**Exercice 4.3.4** *Dans le modèle de marché décrit dans l'exercice 4.3.2, un agent financier émet une option de vente de fonction de paiement réactualisée*

$$\overline{f} = \left(7 - \overline{S}_2^2\right)_+$$

*Déterminer le prix de cette option, et son portefeuille de couverture.*

## 4.4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

### 4.4.1 Introduction

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (en abrégé CRR) est une simplification de modèle binomial étudié dans la section 4.3. Il représente un marché financier élémentaire, et pour le moins simpliste, dans lequel le rendement instantané des actifs risqués sont à tout instant à valeurs dans le même espace à deux points

$$\frac{1}{S_k^2}\ \Delta S_k^2 =_{\text{déf.}} \Delta U_k^2 \in \{b, h\}$$

Autrement dit, nous avons

$$S_k^2 = S_{k-1}^2\ (1 + \Delta U_k^2)$$

Les valeurs $b$, et $h$, représentent une baisse, ou une hausse du rendement. On conviendra que ces fluctuations sont telles que

$$0 < 1 + b < 1 + h$$

Comme dans le modèle binomial, le rendement de l'actif sans risque est supposé constant, avec

$$S_0^1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{S_k^1}\ \Delta S_k^1 =_{\text{déf.}} \Delta U_k^1 = r$$

Autrement dit, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad S_k^1 = S_{k-1}^1\ (1 + \Delta U_k^1) = (1 + r)^k$$

Ce modèle CRR est bien un cas particulier du modèle binomial, où l'actif risqué $S_k^2$ ne peut prendre que deux valeurs possibles, sachant l'information accumulée $\mathcal{F}_{k-1}$ jusqu'à cet instant

$$S_k^2\ \in\ \{S_{k-1}^2 \times (1 + b),\ S_{k-1}^2 \times (1 + h)\}$$

Les valeurs réactualisées des actifs risqués sont données par les formules de récurrence usuelles

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{S}_k^2 &= \overline{S}_k^2 - \overline{S}_{k-1}^2 \\
&= \frac{S_k^2}{(1+r)^k} - \frac{S_{k-1}^2}{(1+r)^{k-1}} = \frac{S_{k-1}^2(1+\Delta U_k^2)}{(1+r)^{k-1}(1+r)} - \frac{S_{k-1}^2}{(1+r)^{k-1}} \\
&= \frac{S_{k-1}^2}{(1+r)^{k-1}} \times \left(\frac{(1+\Delta U_k^2)}{(1+r)} - 1\right) \\
&= \overline{S}_{k-1}^2 \times \frac{\Delta U_k^2 - r}{1+r}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\overline{S}_k^2 = \overline{S}_{k-1}^2 \, \frac{(1+\Delta U_k^2)}{(1+r)} = \overline{S}_0^2 \, \frac{1}{(1+r)^k} \, (1+\Delta U_1^2)\dots(1+\Delta U_k^2)$$

### 4.4.2 Techniques d'arbitrage

Examinons le marché CRR lorsque les rendements des actifs satisfont l'une des conditions suivantes :

1. $r < b < h$
2. $b < h < r$

Dans les deux cas, il est très aisé de gagner beaucoup d'argent à coup sur̂, et sans apport initial !

Par exemple dans la première situation, les actifs risqués ont un rendement supérieur à celui des actifs sans risques. C'est le cas lorsque les comptes épargnes ont des taux plus faibles que les rendements d'actions plus risquées. Dans ce cas, il faut emprunter à la banque, ou vendre à découvert le maximum d'actif non risqués

$$\Phi_1^1 = -\Phi_1^2 \, S_0^2$$

pour acheter le plus possible $\Phi_1^2$ d'actifs risqués. La valeur d'acquisition du portefeuille initial est tout simplement nulle

$$V_0(\Phi) = (-\Phi_1^2 \, S_0^2) \times 1 + \Phi_1^2 \times S_0^2 = 0$$

Sans réaménager notre portefeuille, on attend patiemment jusqu'à la date $n$

$$\forall 1 \leq k < n \qquad (\Phi_k^1, \Phi_k^2) = (-\Phi_1^2 \, S_0^2, \Phi_1^2)$$

A la date $n$, on revend nos $\Phi_1^2$ parts d'actifs risqués, pour rembourser les $\Phi_1^2 \, S_0^2$ parts d'actifs non risqués empruntées initialement. Autrement dit, on utilise à nouveau la stratégie

$$(\Phi_n^1, \Phi_n^2) = (-\Phi_1^2 \, S_0^2, \Phi_1^2)$$

La valeur du portefeuille au temps $n$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned} V_n(\Phi) &= (-\Phi_1^2\ S_0^2) \times (1+r)^n + \Phi_1^2 \times (S_0^2\ (1+\Delta U_1^2) \ldots (1+\Delta U_n^2)) \\ &\geq \Phi_1^2\ S_0^2\ ((1+b)^n - (1+r)^n) \\ &\geq n\ \Phi_1^2\ S_0^2\ (1+b)^{n-1}(b-r) \end{aligned}$$

La dernière sous estimation est déduite de la minoration

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad x^n \geq y^n + n\ x^{n-1}\ (x-y)$$

### 4.4.3 Neutralisation des risques

On conviendra dans cette section que les rendements des actifs sont tels que

$$b < r < h$$

On convient que l'actif risqué a une valeur initiale connue

$$S_0^2 = s_0$$

On note $\Omega = \{h, b\}^n$ l'ensemble des aléas élémentaires associés aux tendances aléatoires des rendements des actifs risqués. Les v.a. $(\Delta U_k^2)_{1 \leq k \leq n}$ sont définies par les fonctions coordonnées canoniques

$$\forall \omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq n} \in \Omega \qquad \forall 1 \leq k \leq n \qquad \Delta U_k^2(\omega) = \omega_k$$

On note enfin

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\Delta U_1^2, \ldots, \Delta U_k^2)$$

la filtration d'information connue à chaque instant $1 \leq k \leq n$, avec la convention $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

**Proposition 4.4.1** *Il existe une seule probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur l'espace des aléas filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n})$ sous laquelle les prix réactualisés de actifs risqués $(\overline{S}_k^2)_{0 \leq k \leq n}$ forment une martingale. De plus, sous $\mathbb{P}^\star$, les v.a. de rendement $(\Delta U_k^2)_{0 \leq k \leq n}$ sont indépendantes et équidistribuées selon la loi*

$$\mathbb{P}^\star(\Delta U_1^2 = b) = 1 - \mathbb{P}^\star(\Delta U_1^2 = h) = \frac{h-r}{h-b}$$

**Preuve:**
L'existence de $\mathbb{P}^\star$ résulte de la série d'équivalences suivantes

$$\mathbb{E}^\star(\overline{S}_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}^\star\left(\overline{S}_{k-1}^2 \; \left(\tfrac{\Delta U_k^2 - r}{1+r}\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \overline{S}_{k-1}^2$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{E}^\star(\Delta U_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) = r$$

$$\Longleftrightarrow b \; \mathbb{P}^\star(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1}) + h \; \mathbb{P}^\star(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1}) = r$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}^\star(\Delta U_k^2 = b \mid \mathcal{F}_{k-1}) & = & \frac{r-h}{b-h} = \frac{h-r}{h-b} \\ \mathbb{P}^\star(\Delta U_k^2 = h \mid \mathcal{F}_{k-1}) & = & 1 - \frac{h-r}{h-b} = \frac{r-b}{h-b} \end{array} \right.$$

La construction de $\mathbb{P}^\star$ décrite ci-dessus souligne le fait que $\Delta U_k^2$ est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_{k-1}$, et a fortiori des v.a. de rendements passés $\Delta U_1^2, \ldots, \Delta U_{k-1}^2$. Ceci démontre l'unicité de $\mathbb{P}^\star$, et achève ainsi la preuve de la proposition. ■

### 4.4.4 Couverture d'options

On se place dans le marché financier CRR neutralisé décrit dans la section 4.4.3. Un émetteur d'une option propose une option, de fonction de paiement réactualisée à l'échéance $n$, et donnée par

$$\overline{f} = \frac{f}{(1+r)^n} = g(\overline{S}_n^2)$$

où $g$ désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans lui même. Afin d'honorer son contrat, il souhaite trouver un portefeuille de couverture (prévisible et autofinancé) $(\Phi_k^2)_{1 \leq k \leq n}$, ainsi qu'un portefeuille initial $\overline{V}_0(\Phi)$, tels que

$$\overline{V}_n(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \sum_{k=1}^n \Phi_k^2 \; \Delta\overline{S}_k^2 = g(\overline{S}_n^2)$$

Pour construire ce portefeuille, on utilise les techniques de contrôle de martingales développées dans la section 3.2, du premier chapitre. On commence donc par introduire la suite de fonctions $(g_k)_{0 \leq k \leq n}$ définies par les formules de récurrence inverse

$$\begin{array}{lcl} g_n(\overline{S}_n^2) & = & g(\overline{S}_n^2) \\ g_k(\overline{S}_k^2) & = & \mathbb{E}^\star\left(g_{k+1}(\overline{S}_{k+1}^2) \mid \overline{S}_k^2\right) \left(= \mathbb{E}^\star\left(g(\overline{S}_n^2) \mid \overline{S}_k^2\right)\right) \end{array}$$

Ces fonctions peuvent être décrites explicitement, selon les formules

$$\begin{aligned} g_k(\overline{S}^2_k) &= \mathbb{E}^\star\left(g_{k+1}(\overline{S}^2_{k+1}) \mid \overline{S}^2_k\right) \\ &= \mathbb{E}^\star\left(g_{k+1}\left(\overline{S}^2_k \ \frac{1+\Delta U^2_{k+1}}{1+r}\right) \mid \overline{S}^2_k\right) \\ &= g_{k+1}\left(\overline{S}^2_k \ \frac{1+b}{1+r}\right) \times \frac{h-r}{h-b} + g_{k+1}\left(\overline{S}^2_k \ \frac{1+h}{1+r}\right) \times \frac{r-b}{h-b} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Plus précisément, en terme de la loi binomiale de comptage des hausses et baisses, on a pour tout indice temporel $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} g_k(\overline{S}^2_k) &= \mathbb{E}^\star\left(g_n(\overline{S}^2_n) \mid \overline{S}^2_k\right) \\ &= \mathbb{E}^\star\left(g_n\left(\overline{S}^2_k \times \left[\frac{1+\Delta U^2_{k+1}}{1+r} \ \frac{1+\Delta U^2_{k+2}}{1+r} \ \ldots \ \frac{1+\Delta U^2_n}{1+r}\right]\right) \mid \overline{S}^2_k\right) \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} g\left(\overline{S}^2_k \ \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^l \left(\frac{1+h}{1+r}\right)^{(n-k)-l}\right) \\ &\qquad\qquad \times C^l_{n-k} \ \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^l \ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^{(n-k)-l} \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.2.1, le portefeuille de couverture, et la valeur initiale du portefeuille, sont donnés par les formules

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{V}_0(\Phi) &=& g_0(\overline{S}^2_0) = g_0(s_0) \\ \\ \Phi^2_k &=& \dfrac{g_k\left(\overline{S}^2_{k-1} \ \frac{1+h}{1+r}\right) - g_k\left(\overline{S}^2_{k-1} \ \frac{1+b}{1+r}\right)}{\overline{S}^2_{k-1} \ \frac{h-b}{1+r}} \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Comme d'habitude, la condition d'autofinancement permet de trouver les parts d'actifs non risqués qu'il convient d'acquérir pour couvrir l'option

$$\overline{V}_{k-1}(\Phi) = \Phi^1_{k-1} + \Phi^2_{k-1} \ \overline{S}^2_{k-1} = \Phi^1_k + \Phi^2_k \ \overline{S}^2_{k-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi^1_k = \overline{V}_{k-1}(\Phi) - \Phi^2_k \ \overline{S}^2_{k-1}$$

D'autre part, d'après le théorème 3.2.1, les valeurs du portefeuille de couverture réactualisé sont données par les fonctions $(g_k)_{0\leq k\leq n}$. Plus précisément, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \overline{V}_k(\Phi) = g_k(\overline{S}^2_k)$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
\Phi_k^1 &= g_{k-1}(\overline{S}_{k-1}^2) - \Phi_k^2 \ \overline{S}_{k-1}^2 \\
&= g_{k-1}(\overline{S}_{k-1}^2) - \left(\frac{1+r}{h-b}\right)\left[g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+h}{1+r}\right) - g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+b}{1+r}\right)\right]
\end{aligned}$$

En utilisant les formules de récurrence inverse (4.2), on a aussi

$$\begin{aligned}
\Phi_k^1 &= \left(g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+b}{1+r}\right) \times \frac{h-r}{h-b} + g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+h}{1+r}\right) \times \frac{r-b}{h-b}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1+r}{h-b}\right)\left[g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+h}{1+r}\right) - g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+b}{1+r}\right)\right] \\
&= \frac{1}{h-b}\left[(h+1) \ g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+b}{1+r}\right) - (b+1) \ g_k\left(\overline{S}_{k-1}^2 \ \frac{1+h}{1+r}\right)\right]
\end{aligned}$$

### 4.4.5 Prix d'options

Comme le portefeuille réactualisé est une $\mathbb{P}^\star$-martingale, nous avons

$$\overline{V}_0(\Phi) = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi)) = \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2))$$

D'autre part, pour toute stratégie $(\overline{V}_0(\Phi'), ({\Phi'}_k^2)_{1\leq k\leq n})$, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{V}_n(\Phi') \leq g(\overline{S}_n^2) &\implies \overline{V}_0(\Phi') = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi')) \leq \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2)) \\
\overline{V}_n(\Phi') \geq g(\overline{S}_n^2) &\implies \overline{V}_0(\Phi') = \mathbb{E}^\star(\overline{V}_n(\Phi')) \geq \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2))
\end{aligned}$$

Il en découle les majorations suivantes

$$\begin{aligned}
C_\star(f) &= \sup\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \text{ t.q. } \overline{V}_0(\Phi) = x \text{ et } \overline{V}_n(\Phi) \leq g(\overline{S}_n^2)\right\} \\
&\leq \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2)) &\leq C^\star(f) \\
&= \inf\left\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \text{ t.q. } \overline{V}_0(\Phi) = x \text{ et } \overline{V}_n(\Phi) \geq g(\overline{S}_n^2)\right\}
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$C_\star(f) \leq \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2)) \leq C^\star(f)$$

La stratégie de couverture

$$(\overline{V}_0(\Phi), (\Phi_k^2)_{1\leq k\leq n})$$

construite dans la section 4.4.4, vérifie ces deux jeux de sous/sur couverture. Par conséquent, nous avons

$$C^\star(f) \leq \overline{V}_0(\Phi) = \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}_n^2)) \leq C_\star(f)$$

Finalement, on en conclut que

$$\overline{V}_0(\Phi) = \mathbb{E}^\star(g(\overline{S}^2_n)) = C^\star(f) = C_\star(f) = g_0(s_0)$$

### 4.4.6 Exercices

**Exercice 4.4.1** *On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués sont plus rentables que les actif risqués (i.e. $b < h < r$). C'est le cas de conjonctures économiques où les comptes épargnes bancaires ont des taux plus élevés que les rendements d'actions plus risquées. Développer une stratégie d'arbitrage dans ce marché financier.*

**Exercice 4.4.2** *On considère un marché financier CRR où les actifs non risqués et risqués sont tels que*

$$b < r < h$$

*Décrire explicitement la mesure martingale $\mathbb{P}^\star$ sur $\Omega$.*

**Exercice 4.4.3** *Montrer que l'existence de $\mathbb{P}^\star$ entraine qu'un investisseur ne peut arbitrer le marché financier.*

**Exercice 4.4.4** *On considère un marché financier CRR avec des rendements d'actifs tels que $b < r < h$. La statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique* **à tendance à la hausse***, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_1$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta U^2_k = h \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U^2_k = b \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

*De même, la statistique d'évolution des prix d'actifs associées à une conjoncture économique* **à tendance à la baisse***, et en perpétuels cracks boursiers, est représentée par la donnée d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}_1$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta U^2_k = b \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0,999 = 1 - \mathbb{P}_1(\Delta U^2_k = h \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

*Existe-t-il des opportunités d'arbitrage dans de tels marchés financiers ?*

Dans un marché **viable** de type CRR, un conseiller financier propose une option de fonction de paiement à l'échéance $n$, donnée par la v.a.

$$f = (S^2_n - K)_+$$

où $K$ désigne un prix d'exercice fixé.

**Exercice 4.4.5** *1. Construire le portefeuille de couverture que l'émetteur de l'option devra utiliser pour honorer son contrat.*

*2. Montrer que l'investissement initial $V_0(\Phi)$ nécessaire pour couvrir l'option est donné par la formule*

$$V_0(\Phi)$$

$$= (1+r)^{-n} \sum_{l=0}^n \left(s_0 \ (1+b)^{n-l} (1+h)^l - K\right)_+ C^l_n \ \left(\frac{h-r}{h-b}\right)^{n-l} \ \left(\frac{r-b}{h-b}\right)^l$$

3. *On note $C$ le prix de l'action offert par le conseiller financier. Étudier ses gains et ses pertes dans les trois cas de figure suivants*

$$1)\ C = V_0(\Phi)\ , \quad 2)\ C > V_0(\Phi)\ , \quad \text{et} \quad 3)\ C < V_0(\Phi)$$

4. *On note $k_0$ le plus petit entier $k$ pour lequel*

$$s_0 \times \left(\frac{1+h}{1+b}\right)^k > \frac{K}{(1+b)^n}$$

   (a) *Vérifier que*

$$k_0 = 1 + \left[\log\left(\frac{K}{s_0(1+b)^n}\right) / \log\left(\frac{1+h}{1+b}\right)\right]$$

   *où $[a]$ désigne la partie entière d'un nombre $a$.*

   (b) *Montrer que*

$$V_0(\Phi) = s_0 \times F_{n,p'}(k_0) - (1+r)^{-n}\ K\ F_{n,p^\star}(k_0) \tag{4.4}$$

   *avec les fonctions définies par*

$$F_{n,p}(k) = \sum_{l=k}^{n}\ C_n^l\ p^l\,(1-p)^{n-l} \quad \text{avec} \quad p \in [0,1]$$

   *et le jeu de paramètres $(p^\star, p') \in [0,1]$ donnés par*

$$p^\star = \frac{r-b}{h-b} \quad \text{et} \quad p' = \frac{(h+1)(r-b)}{(1+r)(h-b)}$$

   (c) *Vérifier que les fonctions $F_{n,p}$ correspondent aux fonctions de répartition*

$$\forall 0 \le k \le n \qquad \mathbb{P}(\Sigma_{p,n} \ge k) = F_{n,p}(k)$$

   *des variables aléatoires $\Sigma_{p,n} = \sum_{i=1}^n \epsilon_p^i$, où $(\epsilon_p^i)_{1\le i\le n}$ désignent une suite de v.a. iid de même loi*

$$\mathbb{P}(\epsilon_p^i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_p^i = 0)$$

**Exercice 4.4.6** *On suppose de plus que l'horizon temporel $n$, et les paramètres de rendement $(r,b,h)$ sont de la forme*

$$n = T/\Delta\ , \quad r = \rho\ \Delta\ , \quad h = \sigma\ \sqrt{\Delta}\ , \quad \text{et} \quad b = -\sigma\ \sqrt{\Delta}$$

*avec $(\Delta, T, \rho, \sigma) \in \mathbb{R}_+^4$. On rappelle que la suite de v.a.*

$$W_{p,n} = \frac{\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})}{\sqrt{\mathbb{E}([\Sigma_{p,n} - \mathbb{E}(\Sigma_{p,n})]^2)}}$$

*converge faiblement vers une v.a. gaussienne centrée normée, en ce sens où*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_{p,n} \ge x) = F(x) =_{\text{déf.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy$$

*Ce résultat n'est autre que le théorème de la limite centrale pour des suite de v.a. indépendantes, et identiquement distribuées.*

1. *Montrer que*
$$W_{p,n} = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_n^i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$
2. *Lorsque $\Delta \to 0$, vérifier les équivalences suivantes*
$$np' \simeq \frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}}\ (\rho + \sigma^2 + \sigma/\sqrt{\Delta}) \quad \text{et} \quad np^\star \simeq \frac{T}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}} \left(\rho + \sigma/\sqrt{\Delta}\right)$$
*et*
$$\sqrt{np'(1-p')} \simeq \sqrt{np^\star(1-p^\star)} \simeq \frac{\sqrt{T}}{(2\sqrt{\Delta})}$$
*et enfin*
$$k_0 \simeq \frac{1}{2\sigma\ \sqrt{\Delta}} \left(\log\left(\frac{K}{s_0}\right) + T\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\right)$$
*En déduire les estimations*
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{np' - k_0}{\sqrt{np'(1-p')}} & \simeq & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\ \left(\rho + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) + \log\left(s_0/K\right)\right) \\ \dfrac{np^\star - k_0}{\sqrt{np^\star(1-p^\star)}} & \simeq & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\left(\rho - \dfrac{\sigma^2}{2}\right) + \log\left(s_0/K\right)\right) \end{array}$$
3. *En utilisant le fait que*
$$F_{n,p}\left(k_0\right) = \mathbb{P}\left(W_{p,n} \geq \frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \overset{n\sim\infty}{\simeq} F\left(\frac{k_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
*montrer que l'on a*
$$\begin{array}{rcl} V_0(\Phi) & \simeq & s_0\ F\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\ \left(\rho + \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \\ & & -e^{-\rho T}\ K\ F\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \left(T\ \left(\rho - \sigma^2/2\right) + \log\left(s_0/K\right)\right)\right) \end{array}$$

## 4.5 Analyse mathématique

### 4.5.1 Actualisation

On considère un marché financier défini, sur un espace probabilisé et filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, par l'évolution d'un couple d'actifs
$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta S_k^1 & = & S_{k-1}^1\ (1 + \Delta U_k^1) \\ \Delta S_k^2 & = & S_{k-1}^2\ (1 + \Delta U_k^2) \end{array}\right.$$

Le premier titre à un rôle bien particulier. Il représente un placement sans risque, avec un rendement prévisible ; c'est à dire que
$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad (1 + \Delta U_k^1) = \frac{\Delta S_k^1}{S_{k-1}^1} \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$