École Polytechnique **Cours: MAP311**
Projet de Simulation

Modèles fractals dans la nature

Responsable du projet: Pierre Del Moral pierre.del-moral@inria.fr

Présentation
Les formes fractales sont des modèles mathématiques hautement symétriques. On a beau les tourner ou les observer avec une loupe, on retrouve toujours les mêmes images. Ces formes sont donc invariantes par l'action d'un certain nombre d'opérations. C'est ce que l'on appelle en mathématique, des point fixes de transformations du plan ou de l'espace. Ces objets tout autant artistiques que mathématiques ont été introduits au début des années 80 par B. Mandelbrot [3]. On peut mesurer aisément la nature fractale de certains végétaux tels le chou romanesco, certains phénomènes physiques tels la formation du flocon de neige de Von Koch, les turbulences atmosphériques, le relief des surfaces de planètes ou les évolutions de cours d'actions dans les marchés financiers. Selon certains auteurs, tels B. Sapoval [4], les propriétés de symétrie des fractals pourraient bien être associées à des principes d'universalité. Les mêmes structures géométriques fractales se développent dans des conditions totalement différentes sur des objets en apparence sans aucun rapport : les dépôts électrolitiques sous un champ électromagnétique, les croissances de colonies bactérienne, les angiogramme de la rétine humaine, les arborescences de cuivre. Pour une discussion plus approfondie, nous renvoyons aux l'ouvrages [1, 2].

Répartitions uniformes et le discontinuum de Cantor
On considère le couple de transformations $S_0(x) = x/2$ et $S_1(x) = S_0(x) + 1/2$ du segment unité $I = [0, 1]$, qui associent à un point les points à mi-distance des extrémités.

1. Vérifier que les applications S_0 et S_1 sont contractantes en calculant leurs coefficients de Lipschitz; puis montrer que I est donc un point fixe de la transformation ensembliste
$$S \ : \ J \subset I \mapsto S(J) = S_0(J) \cup S_1(J) \subset I \tag{1}$$

2. Vérifier que la mesure uniforme sur $[0, 1]$ est une mesure invariante de la chaîne de Markov définie par la formule suivante
$$X_n = S_{\epsilon_n}(X_{n-1}) \tag{2}$$
où ϵ_n désigne une suite de variables aléatoires, indépendantes, et de même loi $\mathbb{P}(\epsilon_n = 0) = \mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = 1/2$.

3. Illustrer la convergence de la chaîne de Markov vers la mesure invariante uniforme sur $[0,1]$ par les histogrammes des mesures d'occupation des états visités X_p, $0 \leq p \leq n$, sur différents horizons temporels.

On considère désormais le couple de transformations $S_0(x) = x/3$, $S_1(x) = S_0(x) + 2/3$ du segment unité $I = [0,1]$, et l'on note X_n la chaîne de Markov définie par les formules (2).

1. Vérifier que les applications S_0 et S_1 sont contractantes, et calculer leurs coefficients de Lipschitz. On note I_n la suite d'ensembles définis par la formule $I_n = S(I_{n-1})$, partant de $I_0 = I$, avec la transformation ensembliste S définie en (1). Vérifier que le discontinuum de Cantor $I_\infty = \cap_{n \geq 1} I_n$ est un point fixe de la transformation S. Montrer que les ensembles $J_n = I_n^c$ forment une suite d'ensembles de longueur $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2. Estimer la distance entre X_n et I_∞. Si μ désigne la distribution de la série aléatoire $2\sum_{n\geq 0} 3^{-(n+1)}\epsilon_n$ où $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ désigne une suite de variable indépendantes de même loi que ϵ_1, vérifier que μ est une mesure invariante de la chaîne de Markov X_n.

3. Illustrer la convergence de la chaîne de Markov vers la mesure invariante μ par les histogrammes des mesures d'occupation des états visités X_p, $0 \leq p \leq n$, sur différents horizons temporels.

Images fractales symétriques

La plupart des images fractales sont associées à des points fixes de transformations ensemblistes de la forme suivante

$$T = \cup_{g \in G}\, gS \quad : \quad I \subset \mathbb{R}^2 \quad \mapsto \quad T(I) = \cup_{g \in G}\, g(S(I))$$

où G désigne un groupe de symétries d'ordre $|G|$, et S une transformation affine du plan donnée en terme d'une matrice contractante et d'un vecteur

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On peut générer ces images fractales en simulant la chaîne de Markov $X_n = (g_n S)(X_{n-1})$, définie en choisissant au hasard à chaque itération une transformation g_n dans l'ensemble G.

1. Vérifier que la transformation S contracte la distance euclidienne si et seulement si

$$(a_{1,1}x + a_{1,2}y)^2 + (a_{2,1}x + a_{2,2}y)^2 < x^2 + y^2$$

pour tout couple de nombres $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que les conditions suivantes

$$(a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2) < 1 + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})^2$$

$$\text{avec} \qquad (a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2) < 1 \quad \text{et} \quad (a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2) < 1$$

sont nécessaires et suffisantes pour que S soit une contraction

2. On notera par la suite $\mathbb{Z}_m = \left\{ r_{\frac{2\pi}{m}}^k \ : \ 0 \leq k < m \right\}$ le groupe cyclique d'ordre $m \geq 1$ (où r_α désigne la rotation d'angle α, et la convention $r_\alpha^0 = Id$, lorsque $\alpha = 0$). On rappelle que le groupe des symétries s'un polygone régulier à m cotés C_m (centré en l'origine) est donné par le groupe diédral $\mathbb{D}_m = \mathbb{Z}_m \cup R(\mathbb{Z}_m)$, où R désigne la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

   Le triangle, le pentagone, et l'hexagone de Sierpinski correspondent respectivement aux groupes de symétrie $G = \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6\}$, et aux jeux de paramètres

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Le Soleil pyrotechnique correspond au groupe de symétrie $G = \mathbb{Z}_9$ et aux paramètres

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -0,35 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

   Enfin, l'Abeille correspond au groupe de symétrie $G = \mathbb{D}_3$ et au jeu de paramètres

$$A = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,35 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer les symétries des points fixes $I = T(I) \in \mathbb{R}^2$ des transformations ensemblistes T correspondant à ces cinq modèles. Dans chaque situation, illustrer la convergence des chaînes de Markov $X_n = (g_n S)(X_{n-1})$, définies en choisissant au hasard à chaque itération une transformation g_n dans l'ensemble G.

Simulation de végétations fractales

1. On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ avec

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = 0.01 \quad \mathbb{P}(\epsilon_n = 2) = 0.85 \quad \mathbb{P}(\epsilon_n = 3) = \mathbb{P}(\epsilon_n = 4) = 0.07$$

   Pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on choisit des fonctions affines $S_i(x) = A_i.x + b_i$ avec les matrices A_i et le vecteurs b_i définis ci-dessous

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ A_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \ A_4 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \ b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

   Vérifier les propriétés de contraction des matrices A_i, et simuler la mesure d'occupation de la chaînes de Markov $X_n = S_{\epsilon_n}(X_{n-1})$.

2. On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ avec
$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_n = 0) = 0.2993$$
Pour chaque $i = 0, 1$, on choisit des fonctions affines $S_i(x) = A_i.x + b_i$ avec les matrices
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3733 \\ 0.06 & 0.6 \end{pmatrix} \quad b_0 = \begin{pmatrix} +0.3533 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.1867 \\ 0.1371 & 0.8 \end{pmatrix}$$
et $b_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$. Vérifier les propriétés de contraction des matrices A_i, et simuler la mesure d'occupation de la chaînes de Markov $X_n = S_{\epsilon_n}(X_{n-1})$.

3. On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli ϵ_n uniformes sur $\{1, 2, 3\}$. Pour chaque $i = 1, 2, 3$, on choisit des fonctions affines $S_i(x) = A_i.x + b_i$ avec les matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) & -r\ \sin(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) & r\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{r}{2}\cos(\varphi) \\ c - \frac{r}{2}\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} q\ \cos(\psi) & -r\ \sin(\psi) \\ q\ \sin(\psi) & r\ \cos(\psi) \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{q}{2}\cos(\psi) \\ \frac{3c}{5} - \frac{q}{2}\sin(\psi) \end{pmatrix}$$
Les paramètres précédents sont définis par
$$\begin{array}{rcl} c & = & 0.255, \qquad r = 0.75, \qquad q = 0.625 \\ \varphi & = & -\frac{\pi}{8}, \qquad \psi = \frac{\pi}{5}, \qquad |X_0| \leq 1. \end{array}$$
Vérifier les propriétés de contraction des matrices A_i, et simuler la mesure d'occupation de la chaînes de Markov $X_n = S_{\epsilon_n}(X_{n-1})$.

References

[1] N. Bartoli, P. Del Moral. *Simulations et Algorithmes Stochastiques* Cépaduès Édition. (2001).

[2] M. Field, M. Golubitsky, *La symétrie du chaos, à la recherche des liens entre mathématiques et nature*, Inter-Éditions, Paris (1993).

[3] B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature.* W.H. Freeman & Co. (1982).

[4] B. Sapoval (1997). Universalités et fractales. Jeux d'enfants ou délits d'initié. Flammarion Paris.