sigma(X_i, \ i \in I) = a(\mathcal{D})$$

L'algèbre $a(\mathcal{D})$ est souvent notée abusivement $\sigma(\mathcal{D})$.

3. *Montrer que pour toute fonction* $f : \{0,1\}^I \to \mathbb{R}$ *nous avons*

$$f((X_i)_{i\in I}) \underline{\in} \sigma(\mathcal{D})$$

Vérifier que toutes les v.a. $Z \underline{\in} \sigma(\mathcal{D})$ *sont nécessairement de cette forme.*

Solution :

1. L'algèbre $a(\mathcal{D})$ étant la plus petite algèbre contenant $\mathcal{D}$, il suffit de noter que
$$\mathcal{D} \subset b(\mathcal{D}) \subset a(\mathcal{D}) \Longrightarrow a(\mathcal{D}) = b(\mathcal{D})$$

2. On peut commencer par noter que

$$\forall i \in I \qquad X_i^{-1}(\{1\}) = D_i \quad \text{et} \quad X_i^{-1}(\{0\}) = \Omega - D_i = \cup_{j\in I-\{i\}} D_j \in \sigma(\mathcal{D})$$

Plus généralement, nous avons

$$\{\omega \ : \ X_i(\omega) = 1 \text{ et } X_j(\omega) = 0 \ \ \forall j \in I - \{i\}\} = D_i \in \sigma(\mathcal{D})$$

et pour toute suite $(u_i)_{i\in I}$ contenant au moins deux composantes égales à 1
$$\{\omega \ : \ X_j(\omega) = u_j \ \ \forall j\} = \emptyset$$

On en conclut que
$$\sigma(X_i, \ i \in I) \subset \sigma(\mathcal{D})$$

L'inclusion inverse est à nouveau une conséquence du fait que

$$\forall i \in I \quad D_i = \{\omega \ : \ X_i(\omega) = 1 \text{ et } X_j(\omega) = 0 \ \ \forall j \in I - \{i\}\} \in \sigma(X_i, \ i \in I)$$

3. Cette question découle d'exercice 10

∎

Exercice 12 *Soit $\mathcal{F}$ une algèbre de parties sur un ensemble fini Ω.*

1. *Montrer qu'il existe une partition $\mathcal{D}$ de Ω telle que*

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{D})$$

2. *En déduire qu'il existe une collection finie de v.a. $(X_i)_{i\in I}$ à valeurs réelles sur Ω, telles que*

$$\mathcal{F} = \sigma(X_i,\ i \in I)$$

Solution :

1. On construit la partition $\mathcal{D}$, en choisissant le plus grand sous-ensemble $\mathcal{D} = (D_i)_{i\in I}$ formé d'évènements deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{D}$ n'était pas une partition de Ω, l'ensemble

$$(\cup_{i\in I} D_i)^c = \cap_{i\in I} D_i^c \in \mathcal{F}$$

serait un évènement non vide, et disjoint à tous les D_i. Par conséquent cet ensemble aurait été omis dans la construction de $\mathcal{D}$. Par construction, on a

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}$$

D'autre part, l'algèbre $\mathcal{F}$ est formée des réunions (finies) d'ensembles de $\mathcal{D}$. On a donc

$$\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{D}) \Longrightarrow \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$$

2. Cette question est une conséquence immédiate de l'exercice 11

∎

4 Indépendance

Exercice 13 *On considère un espace d'évènements à quatres états*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/4$*. On considère les évènements suivants*

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_2\} \quad A_2 = \{\omega_2, \omega_3\} \quad A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$$

Vérifier que ces trois évènements sont deux à deux indépendants, mais l'on a néanmoins

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

Solution :
Par construction, nous avons

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3)$$

et néanmoins

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

■

Exercice 14 *Soit* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$*, l'espace des épreuves correspondant au lancer de deux dés. On considère les évènements suivants.*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j \in \{1,2,5\}\} \qquad A_2 = \{(i,j) \in \Omega \ : \ j \in \{4,5,6\}\} \\ A_3 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ i+j = 9\} = \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\} \end{aligned}$$

1. *Vérifier que*

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j = 5\} \quad A_1 \cap A_3 = \{(4,5)\} \\ A_2 \cap A_3 &= \{(4,5),(3,6),(5,4)\} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(4,5)\} \end{aligned}$$

2. *Montrer que*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

mais, pour tout $i \neq j$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \neq \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

Solution :

1. On obtient facilement que

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j \in \{1,2,5\} \text{ et } j \in \{4,5,6\}\} \\ &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j = 5\} \quad A_1 \cap A_3 = \{(4,5)\} \\ A_2 \cap A_3 &= \{(i,j) \in \Omega \ : \ j \in \{4,5,6\}\} \cap \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\} \\ &= \{(4,5),(3,6),(5,4)\} \\ A_1 \cap A_3 \cap A_3 &= A_1 \cap A_3 = \{(4,5)\} \end{aligned}$$

2. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} = \frac{18}{36} \times \frac{18}{36} \times \frac{4}{36} = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{18}{36} \times \frac{18}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{18}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{1}{18} = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \end{aligned}$$

■

Exercice 15 *On considère un modèle d'urne contenant m_1 boules de couleur c_1, m_2 boules de c_2,..., et m_r boules de couleur c_r. On sélectionne au hasard n boules avec remise, et l'on note $X_1, \ldots, X_n$ leurs couleurs.*

1. *Vérifier que le n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ peut être réalisé sur l'espace des suites*

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{c_1, \ldots, c_r\}^n$$

muni de la probabilité uniforme. Vérifier que l'on a pour tout n-uplet d'indices $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots r\}^n$

$$\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \prod_{p=1}^{n} \frac{m_{i_p}}{m} \quad \text{avec} \quad m = \sum_{i=1}^{r} m_i$$

2. *Vérifier que l'on a pour tout $1 \leq p \leq n$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$*

$$\mathbb{P}^{X_p}(c_i) = m_i/m$$

En conclure que les v.a. X_i sont indépendantes.

Solution :

1. Par définition de Ω, nous avons

$$|\{\omega \in \Omega \ : \ (X_1, \ldots, X_n)(\omega) = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})\}| = m_{i_1} \times \ldots \times m_{i_n}$$

et

$$|\Omega| = |\{c_1, \ldots, c_r\}^n| = (\sum_{i=1}^{r} m_i)^n = m^n$$

On en conclut que

$$\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \frac{m_{i_1} \times \ldots \times m_{i_n}}{m^n} = \prod_{p=1}^{n} \frac{m_{i_p}}{m}$$

2. Pour tout $1 \leq p \leq n$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{X_p}(c_i) &= \frac{|\{\omega \in \Omega \ : \ X_p(\omega) = c_i\}|}{|\Omega|} \\ &= \frac{m \times \ldots \times m \times m_i \times m \times \ldots \times m}{m^n} = \frac{m_i}{m} \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \prod_{p=1}^{n} \mathbb{P}^{X_p}(c_i)$$

Autrement dit, les v.a. X_i sont indépendantes.

■

Exercice 16 *On considère une suite d'évènements indépendants $A_1, \ldots, A_n$, se déroulant au cours du temps, avec la même probabilité de réalisation*

$$p = \mathbb{P}(A_i)$$

On associe à cette suite, la v.a. $X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ représentant le nombre de fois où les évènements se réalisent.

1. *Montrer que pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, tel que $|I| = k$, on a*

$$\mathbb{P}([\cap_{i \in I} A_i] \cap [\cap_{i \notin I} A_i^c]) = p^k (1-p)^{n-k}$$

2. *En déduire que X est distribuée sur $E = \{0, \ldots, n\}$, selon la loi*

$$\mathbb{P}^X(k) = C_n^k \; p^k (1-p)^{n-k}$$

Solution :

1. Pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, avec $|I| = k$, et d'après les propriétés d'indépendance entre les évènements, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\cap_{i \in I} A_i] \cap [\cap_{i \notin I} A_i^c]) &= \left[\prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\right] \times \left[\prod_{i \notin I} \mathbb{P}(A_i^c)\right] \\ &= p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

2. Il y a exactement C_n^k possibilités de choisir un sous ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$, tel que $|I| = k$. On en déduit que la v.a. de comptage $X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ est distribuée sur $E = \{0, \ldots, n\}$, selon la loi binomiale

$$\mathbb{P}^X(k) = C_n^k \; p^k (1-p)^{n-k}$$

■

Exercice 17 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de n copies indépendantes d'une v.a. de Bernoulli X sur $\{0, 1\}$*

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p \in [0, 1]$$

1. *Vérifier que pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, on a*

$$\mathbb{P}^{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

2. *Quelle est la loi de la v.a. de comptage $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.*

Solution :

1. D'après les propriétés d'indépendance entre les v.a. X_i, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \left(p^{1_1(x_i)}\ (1-p)^{1_1(x_i)} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(p^{x_i}\ (1-p)^{1-x_i} \right) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}
\end{aligned}$$

2. Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'exercice précédent, la v.a. de comptage $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est distribuée selon la loi binomiale

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{P}^{S_n}(k) = C_n^k\ p^k (1-p)^{n-k}$$

■

5 Problème [Formule de Poincaré]

Soit $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ une suite d'évènements.

1. Vérifier les formules suivantes

$$\begin{aligned} 1_{A_1 \cap A_2} &= 1_{A_1} \cap 1_{A_2} \\ 1_{A_1 \cup A_2} &= 1 - (1 - 1_{A_1})(1 - 1_{A_2}) = 1_{A_1} + 1_{A_2} - 1_{A_1 \cap A_2} \end{aligned}$$

2. Montrer que

$$1_{\cup_{p=1}^{n} A_p} = 1 - \prod_{p=1}^{n} \left(1 - 1_{A_p}\right)$$

3. En utilisant la formule

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1} \ldots a_{i_p}$$

qui est valable pour tout $n \geq 0$, et pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, vérifier l'identité

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{p-1} \, \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}) \qquad (1)$$

4. Montrer que pour tout $A \subset \Omega$, $\omega \in \Omega$, et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$(1 + u)^{1_A(\omega)} = 1 + u \; 1_A(\omega)$$

avec la convention $0^0 = 1$, lorsque $u = -1$, et $\omega \notin A$. En déduire l'identité

$$(1 + u)^{\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}} = \prod_{i=1}^{n} (1 + u \; 1_{A_i})$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la question précédente, vérifier l'identité

$$\sum_{\omega \in \Omega} (1 + u)^{\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(\omega)} \mathbb{P}(\omega) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} u^p \; \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p})$$

5. Retrouver la formule de Poincaré (1), en posant $u = -1$.

Solution :

1. On a clairement $1_{A_1 \cap A_2} = 1_{A_1} \cap 1_{A_2}$. De même, lorsque deux évènements A, B sont disjoints, nous avons

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$$

En particulier, on a $1_A + 1_{A^c} = 1$, pour tout évènement $A \subset \Omega$. Par conséquent, on obtient

$$1_{A_1 \cup A_2} = 1 - 1_{[A_1 \cup A_2]^c} = 1 - 1_{[A_1^c \cap A_2^c]} = 1 - 1_{A_1^c} 1_{A_2^c}$$

Comme l'on a aussi $1_A^c = 1 - 1_A$, on en conclut que

$$1_{A_1 \cup A_2} = 1 - (1 - 1_{A_1})(1 - 1_{A_2}) = 1_{A_1} + 1_{A_2} - 1_{A_1 \cap A_2}$$

2. En utilisant les remarques précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} 1_{\cup_{p=1}^n A_p} &= 1 - 1_{[\cup_{p=1}^n A_p]^c} = 1 - 1_{\cap_{p=1}^n A_p^c} \\ &= 1 - \prod_{p=1}^n 1_{A_p^c} = 1 - \prod_{p=1}^n \left(1 - 1_{A_p}\right) \end{aligned}$$

3. En utilisant la formule

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) = 1 + \sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1} \ldots a_{i_p} \tag{2}$$

nous avons

$$1 - \prod_{p=1}^n \left(1 - 1_{A_p}\right) = -\sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^p \ 1_{A_{i_1}} \ldots 1_{A_{i_p}}$$

Comme $-(-1)^p = (-1)^{p+1} = (-1)^{p-1}$, on en conclut que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{\omega \in \Omega} 1_{\cup_{i=1}^n A_i}(\omega) \ \mathbb{P}(\omega) \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{p-1} \ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}) \end{aligned}$$

4. Lorsque $\omega \in A$, on a

$$(1 + u)^{1_A(\omega)} = 1 + u = 1 + u \ 1_A(\omega)$$

Dans le cas contraire, on $\omega \notin A$, et dans cette situation on a encore

$$(1 + u)^{1_A(\omega)} = 1 = 1 + u \ 1_A(\omega)$$

Il est alors clair que

$$(1 + u)^{\sum_{i=1}^n 1_{A_i}} = \prod_{i=1}^n (1 + u)^{1_{A_i}} = \prod_{i=1}^n (1 + u \ 1_{A_i})$$

En utilisant à nouveau la formule (2), on trouve que

$$\begin{aligned}(1+u)^{\sum_{i=1}^n 1_{A_i}} &= \prod_{i=1}^n (1+u\ 1_{A_i}) \\ &= 1+\sum_{p=1}^n \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} u^p\ 1_{A_{i_1}}\ldots 1_{A_{i_p}}\end{aligned}$$

En sommant sur tous l'espace Ω, on obtient l'identité recherchée

$$\sum_{\omega\in\Omega}(1+u)^{\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)}\mathbb{P}(\omega) = 1+\sum_{p=1}^n \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} u^p\ \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_p})$$

5. Si on pose $u=-1$, alors on a

$$0^{\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)} = 1_0[\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)] = 1_{\cap_{i=1}^n A_i^c}(\omega) = 1_{[\cup_{i=1}^n A_i]^c}(\omega)$$

Il en découle la formule

$$\begin{aligned}\sum_{\omega} 1_{[\cup_{i=1}^n A_i]^c}(\omega) &= \mathbb{P}([\cup_{i=1}^n A_i]^c) = 1-\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) \\ &= 1+\sum_{p=1}^n \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^p\ \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_p})\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule de Poincaré

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{p=1}^n \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} (-1)^{p-1}\ \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_p})$$

■