1. *Montrer que*
$$W_{p,n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_n^i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$
2. *Lorsque $\Delta \to 0$, vérifier les équivalences suivantes*
$$np' \simeq \frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\ (\rho + \sigma^2 + \sigma/\sqrt{\Delta}) \quad \text{et} \quad np^\star \simeq \frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}} \left(\rho + \sigma/\sqrt{\Delta}\right)$$
et
$$\sqrt{np'(1-p')} \simeq \sqrt{np^\star(1-p^\star)} \simeq \frac{\sqrt{T}}{(2\sqrt{\Delta})}$$
et enfin
$$k_0 \simeq \frac{1}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}} \left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$
En déduire les estimations
$$\begin{aligned} \frac{np' - k_0}{\sqrt{np'(1-p')}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(T\ \left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log\left(s_0/K\right)\right) \\ \frac{np^\star - k_0}{\sqrt{np^\star(1-p^\star)}} &\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(T\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \log\left(s_0/K\right)\right) \end{aligned}$$
3. *En utilisant le fait que*
$$F_{n,p}\left(k_0\right) = \mathbb{P}\left(W_{p,n} \geq \frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \overset{n\sim\infty}{\simeq} F\left(\frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
montrer que l'on a
$$\begin{aligned} V_0(\Phi) \ \simeq\ s_0\ F & \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\ \left(\rho + \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \\ & -e^{-\rho T}\ K\ F\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\ \left(\rho - \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \end{aligned}$$

4.5 Analyse mathématique

4.5.1 Actualisation

On considère un marché financier défini, sur un espace probabilisé et filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, par l'évolution d'un couple d'actifs
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta S_k^1 & = & S_{k-1}^1\ (1 + \Delta U_k^1) \\ \Delta S_k^2 & = & S_{k-1}^2\ (1 + \Delta U_k^2) \end{array} \right.$$

Le premier titre à un rôle bien particulier. Il représente un placement sans risque, avec un rendement prévisible ; c'est à dire que
$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad (1 + \Delta U_k^1) = \frac{\Delta S_k^1}{S_{k-1}^1} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

On conviendra que l'on a

$$S_0^1 = 1 \ , \quad \text{et} \quad (1 + U_k^1(\omega)) > 1$$

pour chaque aléa $\omega \in \Omega$, et pour tout $1 \leq k \leq n$.

Le rendement de l'actif risqué n'est pas prévisible, sinon adapté à la filtration d'information

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad (1 + \Delta U_k^2) = \frac{\Delta S_k^2}{S_{k-1}^2} \Subset \mathcal{F}_k$$

On conviendra que la valeur initiale de cet actif est connues

$$S_0^1 = s_0 > 0 \ , \quad \text{et} \quad (1 + U_k^1(\omega)) > 0$$

pour chaque aléa $\omega \in \Omega$, et pour tout $1 \leq k \leq n$.

Le coefficient d'actualisation des actifs est donnée par le processus aléatoire

$$\beta_k = \frac{1}{\mathcal{E}_k(U^1)} \ (\in [0,1]) \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_k(U^1) = S_k^1 = \prod_{l=1}^{k} (1 + \Delta U_l^1)$$

Les prix ré-actualisé sont alors définis par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \overline{S}_k^1 = \beta_k \ S_k^1 = 1 \quad \text{et} \quad \overline{S}_k^2 = \beta_k \ S_k^2 \leq S_k^2$$

4.5.2 Gestion de portefeuilles

Le portefeuille d'un investisseur est défini par la donnée d'un processus aléatoire prévisible

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad \Phi_k = (\Phi_k^1, \Phi_k^2) \Subset \mathcal{F}_{k-1}$$

A chaque instant $1 \leq k \leq n$, le couple (Φ_k^1, Φ_k^2) représente la gestion du couple d'actifs (S_k^1, S_k^2). Ainsi,

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 \ S_0^1 + \Phi_0^2 \ S_0^2 = \Phi_1^1 + \Phi_0^2 \ s_0$$

représente le coût d'acquisition du portefeuille. La valeur de ce dernier, à la $k^{\text{ième}}$ période est donnée par

$$\begin{aligned} V_k(\Phi) &= \Phi_k^1 \ S_k^1 + \Phi_k^2 \ S_k^2 \\ &= \Phi_{k+1}^1 \ S_k^1 + \Phi_{k+1}^2 \ S_k^2 \quad \textbf{(Autofinancement)} \end{aligned}$$

La condition d'autofinancement entraîne que

$$\begin{aligned} \Delta V_{k+1}(\Phi) &= V_{k+1}(\Phi) - V_k(\Phi) \\ &= \Phi_{k+1}^1 \ [S_{k+1}^1 - S_k^1] + \Phi_{k+1}^2 \ [S_{k+1}^2 - S_k^2] \\ &= \Phi_{k+1}^1 \ \Delta S_{k+1}^1 + \Phi_{k+1}^2 \ \Delta S_{k+1}^2 \end{aligned}$$

De plus, cette condition entraîne que les parts d'actifs non risqués Φ_{k+1}^1 sont déterminées par la formule

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}^1 &= \frac{1}{S_k^1} \times \left(V_k(\Phi) - \Phi_{k+1}^2 \ S_k^2 \right) \\ &= \overline{V}_k(\Phi) - \Phi_{k+1}^2 \ \overline{S}_k^2 \end{aligned}$$

où $\overline{V}_k(\Phi) = \beta_k\ V_k(\Phi)$ représente la valeur réactualisée du portefeuille $V_k(\Phi)$ à la $k^{\text{ième}}$ période.

Enfin, toujours d'après la condition d'autofinancement, l'évolution de la valeur du portefeuille réactualisé ne dépend que de l'évolution du titre risqué. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{V}_{k+1}(\Phi) &= \beta_{k+1}\ V_{k+1}(\Phi) - \beta_k\ V_k(\Phi) \\
&= [\Phi^1_{k+1}\ \overline{S}^1_{k+1} + \Phi^2_{k+1}\ \overline{S}^2_{k+1}] - [\Phi^1_{k+1}\ \overline{S}^1_k + \Phi^2_{k+1}\ \overline{S}^2_k] \\
&= \Phi^1_{k+1}\ \Delta\overline{S}^1_{k+1} + \Phi^2_{k+1}\ \Delta\overline{S}^2_{k+1} \\
&= \Phi^2_{k+1}\ \Delta\overline{S}^2_{k+1}
\end{aligned}$$

4.5.3 Arbitrage et viabilité des marchés

Définition 4.5.1 *Une stratégie d'arbitrage est une gestion de portefeuille (autofinancée)* $(\Phi_k)_{1\leq k\leq n}$ *telle que*

$$V_0(\Phi) = 0\ , \quad V_n(\Phi) \geq 0\ , \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(V_n(\Phi) > 0) > 0 \tag{4.5}$$

On dit qu'un marché est viable, s'il n'existe aucune stratégie d'arbitrage.

On notera que la condition $\mathbb{P}(V_n(\Phi) > 0) > 0$ implique qu'il existe au moins un aléa $\omega \in \Omega$ pour lequel $V_n(\Phi)(\omega) > 0$ (sinon on aurait $\{V_n(\Phi) > 0)\} = \emptyset$ et $\mathbb{P}(V_n(\Phi) > 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$). Inversement, l'existence d'un tel aléa ω (avec $\mathbb{P}(\omega) > 0$) entraîne que $\mathbb{P}(V_n(\Phi) > 0) > 0$. Cette définition d'arbitrage est bien donc équivalente à celle introduite dans la section 4.1.2.

L'arbitrage permet donc, sans aucun investissement initial ($V_0(\Phi) = 0$), de ne jamais perdre de l'argent à l'échéance ($V_n(\Phi) \geq 0$), tout en ayant une possibilité de réaliser un gain ($\mathbb{P}(V_n(\Phi) > 0) > 0$). Ces possibilités d'arbitrage, et ces évènements inattendus (ω t.q. $V_n(\Phi)(\omega) > 0$), tels les délits d'initiés, sont en principe interdits, et contrôlés par les autorités de régulation, telle la Cours des comptes. La morale moderne semble ainsi reposer sur le principe qu'il est interdit de s'enrichir sans prendre de risques...

On vérifie sans trop de peine que ces définitions de l'arbitrage peut être reformulée de façon équivalente en remplaçant $(V_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}$ par les valeurs du portefeuille réactualisé $(\overline{V}_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}$

$$(4.5) \Longleftrightarrow \overline{V}_0(\Phi) = 0\ , \quad \overline{V}_n(\Phi) \geq 0\ , \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\overline{V}_n(\Phi) > 0) > 0$$

Proposition 4.5.1 *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*

1. $\exists 1 \leq k \leq n \quad \exists \phi \in \mathcal{F}_{k-1}$ *tels que*

$$\phi\ \Delta\overline{S}^2_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\phi\ \Delta\overline{S}^2_k > 0) > 0$$

2. *Il existe une stratégie d'arbitrage* $(\Phi_k)_{1\leq k\leq n}$ *telle que*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \overline{V}_k(\Phi) \geq 0$$

3. *Il existe une stratégie d'arbitrage* $(\Phi_k)_{1\leq k\leq n}$.

Preuve:
(1) $\Rightarrow$ (2) : On pose simplement $\Phi_l^2 = \phi \ 1_k(l)$, où le couple (k, ϕ) est tel que

$$\phi \ \Delta\overline{S}_k^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\phi \ \Delta\overline{S}_k^2 > 0) > 0$$

Dans ce cas, on a

$$\forall 0 \leq l \leq n \qquad \overline{V}_l = 0 + \sum_{m=1}^{l} \Phi_m^2 \ \Delta\overline{S}_m^2 = 1_{l \geq k} \ \phi \ \Delta\overline{S}_k^2 \geq 0$$

et à l'échéance

$$\overline{V}_n = \phi \ \Delta\overline{S}_k^2 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{V}_n > 0) = \mathbb{P}(\phi \ \Delta\overline{S}_k^2 > 0) > 0$$

Il reste cependant à vérifier que la stratégie que nous venons de définir

$$\forall 1 \leq l \leq n \qquad \Phi_l^2 = \phi \ 1_{k=l}$$

est bien autofinancée. Pour cela on rappelle que les parts de titres non risqués Φ_l^1 sont nécessairement données par la formule

$$\begin{aligned} \Phi_l^1 &= \frac{1}{S_{l-1}^1} \times \left(V_{l-1}(\Phi) - \Phi_l^2 \ S_{l-1}^2 \right) \\ &= \overline{V}_{l-1}(\Phi) - \Phi_l^2 \ \overline{S}_{l-1}^2 = 1_{(l-1) \geq k} \ \phi \ \Delta\overline{S}_k^2 - \phi \ 1_{k=l} \ \overline{S}_{l-1}^2 \end{aligned}$$

Par construction, nous avons donc

$$\Phi_l^1 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l < k \\ -\phi \ \overline{S}_{k-1}^2 & \text{si} \quad l = k \\ \phi \ \Delta\overline{S}_k^2 & \text{si} \quad l > k \end{cases}$$

Il est donc clair que

$$\forall l \notin \{k, k+1\} \qquad \Delta\Phi_l^1 = 0 \ , \quad \Delta\Phi_k^1 = -\phi \ \overline{S}_{k-1}^2 \quad \text{et} \quad \Delta\Phi_{k+1}^1 = \phi \ \overline{S}_k^2$$

D'autre part, par définition de $\Phi_l^2 = \phi \ 1_k(l)$, nous avons aussi

$$\forall l \notin \{k, k+1\} \quad \Delta\Phi_l^2 = 0 \ , \quad \Delta\Phi_k^1 = \phi \quad \text{et} \quad \Delta\Phi_{k+1}^1 = -\phi$$

On en conclut que

$$\forall 1 \leq l \leq n \qquad \Delta\Phi_k^1 + \Delta\Phi_k^2 \ \overline{S}_{l-1}^2 = 0$$

Il en découle que

$$\Phi_l^1 \ S_{l-1}^1 + \Phi_l^2 \ S_{l-1}^2 = \Phi_{l-1}^1 \ S_{l-1}^1 + \Phi_{l-1}^2 \ S_{l-1}^2$$

Ceci achève la preuve de la condition d'autofinancement.
(2) $\Rightarrow$ (3) : trivial.
(3) $\Rightarrow$ (1) : Soit $(\Phi_k)_{1 \leq k \leq n}$ une stratégie d'arbitrage. On introduit les fonctions

$$a(k) = \mathbb{P}(\overline{V}_k(\Phi) \geq 0) \quad \text{et} \quad b(k) = \mathbb{P}(\overline{V}_k(\Phi) > 0) (\leq a(k))$$

On note $k^\star$, le premier instant où l'on a

$$a(k^\star) = 1 \quad \text{et} \quad a(k^\star) > 0$$

Cet instant existe, et on a $k^\star > 0$, car nous avons à l'échéance

$$a(n) = \mathbb{P}(\overline{V}_n(\Phi) \geq 0) = 1 \quad \text{et} \quad b(n) = \mathbb{P}(\overline{V}_n(\Phi) > 0) > 0$$

et à l'origine

$$a(0) = \mathbb{P}(\overline{V}_0(\Phi) \geq 0) = 1 \quad \text{et} \quad b(0) = \mathbb{P}(\overline{V}_0(\Phi) > 0) = 0$$

Au temps précédent $(k^\star - 1) \geq 0$, deux cas se présentent

1. Soit $a(k^\star - 1) < 1$, et dans ce cas $\mathbb{P}(\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi) < 0) > 0$.
2. Soit $b(k^\star - 1) = 0$, ou de façon équivalente $\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi) \leq 0$.

1. Examinons tout d'abord le premier cas,

$$a(k^\star - 1) < 1 \quad \left(\Longrightarrow \mathbb{P}(\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi) < 0) > 0\right)$$

Dans cette situation, il suffit de poser

$$\phi = \Phi^2_{k^\star}\ 1_{\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)<0} \in \mathcal{F}_{k^\star-1}$$

En effet, pour ce choix nous avons

$$\begin{aligned} \phi\ \Delta\overline{S}^2_{k^\star} &= 1_{\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)<0}\ \Phi^2_{k^\star}\ \Delta\overline{S}^2_{k^\star} \\ &= 1_{\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)<0}\ \Delta\overline{V}_{k^\star}(\Phi) \\ &= 1_{\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)<0}\ [\overline{V}_{k^\star}(\Phi) - \overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)] \geq 0 \end{aligned}$$

La positivité provient du fait que

$$1_{\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)<0}\ \times (-\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)) \geq 0$$

et

$$a(k^\star) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{V}_{k^\star}(\Phi) \geq 0$$

On a donc montré que la condition (1) est satisfaite lorsque $k = k^\star$.

2. Dans la seconde situation

$$b(k^\star - 1) = 0 \quad \left(\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi) \leq 0\right)$$

on pose plus simplement $\phi = \Phi^2_{k^\star}$, et on vérifie que

$$\begin{aligned} \phi\ \Delta\overline{S}^2_{k^\star} &= \Phi^2_{k^\star}\ \Delta\overline{S}^2_{k^\star} \\ &= \Delta\overline{V}_{k^\star}(\Phi) = [\overline{V}_{k^\star}(\Phi) - \overline{V}_{k^\star-1}(\Phi)] \\ &\geq \overline{V}_{k^\star}(\Phi) \end{aligned}$$

On obtient donc l'inclusion entre 'évènements

$$\{\overline{V}_{k^\star}(\Phi) > 0\} \subset \{\phi\ \Delta\overline{S}^2_{k^\star} > 0\}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\phi\ \Delta\overline{S}^2_{k^\star} > 0) \geq \mathbb{P}(\overline{V}_{k^\star}(\Phi) > 0) > 0$$

Dans les deux situations que nous venons d'examiner, on remarque que sur l'évènement $\{\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi) < 0\}$, on reçoit une somme de $(-\overline{V}_{k^\star-1}(\Phi))$ Euros que l'on réinvestit dans l'achat de titres risquées. ∎

4.5.4 Neutralité des marchés

Définition 4.5.2 *Une probabilité à risque neutre est une mesure de probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur l'espace filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n})$ représentant le marché financier ; équivalente à la probabilité $\mathbb{P}$, et sous laquelle le cours des actifs risqués réactualisés $(\overline{S}^2_k)_{0\leq k\leq n}$ forme une martingale. Cette mesure, lorsqu'elle existe, est parfois appelée mesure martingale.*

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.6 (page 90), et de la proposition 3.1.1 (page 82).

Proposition 4.5.2 *Sous réserve de l'existence d'une probabilité à risque neutre $\mathbb{P}^\star$ sur l'espace filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n})$, nous avons les équivalences suivantes*

$$\begin{aligned}(\overline{S}^2_k)_{0\leq k\leq n}\ \ \mathbb{P}^\star - \textit{martingale} &\iff (\overline{S}^2_k - S^1_k)_{0\leq k\leq n}\quad \mathbb{P}^\star - \textit{martingale}\\ &\iff \forall\Phi\ \ (\overline{V}_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}\ \ \mathbb{P}^\star - \textit{martingale}\end{aligned}$$

Exercice 4.5.1 *Sous réserve de l'existence d'une probabilité à risque neutre $\mathbb{P}^\star$ sur l'espace filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n})$, montrer qu'il ne peut exister de possibilité d'arbitrage.*

Théorème 4.5.1 *Un marché financier est viable si, et seulement si, il existe une probabilité à risque neutre.*

Preuve:
D'après l'exercice 4.5.1, il suffit de montrer qu'il existe une possibilité de neutraliser un marché viable. Pour vérifier cette propriété, on définit sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des v.a. réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$, le produit scalaire

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)Y(\Omega)$$

On note $\mathcal{V}$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$, formé par les v.a. $\overline{V}_n(\Phi)$, où $\Phi = (\Phi_k)_{1\leq k\leq n}$ parcours l'ensemble des portefeuilles autofinancés (avec $\overline{V}_0(\Phi) = 0$). Pour vérifier que $\mathcal{V}$ est bien un sous-espace vectoriel (en abrégé s.e.v.), on considère un couple de stratégies d'aménagement (Φ, Φ'), telles que

$$\overline{V}_0(\Phi) = 0 = \overline{V}_0(\Phi')$$

et conduisant à deux valeurs données $\overline{V}_n(\Phi)$, et $\overline{V}_n(\Phi')$. Pour tout couple de réels (a, a'),

$$a\ \Phi + a'\ \Phi' = (a\ \Phi_k + a'\ \Phi'_k)_{1 \leq k \leq n}$$

est à nouveau une stratégie d'aménagement de portefeuilles autofinancée. De plus, on a

$$\overline{V}_k(a\ \Phi + a'\ \Phi') = a\ \overline{V}_k(\Phi) + a'\ \overline{V}_k(\Phi')$$

et par conséquent,

$$\overline{V}_0(a\ \Phi + a'\ \Phi') = 0 \quad \text{et} \quad a\ \overline{V}_n(\Phi) + a'\ \overline{V}_n(\Phi') \in \mathcal{V}$$

Ceci démontre que $\mathcal{V}$ est un s.e.v. de $\mathcal{E}$. On notera que $\mathcal{V}$ est un s.e.v. de $\mathcal{E}$ de dimension fini, et donc $\mathcal{V}$ est un s.e.v. fermé de $\mathcal{E}$.

Le marché étant supposé viable, le s.e.v. $\mathcal{V}$ ne contient aucune v.a. $\overline{V}_n(\Phi)$ positive, sinon la seule v.a. nulle $\overline{V}_n(\Phi) = 0$.

L'espace $\mathcal{V}$ est donc disjoint du sous-ensemble convexe et compact $\mathcal{K}$, défini par

$$\mathcal{K} = \{X : \omega \to [0,1]\ :\ \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1\}$$

On pose alors

$$\mathcal{C} = \mathcal{K} + \mathcal{V} = \{X + V_n(\Phi)\ :\ X \in \mathcal{K} \text{ et } V_n(\Phi) \in \mathcal{V}\}$$

On vérifie aisément que $\mathcal{C}$ est un ensemble convexe, fermé, et ne contenant pas la v.a. nulle. En effet, on a

$$(0 \in \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{K} = \emptyset) \Longrightarrow 0 \notin \mathcal{C} = \mathcal{K} + \mathcal{V}$$

On note C le point de $\mathcal{C}$ à plus courte distance de cette v.a. nulle, autrement dit C correspond au point de $\mathcal{C}$ de norme minimale.

Par construction, nous avons

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \quad \forall \epsilon \in (0,1] \qquad C + \epsilon\ (Y - C) \in \mathcal{C}$$

et

$$\|C\|^2 \leq \|C + \epsilon(Y - C)\|^2 (= \|C\|^2 + 2\epsilon \langle C, (Y - C)\rangle + \epsilon^2 \|(Y - C)\|^2$$

Par conséquent, nous avons

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \quad \forall \epsilon \in (0,1] \qquad 2\langle C, (Y - C)\rangle + \epsilon \|(Y - C)\|^2 \geq 0$$

En faisant tendre $\epsilon \downarrow 0$, on obtient

$$\forall Y \in \mathcal{C} (\supset \mathcal{K}) \qquad \langle C, Y\rangle \geq \|C\|^2 > 0 \tag{4.6}$$

Cette propriété entraîne que

$$\forall (\lambda, X, V_n(\Phi)) \in (\mathbb{R} \times \mathcal{K} \times \mathcal{V}) \qquad \langle C, X + \lambda V_n(\Phi)\rangle = \langle C, X\rangle + \lambda\ \langle C, V_n(\Phi)\rangle \geq \|C\|^2$$

Cette minoration ne peut clairement être satisfaite pour tous les λ, sauf si l'on a

$$\forall V_n(\Phi) \in \mathcal{V} \qquad \langle C, V_n(\Phi)\rangle = 0$$

On pose alors

$$\mathbb{P}^\star(\omega) = C(\omega)/\|C\|$$

et la propriété (4.6) entraîne que

$$\forall Y \in \mathcal{K} \qquad \langle \mathbb{P}^\star, Y \rangle = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}^\star(\omega) > 0$$

Ceci entraîne que

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathbb{P}^\star(\omega) > 0$$

D'autre part, pour tout portefeuille autofinancé avec

$$(\Phi_0^1, \Phi_0^2) = (0,0) \Longrightarrow V_0(\Phi) = \Phi_0^1\ S_0^1 + \Phi_0^2\ S_0^2 = 0$$

on a

$$\langle \mathbb{P}^\star, V_n(\Phi)\rangle = \sum_{\omega\in\Omega} V_n(\Phi)(\omega)\mathbb{P}^\star(\omega) = \mathbb{E}^\star(\sum_{k=1}^n \Phi_k^2\ \Delta\overline{S}_k^2) = 0 = \mathbb{E}^\star(\Phi_0^2\ \overline{S}_0^2)$$

En invoquant la proposition 3.1.1, page 82, on en déduit que les actifs risqués réactualisés $(\overline{S}_k^2)_{0\leq k\leq n}$ forment une $\mathbb{P}^\star$-martingale. ■

4.5.5 Réplication d'options et complétude

Dans cette section, nous supposerons implicitement que le modèle de marché financier $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$ est viable.

Définition 4.5.3 *Une option d'échéance n, ou encore de date d'exercice n, est une v.a. positive $f \in \mathcal{F}_n$. La v.a. $\overline{f} = \beta_n\ f$ est appelée l'option actualisée de f. On dit que l'option f est simulable, ou réplicable, s'il existe une stratégie autofinancée $\Phi = (\Phi_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que $f = V_n(\Phi)$, ou de façon équivalente telle que $\overline{f} = \overline{V}_n(\Phi)$.*

Un marché financier est dit complet lorsque toutes les options sont réplicables.

On notera que sous une mesure de probabilités à risque neutre $\mathbb{P}^\star$, les valeurs des portefeuilles réactualisés forment des martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$. Ainsi, les options réplicables $\overline{f} = \overline{V}_n(\Phi)$ sont telles que

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}^\star(\overline{f} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi) \mid \mathcal{F}_k) = \overline{V}_k(\Phi)$$

En particulier, leur $\mathbb{P}^\star$-moyenne actualisées coïncident avec le prix d'acquisition du portefeuille qui la réplique

$$\mathbb{E}^\star(\overline{f}) = \mathbb{E}^\star(\overline{f} \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_0(\Phi) \mid \mathcal{F}_0) = \overline{V}_0(\Phi)$$

Théorème 4.5.2 *Un marché financier (viable) est complet si, et seulement si, il existe une unique mesure de probabilité à risque neutre.*

Preuve:
Supposons que le marché est complet, et qu'il existe néanmoins deux probabilités à risque neutre, notées $\mathbb{P}_1^\star$, et $\mathbb{P}_2^\star$. Si ces mesures sont distinctes, on peut choisir un évènement $A \subset \Omega$, tel que $\mathbb{P}_1^\star(A) \neq \mathbb{P}_2^\star(A)$. D'après la complétude du marché, l'option réactualisée $\overline{f} = 1_A = \overline{V}_n(\Phi)$ est réplicable par une gestion de portefeuille Φ. Le processus $(\overline{V}_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}$ étant à la fois une $\mathbb{P}_1^\star$-martingale, et une $\mathbb{P}_2^\star$-martingale, nous avons simultanément

$$\mathbb{P}_1^\star(A) = \mathbb{E}_1^\star(\overline{f}) = \overline{V}_0(\Phi) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_2^\star(A) = \mathbb{E}_2^\star(\overline{f}) = \overline{V}_0(\Phi)$$

Notre raisonnement nous conduit donc à la contradiction $\mathbb{P}_1^\star(A) = \mathbb{P}_2^\star(A)$.

Supposons désormais qu'il existe une seule probabilité mesure de probabilité à risque neutre $\mathbb{P}^\star$ dans un marché incomplet. Dans cette situation, le sous espace formé des valeurs à l'échéance de portefeuilles réactualisés

$$\mathcal{V} = \{\overline{V}_n(\Phi) \ : \ \Phi \text{ autofinancé}\}$$

est un sous espace strict de l'espace

$$\mathcal{E} = \{X \ : \ X \text{ v.a. réelles}\}$$

muni du produit scalaire

$$(X,Y) \in \mathcal{E}\times\mathcal{E} \mapsto \langle X,Y\rangle =_{\text{déf.}} \mathbb{E}^\star(XY)$$

Il existe donc une v.a. X non nulle, orthogonale à $\mathcal{V}$ (donc aussi orthogonale aux constantes). Autrement dit, nous avons pour toute option réplicable $\overline{V}_n(\Phi)$ par une gestion de portefeuille Φ

$$\mathbb{E}^\star(X\times 1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^\star(X\times \overline{V}_n(\Phi)) = 0$$

On choisit un réel positif a suffisamment grand de sorte que $X + a > 0$. On associe à ce dernier la probabilité $\mathbb{P}_a^\star$ définie par

$$\forall \omega\in\Omega \qquad \mathbb{P}_a^\star(\omega) = \frac{a + X(\omega)}{a} \times \mathbb{P}^\star(\omega)$$

On vérifie aisément les deux faits suivants :

$$\mathbb{E}^\star(X) = 0 \Longrightarrow \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}_a^\star(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{a+X(\omega)}{a}\ \mathbb{P}^\star(\omega) = 1$$

et

$$(\exists \omega\in\Omega \quad : \quad X(\omega)\neq 0) \Longrightarrow (\exists \omega\in\Omega \quad : \quad \mathbb{P}_a^\star(\omega) \neq \mathbb{P}^\star(\omega))$$

D'autre part, pour toute stratégie de gestion prévisible Φ, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{V}_0(\Phi) + \mathbb{E}_a^\star\left(\sum_{k=1}^n \Phi_k^2\Delta\overline{S}_k^2\right) &= \mathbb{E}_a^\star(\overline{V}_n(\Phi)) \\
&= \mathbb{E}^\star\left(\overline{V}_n(\Phi)\times\frac{a+X(\omega)}{a}\right) = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi)) \\
&= \overline{V}_0(\Phi)
\end{aligned}$$

On en conclut que pour toute stratégie de gestion prévisible Φ

$$\mathbb{E}_a^\star(\sum_{k=1}^n \Phi_k^2 \Delta\overline{S}_k^2) = 0$$

D'après la proposition 3.1.1, on en conclut que $(\overline{S}_k^2)_{0\leq k\leq n}$ est une $\mathbb{P}_a^\star$-martingale, et par conséquent $\mathbb{P}_a^\star$ est aussi une mesure de probabilités à risque neutre. Ceci est en contradiction avec notre hypothèse de départ. ■

4.5.6 Couverture d'options

Soit $\overline{f} \in \mathcal{F}_n$ une fonction de paiement réactualisée sur un marché financier $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$. On rappelle qu'un portefeuille de couverture est une gestion de portefeuille Φ (autofinancée et prévisible), telle que

$$\overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}$$

Du point de vue du vendeur, ou de l'acquéreur de l'option, les prix cohérents de ce droit conditionnel sont donnés respectivement par les formules variationnelles suivantes.

$$\begin{array}{rcl} C^\star(f) & = & \inf\left\{\overline{V}_0(\Phi) \;:\; \exists\Phi \quad \overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}\right\} \\ C_\star(f) & = & \inf\left\{\overline{V}_0(\Phi) \;:\; \exists\Phi \quad \overline{V}_n(\Phi) \leq \overline{f}\right\} \end{array}$$

Dans un marché viable, et pour toute probabilité à risque neutre $\mathbb{P}^\star$, on a toujours

$$C_\star(f) \leq \mathbb{E}^\star(\overline{f}) \leq C^\star(f)$$

Pour vérifier ce couple d'inégalités, on rappelle que sous une probabilité à risque neutre, nous avons

$$\overline{V}_0(\Phi) \quad = \quad \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi)) \leq \mathbb{E}^\star(\overline{f})$$

pour tout portefeuille Φ tel que $\overline{V}_n(\Phi) \leq \overline{f}$. Par définition de $C_\star(f)$, et en prenant le suprémum sur les valeurs $\overline{V}_0(\Phi)$

$$C_\star(f) \leq \mathbb{E}^\star(\overline{f})$$

De même, pour tout portefeuille Φ tel que $\overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}$, nous avons

$$\overline{V}_0(\Phi) \quad = \quad \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi)) \geq \mathbb{E}^\star(\overline{f})$$

Par définition de $C^\star(f)$, et en prenant l'infimum sur les valeurs $\overline{V}_0(\Phi)$, on obtient la minoration désirée

$$C^\star(f) \geq \mathbb{E}^\star(\overline{f})$$

Théorème 4.5.3 *Dans un marché viable et complet $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, nous avons*

$$\forall f \in \mathcal{F}_n \qquad C_\star(f) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = C^\star(f)$$

De plus, il existe une gestion de portefeuille Φ_f telle que

$$\overline{V}_0(\Phi_f) = C^\star(f) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq k \leq n \qquad \overline{V}_k(\Phi_f) = \mathbb{E}^\star(\overline{f} \mid \mathcal{F}_k)$$

Preuve:
Lorsque le marché est complet, il existe une gestion de portefeuille Φ_f répliquant l'option $f \in \mathcal{F}_n$. Cette stratégie est dans l'intersection des deux ensembles sur lesquels les prix du vendeur, et de l'acheteur, sont calculés

$$\Phi_f \in \left\{\Phi : \overline{V}_n(\Phi) \leq \overline{f}\right\} \cap \left\{\Phi : \overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}\right\}$$

On a donc dans ce cas

$$C_\star(f) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = C^\star(f)$$

La dernière assertion provient simplement du fait que pour cette stratégie réplicante Φ_f, nous avons $\overline{V}_n(\Phi) = \overline{f}$. Plus précisément, sous la probabilité à risque neutre $\mathbb{P}^\star$, le portefeuille réactualisé $(\overline{V}_k(\Phi_f))_{0\leq k\leq n}$ est une martingale. Ainsi, $\overline{V}_n(\Phi) = \overline{f}$ correspond au point terminal d'une martingale. D'après les propriétés classiques des martingales décrites dans la proposition 3.1.3, on en conclut que

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \overline{V}_k(\Phi_f) = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}^\star(\overline{f} \mid \mathcal{F}_k)$$

■