2. *Soit $\overline{K} = K/(1+r)^n$ le prix d'exercice réactualisé à la date d'échéance. Vérifier les équivalences suivantes*

$$f = (K - S_n^2)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{K} - \overline{S}_n^2)_+$$

et

$$f = (S_n^2 - K)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{S}_n^2 - \overline{K})_+$$

4.2 Modèle binomial sur une période

Nous allons analyser dans cette première section, l'évolution d'un marché financier élémentaire à deux états, sur une unité de temps $n = 1$. L'évolution du prix d'une part d'un titre sans risque S_k^1, à taux d'intérêt constant $\Delta U_k^1 = r > 0$ est simplement donné par les formules

$$S_0^1 = 1 \quad \text{et} \quad S_1^1 = (1+r)$$

Le prix actuel d'une part du titre risqué est connu avec certitude initialement

$$S_0^2 = s_0 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$$

A la période suivante, S_1^2 ne peut prendre que deux valeurs

$$\forall \omega \in \Omega \qquad S_1^2(\omega) \in \{s_{1,1}, s_{1,2}\} \quad \text{avec} \quad 0 < s_{1,1} < s_{1,2}$$

Autrement dit, ce marché binomial évolue de deux façons différentes. Pour un certain aléa, disons ω^1, nous avons

$$\begin{array}{rcl} S_0(\omega^1) & = & (S_0^1(\omega^1), S_0^2(\omega^1)) = (1, s_0) \\ S_1(\omega^1) & = & (S_1^1(\omega^1), S_1^2(\omega^1)) = ((1+r), s_{1,1}) \end{array}$$

Dans un autre contexte aléatoire, disons pour un aléa ω^2, on a plutôt

$$\begin{array}{rcl} S_0(\omega^2) & = & (S_0^1(\omega^2), S_0^2(\omega^2)) = (1, s_0) \\ S_1(\omega^2) & = & (S_1^1(\omega^2), S_1^2(\omega^2)) = ((1+r), s_{1,2}) \end{array}$$

Le modèle binomial sur une période correspond au tableau des épreuves suivant :

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

Ce marché financier s'exprime donc de façon naturelle sur l'espace des aléas

$$\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$$

muni de la filtration élémentaire :

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1) = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\}$$

A l'instant initial $k = 0$, nous acquérons le portefeuille $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) \in \mathbb{R}^2$, au coût

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 \ S_0^1 + \Phi_1^2 \ S_0^2 = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \ s_0$$

A l'instant suivant, les nouveaux prix des actifs $S_1 = (S_1^1, S_1^2)$ sont annoncés, et notre portefeuille prend la valeur

$$V_1(\Phi) = \Phi_1^1 \ S_1^1 + \Phi_1^2 \ S_1^2 = \Phi_1^1 \ (1 + r) + \Phi_1^2 \ S_1^2$$

4.2.1 Point de vue des essences

Nous allons analyser les opportunités d'arbitrage, et estimer les prix des options de vente, sans faire appel à un quelconque raisonnement probabiliste. Cette approche nécessite un examen précis des différentes situations (aléatoires) pouvant se produire. Dans le cadre de marché fiables, les prix des options de vente, s'expriment simplement en terme d'un problème d'optimisation.

Trois cas se présentent :

- **Cas 1 :** $s_0(1 + r) \leq s_{1,1} < s_{1,2}$
- **Cas 2 :** $s_{1,1} < s_{1,2} \leq s_0(1 + r)$
- **Cas 3 :** $s_{1,1} < s_0(1 + r) < s_{1,2}$

Dans les deux premiers cas, les stratégies d'arbitrages sont claires.

Cas 1 :

Dans cette situation, les prix des actifs risqués sont toujours supérieurs aux prix des actifs non risqués. Il est clairement plus avantageux de vendre à découvert ou emprunter le plus de parts possibles d'actifs sans risques, pour acheter des actifs risqués.

Un portefeuille peu coûteux consiste initialement à vendre à découvert ms_0 parts d'actifs non risqués, pour acheter m parts d'actifs risqués. Plus formellement, on aménage notre portefeuille initial somme suit

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (-ms_0, \ m)$$

Le coût d'acquisition d'un tel portefeuille est nul :

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \ s_0 = (-ms_0) \times 1 + m \times s_0 = 0$$

A l'instant suivant $k = 1$, nous vendons les m parts de titres risqués, et nous remboursons notre prêt de ms_0 actifs non risqués avec les intérêts. L'aménagement du portefeuille correspondant est donné par

$$\Phi_2 = \Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (-ms_0, \ m)$$

La vente de ce portefeuille nous rapporte :

$$\begin{array}{rcl} V_1(\Phi)(\omega^1) & = & (-ms_0) \ (1 + r) + m \ s_{1,1} = m \ [s_{1,1} - s_0(1 + r)] \geq 0 \\ V_1(\Phi)(\omega^1) & = & (-ms_0) \ (1 + r) + m \ s_{1,2} = m \ [s_{1,2} - s_0(1 + r)] > 0 \end{array}$$

Cas 2 :

Dans cette situation, les prix des actifs non risqués sont toujours supérieurs aux prix des actifs risqués. Ces conditions peuvent aussi refléter une conjoncture où les placements bancaires sont à des taux si élevés, qu'il est préférable de placer son argent plutôt que d'acheter des actifs, ici très risqués.

Il est clairement ici plus avantageux de vendre à découvert le plus de parts d'actifs risqués, disons m parts, et placer cette somme d'argent ms_0 dans un compte épargne (i.e. en investissant dans ms_0 parts d'actifs non risqués). Plus formellement, on aménage notre portefeuille initial somme suit

$$\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (ms_0, -m)$$

Le coût d'acquisition d'un tel portefeuille est toujours nul :

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \ s_0 = (ms_0) \times 1 - m \times s_0 = 0$$

A l'instant suivant $k = 1$, en revendant les ms_0 parts de titres non risqués avec les intérêts, nous achetons m parts d'actifs risqués. L'aménagement du portefeuille correspondant est donné par

$$\Phi_2 = \Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2) = (ms_0, -m)$$

La vente de ce portefeuille nous rapporte :

$$\begin{aligned}
V_1(\Phi)(\omega^1) &= (ms_0)\ (1+r) - m\ s_{1,1} = m\ [s_0(1+r) - s_{1,1}] > 0 \\
V_1(\Phi)(\omega^1) &= (ms_0)\ (1+r) - m\ s_{1,2} = m\ [s_0(1+r) - s_{1,2}] \geq 0
\end{aligned}$$

Cas 3 :

Le troisième cas correspond à la situation où un investissement sur l'actif risqué peut ou non être plus avantageux, qu'un investissement sur l'actif non risqué.

Dans cette situation, on notera qu'un défaut d'investissement initial

$$V_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \ s_0 = 0 \Longleftrightarrow \Phi_1^1 = -\Phi_1^2 \ s_0$$

conduit à deux situation opposées, sans aucune opportunité d'arbitrage

$$\begin{aligned}
V_1(\Phi)(\omega^1) &= \Phi_1^1\ (1+r) + \Phi_1^2\ s_{1,1} = -\Phi_1^2\ [s_0(1+r) - s_{1,1}] < 0 \\
V_1(\Phi)(\omega^2) &= \Phi_1^1\ (1+r) + \Phi_1^2\ s_{1,2} = \Phi_1^2\ [s_{1,2} - s_0(1+r)] > 0
\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons l'équivalence suivante

$$\text{Le marché est viable} \Longleftrightarrow s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

4.2.2 Prix d'options

Dans un modèle de marché viable

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

une banque souhaite proposer à des investisseurs une option de vente, avec pour la date d'échéance $n = 1$, la fonction de paiement $f(\omega^i) = f_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$. Ce modèle de marché peut être représenté synthétiquement par le tableau suivant :

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$	f
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$	f_1
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$	f_2

Afin d'offrir à ses clients un prix compétitif de droit conditionnel, tout en honorant ses engagements, la banque vendra son option de vente au montant suivant

$$C^\star(f) = \inf \{x \in \mathbb{R}_+ \ : \ \exists \Phi = (\Phi_k)_{k=0,1} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad V_1(\Phi) \geq f\}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, $C^\star(f)$ correspond au prix d'acquisition du portefeuille initial le moins onéreux permettant à la banque de couvrir à l'échéance la fonction de paiement proposée.

Dans ce modèle de marché à une période, la condition d'autofinancement d'un portefeuille de coût initial x, s'exprime par la condition

$$\Phi_1^1 \ \times 1 + \Phi_1^2 \ s_0 = V_0(\Phi) = x (= \Phi_0^1 \ \times 1 + \Phi_0^2 \ s_0)$$

Les données initiales

$$S_0 = (S_0^1, S_0^2) = (1, s_0)$$

étant constantes, La prévisibilité de la stratégie $\Phi = (\Phi_k)_{k=0,1}$, revient tout simplement à dire que l'aménagement du portefeuille $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$ est une v.a. constante, indépendante du jeu d'aléa ω^i, $i = 1, 2$,

$$\forall i = 1, 2 \qquad \Phi_1(\omega^i) = (\Phi_1^1(\omega^i), \Phi_1^2(\omega^i)) = (\phi^1, \phi^2)$$

Avec ces notations, la condition d'autofinancement d'un portefeuille de coût initial x, s'exprime sous la forme suivante

$$V_0(\Phi) = \phi^1 \times 1 + \phi^2 \ s_0 = x$$

Minoration du prix

La propriété de couverture dans ce marché binomial s'exprime simplement par les deux formules

$$\begin{aligned} V_1(\Phi)(\omega^1) &= \phi^1 \ (1+r) + \phi^2 \ s_{1,1} \geq f_1 \\ V_1(\Phi)(\omega^2) &= \phi^1 \ (1+r) + \phi^2 \ s_{1,2} \geq f_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, un portefeuille de couverture (ϕ^1, ϕ^2) doit nécessairement satisfaire la condition suivante

$$\phi^2 \geq \max \left\{ \frac{f_1 - \phi^1 \ (1+r)}{s_{1,1}} ; \ \frac{f_2 - \phi^1 \ (1+r)}{s_{1,2}} \right\}$$

On en déduit que le coût minimal d'acquisition du portefeuille initial est tel que

$$\begin{aligned}
V_0(\Phi) &= \phi^1 + \phi^2\ s_0 \\
&\geq \max_{i=1,2} \left\{ \phi^1 + \frac{s_0}{s_{1,i}}\ [f_i - \phi^1\ (1+r)] \right\} \\
&= \max_{i=1,2} \left\{ \frac{s_0}{s_{1,i}}\ f_i + \phi^1 \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,i}}\right) \right\}
\end{aligned}$$

D'après nos hypothèses, nous avons

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

Ainsi, la droite

$$\phi^1 \longrightarrow \frac{s_0}{s_{1,i}}\ f_i + \phi^1 \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,i}}\right)$$

est décroissante si $i = 1$, et croissante lorsque $i = 2$. Ces deux droites s'intersectent en un point $\phi^{\star,1}$ déterminé par la formule

$$\frac{s_0}{s_{1,1}}\ f_1 + \phi^{\star,1} \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,1}}\right) = \frac{s_0}{s_{1,2}}\ f_2 + \phi^{\star,1} \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,2}}\right)$$

En simplifiant cette équation, nous obtenons la formule équivalente

$$\frac{1}{s_{1,1}}\ f_1 - \phi^{\star,1} \frac{(1+r)}{s_{1,1}} = \frac{1}{s_{1,2}}\ f_2 - \phi^{\star,1} \frac{(1+r)}{s_{1,2}}$$

soit encore

$$s_{1,2}\ f_1 + \phi^{\star,1}(1+r)s_{1,1} = s_{1,1}\ f_2 + \phi^{\star,1}(1+r)s_{1,2}$$

On en conclut que ces deux droites s'intersectent en

$$\phi^{\star,1} = \frac{s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2}{(1+r)(s_{1,2} - s_{1,1})}$$

Par conséquent, pour tout portefeuille de couverture Φ nous avons

$$\begin{aligned}
V_0(\Phi) &\geq \frac{s_0}{s_{1,1}}\ f_1 + \phi^{\star,1} \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,1}}\right) \\
&= \frac{s_0}{s_{1,1}}\ f_1 + \frac{s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2}{(1+r)(s_{1,2} - s_{1,1})} \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,1}}\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)(s_{1,2} - s_{1,1})} \\
&\quad \times \left[(s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2) \left(1 - \frac{s_0(1+r)}{s_{1,1}}\right) + \frac{s_0(1+r)}{s_{1,1}}\ (f_1 s_{1,2} - f_1 s_{1,1}) \right]
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
C^\star(f) &\geq \frac{1}{(1+r)(s_{1,2} - s_{1,1})} \left[(s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2) + s_0(1+r)(f_2 - f_1) \right] \\
&= \frac{1}{(1+r)(s_{1,2} - s_{1,1})} \left[(s_{1,2} - s_0(1+r))\ f_1 + (s_0(1+r) - s_{1,1})\ f_2 \right]
\end{aligned}$$

Formule du delta de couverture

Afin de s'assurer que cette borne inférieure est atteinte, on remarque que la stratégie d'investissement

$$\begin{aligned}\phi^{\star,1} &= \frac{s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2}{(1+r)(s_{1,2}-s_{1,1})} = \frac{1}{1+r}\left[f_1 - s_{1,1}\frac{f_2-f_1}{s_{1,2}-s_{1,1}}\right] \\ \phi^{\star,2} &= \frac{f_2-f_1}{s_{1,2}-s_{1,1}}\end{aligned}$$

est l'unique solution du système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl}\phi^1(1+r)+\phi^2 s_{1,1} &=& f_1 \\ \phi^1(1+r)+\phi^2 s_{1,2} &=& f_2\end{array}\right.$$

Le couple $\Phi_1^\star = (\phi^{\star,1}, \phi^{\star,2})$ est parfois appelé *formule du delta de couverture.*

Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}V_0(\Phi^\star) &= \phi^{\star,1} + \phi^{\star,2} s_0 \\ &= \frac{s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2}{(1+r)(s_{1,2}-s_{1,1})} + \frac{f_2-f_1}{s_{1,2}-s_{1,1}}\ s_0 \\ &= \frac{1}{(1+r)(s_{1,2}-s_{1,1})}\left((s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2) + (f_2-f_1)s_0(1+r)\right) \\ &= \frac{s_{1,2}-s_0(1+r)}{(s_{1,2}-s_{1,1})(1+r)} \times f_1 + \frac{s_0(1+r)-s_{1,1}}{(s_{1,2}-s_{1,1})(1+r)} \times f_2 = C^\star(f)\end{aligned}$$

En résumé, le vendeur proposera une option de vente au montant

$$C^\star(f) = \frac{s_{1,2}-s_0(1+r)}{(s_{1,2}-s_{1,1})(1+r)} \times f_1 + \frac{s_0(1+r)-s_{1,1}}{(s_{1,2}-s_{1,1})(1+r)} \times f_2$$

De plus, il utilisera la stratégie de couverture

$$\Phi_1^\star = (\phi^{\star,1}, \phi^{\star,2}) = \left(\frac{1}{(1+r)}\frac{s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2}{(s_{1,2}-s_{1,1})}, \frac{f_2-f_1}{s_{1,2}-s_{1,1}}\right)$$

pour honorer la fonction de paiement proposée.

Le point de vue de l'acheteur

La plus grande dette que l'acheteur acceptera de débourser, de sorte à pouvoir s'en acquitter au moment où il exercera (ou non) son droit, est donnée par la formule

$$C_\star(f) = \sup\left\{x \in [0,\infty) \ :\ \exists(\Phi_k)_{k=0,1} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad V_1(\Phi) \le f\right\}$$

Par des arguments analogues à ceux utilisés dans l'analyse du point de vue du vendeur, nous avons l'équivalence suivante

$$V_1(\Phi) \leq f \Longleftrightarrow \phi_2 \leq \min\left\{\frac{f_1 - \phi^1\ (1+r)}{s_{1,1}};\ \frac{f_2 - \phi^1\ (1+r)}{s_{1,2}}\right\}$$

Cette équivalence conduit aisément à la majoration

$$V_0(\Phi) \quad = \quad \phi^1 + \phi^2\ s_0 \leq \min_{i=1,2}\left\{\phi^1 + \frac{s_0}{s_{1,i}}\ [f_i - \phi^1\ (1+r)]\right\}$$

D'après les calculs précédents, on obtient la majoration

$$V_0(\Phi) \leq \phi^{\star,1} + \frac{s_0}{s_{1,1}}\ [f_1 - \phi^{\star,1}\ (1+r)] = \phi^{\star,1} + \frac{s_0}{s_{1,2}}\ [f_2 - \phi^{\star,1}\ (1+r)]$$

avec

$$\phi^{\star,1} = \frac{s_{1,2}\ f_1 - s_{1,1}\ f_2}{(1+r)(s_{1,2} - s_{1,1})}$$

La formule du delta de couverture nous permet de conclure que le vendeur et l'acheteur s'entendront sur un prix égal à

$$\begin{aligned} C(f) &= C_\star(f) = C^\star(f) \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \times f_1 + \frac{s_0(1+r) - s_{1,1}}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \times f_2\right) \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \times f_1 + \left[1 - \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})}\right] \times f_2\right) \end{aligned}$$

On remarquera qu'avec une dette d'un montant

$$V_0(-\Phi^\star) = -\phi^{\star,1} - \phi^{\star,2}\ s_0$$

l'acheteur pourra utiliser la stratégie d'investissement

$$-\Phi_1^\star = (-\phi^{\star,1}, -\phi^{\star,2})$$

pour obtenir à l'échéance le portefeuille lui permettant de la rembourser

$$V_1(-\Phi^\star) = -\phi^{\star,1}(1+r) - \phi^{\star,2}\ S_1^2 = -f$$

4.2.3 Point de vue de phénomènes

Nous commençons par remarquer que la condition de non arbitrage

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

est équivalente au fait suivant

$$p^\star =_{\text{déf.}} \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})}\ \in\ (0,1)$$

On notera $\mathbb{P}^\star$ la mesure de probabilité sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$, définie par

$$\mathbb{P}(\omega^1) = p^\star = 1 - \mathbb{P}^\star(\omega^2)$$

Par construction, le prix du droit conditionnel $C(f)$ calculé précédemment correspond à la valeur espérée sous $\mathbb{P}^\star$, de la fonction de paiement actualisée, c'est à dire

$$C(f) = \mathbb{E}^\star\left(\frac{f}{(1+r)}\right)$$

D'autre part, sous la mesure $\mathbb{P}^\star$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\star\left(\overline{S}_1^1 \mid \mathcal{F}_0\right) &= \mathbb{E}^\star\left(\frac{S_1^1}{(1+r)^1} \mid \mathcal{F}_0\right) \\ &= \frac{1+r}{1+r} = 1 = \frac{S_0^1}{(1+r)^0} = \overline{S}_0^1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\star\left(\overline{S}_1^2 \mid \mathcal{F}_0\right) &= \mathbb{E}^\star\left(\frac{S_1^2}{(1+r)^1} \mid \mathcal{F}_0\right) \\ &= \frac{s_{1,1}}{(1+r)}\, p^\star + \frac{s_{1,2}}{(1+r)}\, (1-p^\star) \\ &= \frac{s_{1,1}}{(1+r)}\, \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} + \frac{s_{1,2}}{(1+r)}\, \frac{s_0(1+r) - s_{1,1}}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \\ &= s_0 = \frac{S_0^2}{(1+r)^0} = \overline{S}_0^2 \end{aligned}$$

Autrement dit, en termes probabilistes, les prix réactualisés sont des $\mathbb{P}^\star$-martingales.

La mesure $\mathbb{P}^\star$ que nous venons d'introduire, ne correspond bien évidemment pas à la probabilité régissant les statistiques du marché financier. Cette probabilité virtuelle est appelée **mesure à risque neutre**, ou **mesure martingale**, pour souligner le caractère "imprévisible" des actifs réactualisés, la neutralité des prix des droits conditionnels entre acheteur et vendeur, ou encore pour mettre en évidence, la correspondance entre le prix de l'option de vente et la valeur réactualisée moyenne de la fonction de paiement.

Cette mesure $\mathbb{P}^\star$ peut aussi s'interpreter comme une technique de neutralisation du marché financier réactualisé suivant

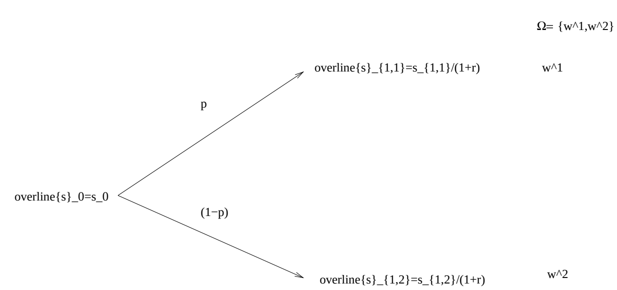

Fig. 4.1 – Arbre binomial

Plus précisément, si l'on considère les valeurs réactualisées

$$\overline{s}_{1,1} = \frac{s_{1,1}}{(1+r)} \quad \text{et} \quad \overline{s}_{1,2} = \frac{s_{1,2}}{(1+r)}$$

la mesure $\mathbb{P}^\star$ est déterminée par l´équation suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star\left(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2\right) = \overline{S}_0^1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{s}_{1,1}\ \mathbb{P}^\star(\overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,1} \mid \overline{S}_0^2 = \overline{s}_0) + \overline{s}_{1,2}\ \mathbb{P}^\star(\overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,2} \mid \overline{S}_0^2 = \overline{s}_0) = \overline{s}_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{s}_{1,1}\ \mathbb{P}^\star(\omega^1) + \overline{s}_{1,2}\ \mathbb{P}^\star(\omega^2) = \overline{s}_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{s}_{1,1}\ \mathbb{P}^\star(\omega^1) + \overline{s}_{1,2}\ (1 - \mathbb{P}^\star(\omega^1)) = \overline{s}_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^\star(\omega^1) = \frac{\overline{s}_0 - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} = \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}
\end{aligned}$$

La propriété de martingale

$$\mathbb{E}^\star\left(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2\right) = \overline{S}_0^2$$

peut aussi s'interpréter comme une caractérisation des coordonnées barycentriques du point $\overline{s}_0$ dans l'intervalle $[\overline{s}_{1,1}, \overline{s}_{1,2}]$

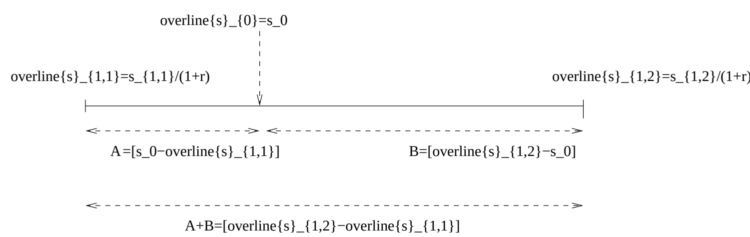

FIG. 4.2 – Arbre binomial

Dans cette interprétation, nous avons clairement

$$\overline{s}_0 = \frac{A}{A+B}\ \overline{s}_{1,2} + \frac{B}{A+B}\ \overline{s}_{1,1} \Longrightarrow \mathbb{P}^\star(\omega^1) = \frac{B}{A+B} = \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}$$

Après avoir neutraliser le marché financier, on note que les valeurs des portefeuilles réactualisés sont données par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\overline{V}_0(\Phi) &= \frac{V_0(\Phi)}{(1+r)^0} = \Phi_1^1\ \frac{S_0^1}{(1+r)^0} + \Phi_1^2\ \frac{S_0^2}{(1+r)^0} = \Phi_1^1 \times 1 + \Phi_1^2\ s_0 \\
\overline{V}_1(\Phi) &= \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)^1} = \frac{V_1(\Phi)}{(1+r)} = \Phi_1^1\ \frac{S_1^1}{(1+r)^1} + \Phi_1^2\ \frac{S_1^2}{(1+r)^1} = \Phi_1^1 \times 1 + \Phi_1^2\ \overline{S}_1^2
\end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons

$$\boxed{\overline{V}_1(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2\ [\overline{S}_1^2 - \overline{S}_0^2]}$$

De plus, sous la mesure $\mathbb{P}^\star$, le portefeuille réactualisé est une martingale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi) \mid \overline{S}_0^2) &= \overline{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2\ \mathbb{E}^\star([\overline{S}_1^2 - \overline{S}_0^2] \mid \overline{S}_0^2) \\ &= \overline{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2\ [\mathbb{E}^\star(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2) - \overline{S}_0^2] = \overline{V}_0(\Phi)\end{aligned}$$

Dans la section 3.2.4, consacrée à la simulation de jeux à conditions terminales fixées, nous avons démontré le résultat suivant.

> La seule martingale $(M_k)_{k=0,1}$ terminant en la valeur
>
> $$h_1(\overline{S}_1^2) =_{\text{déf.}} \overline{f} \quad \left(\Longleftrightarrow \left[h_1(\overline{s}_{1,1}) = \overline{f}_1 \quad \text{et} \quad h_1(\overline{s}_{1,2}) = \overline{f}_2\right]\right)$$
>
> au temps $n = 1$, est donnée par la formule suivante :
>
> $$M_0 = g_0(\overline{S}_0^2) \quad \text{et} \quad M_1 = g_1(\overline{S}_1^2) =_{\text{déf.}} h_1(\overline{S}_1^2)$$
>
> avec la fonction $g_0(\overline{S}_0^2)$ déterminée par la formule de récurrence inverse
>
> $$g_0(\overline{S}_0^2) = \mathbb{E}^\star(g_1(\overline{S}_1^2) \mid \overline{S}_0^2) = \mathbb{E}^\star(h_1(\overline{S}_1^2) \mid \overline{S}_0^2)$$

> Nous retrouvons que le prix de l'option correspond à la valeur initiale du portefeuille de couverture
>
> $$\begin{aligned}\overline{V}_0(\Phi) &= C(f) = g_0(s_0) \\ &= \frac{\overline{s}_0 - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\ \overline{f}_1 + \left(1 - \frac{\overline{s}_0 - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\right)\ \overline{f}_2\end{aligned}$$

De plus, le portefeuille de couverture est déterminé par la relation suivante

$$\overline{V}_1(\Phi) - \overline{V}_0(\Phi) = M_1 - M_0 \Rightarrow \Phi_1^2\ [\overline{S}_1^2 - \overline{S}_0^2] = g_1(\overline{S}_1^2) - g_0(\overline{S}_0^2)$$

En considérant les deux situations

$$\overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,1} \quad \text{et} \quad \overline{S}_1^2 = \overline{s}_{1,2}$$

on obtient les équations

$$\begin{array}{rcl}\Phi_1^2\ [\overline{s}_{1,1} - s_0] & = & g_1(\overline{s}_{1,1}) - g_0(s_0) \\ \Phi_1^2\ [\overline{s}_{1,2} - s_0] & = & g_1(\overline{s}_{1,2}) - g_0(s_0)\end{array}$$

On en conclut que

$$\boxed{\Phi_1^2 = \frac{g_1(\overline{s}_{1,2}) - g_1(\overline{s}_{1,1})}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}} = \frac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}}$$

Enfin, d'après les propriétés d'autofinancement, nous avons

$$\begin{array}{rcl}\Phi_1^1 & = & \overline{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2\ s_0 = g_0(s_0) - \dfrac{g_1(\overline{s}_{1,2}) - g_1(\overline{s}_{1,1})}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\ s_0 \\ & = & \left[\dfrac{\overline{s}_0 - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\ \overline{f}_1 + \left(1 - \dfrac{\overline{s}_0 - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}}\right)\ \overline{f}_2\right] - \dfrac{\overline{f}_2 - \overline{f}_1}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\ s_0 \\ & = & \left[\dfrac{\overline{s}_0 - \overline{s}_{1,2}}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} - \dfrac{s_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right]\ \overline{f}_1 + \left[\dfrac{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,1} - \overline{s}_{1,2}} + \dfrac{s_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right]\ \overline{f}_2\end{array}$$

Par conséquent, on obtient

$$\boxed{\Phi_1^1 \quad = \quad \frac{\overline{s}_{1,2}\ \overline{f}_1 - \overline{s}_{1,1}\ \overline{f}_2}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}}$$

Ces portefeuilles de couverture peuvent être retrouvés plus facilement en utilisant la formule du delta de couverture décrite à la page 131.

4.2.4 Exercices

Exercice 4.2.1 *On appelle le rendement instantané d'un titre S_k au temps k, la quantité R_k^S définie par*

$$R_k^S = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{\Delta S_k}{S_{k-1}}$$

On rappelle que S_k représente le prix d'une part d'un titre donné au temps k. On note $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ le modèle à deux états décrit par le tableau

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

On suppose que ce marché est viable

$$s_{1,1} < s_0(1+r) < s_{1,2}$$

et l'on note $\mathbb{P}^\star$ la mesure à risque neutre définie par

$$\mathbb{P}^\star(\omega^1) = p^\star =_{\text{déf.}} \frac{s_{1,2} - s_0(1+r)}{(s_{1,2} - s_{1,1})} \in (0,1)$$

1. *Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ avec*

$$\mathbb{P}(\omega^1) = p = 1 - \mathbb{P}(\omega^2)$$

   Vérifier que l'on a

$$\mathbb{E}(R_1^{S^1}) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(R_1^{S^2}) = \frac{s_{1,2} - s_0}{s_0} - p \times \frac{s_{1,2} - s_{1,1}}{s_0}$$

2. *Déduire de la question précédente que le rendement instantané du titre risqué est supérieur à celui du titre non risqué, si la probabilité p est suffisamment petite.*
3. *Montrer que sous $\mathbb{P}^\star$, le rendement instantané du titre risqué est le même que celui du titre non risqué.*

Exercice 4.2.2 *On considère le modèle de marché viable décrit dans l'exercice 4.2.1.*

1. *Décrire les prix des actifs réactualisés $(\overline{S}_k^1, \overline{S}_k^2)_{k=0,1}$, ainsi que les valeurs réactualisées d'un portefeuille $(\overline{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ associé à une stratégie d'aménagement $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$.*
2. *Vérifier que l'on a*

$$\Phi_1^1 = \overline{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 \; s_0$$

   et montrer que

$$\overline{V}_0(\Phi) = \Phi_1^1 + \Phi_1^2 \; s_0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_1(\Phi) = \overline{V}_0(\Phi) + \Phi_1^2 \; [\overline{S}_1^2 - \; \overline{S}_0^2]$$

3. *En déduire que les valeurs réactualisées des portefeuilles $(\overline{V}_k(\Phi))_{k=0,1}$ sont des $\mathbb{P}^\star$-martingales.*

Exercice 4.2.3 *Déterminer les valeurs réactualisées des portefeuilles $\overline{V}_k(\Phi) = V_k(\Phi)/(1+r)^k$ aux instants $k = 0, 1$, en fonction des prix des actifs réactualisés $\overline{S}_k^i = S_k^i/(1+r)^k$. Vérifier les formules suivantes :*

$$\Delta\overline{V}_1(\Phi) = \Phi_1^2 \times \Delta\overline{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_1^1 = \overline{V}_0(\Phi) - \Phi_1^2 \times \overline{S}_0^2$$

Exercice 4.2.4 *On considère le modèle de marché à deux états sur une période $(S_k^1, S_k^2)_{k=0,1}$ décrit par le tableau suivant*

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$

1. *Décrire le tableau, et l'arbre des épreuves correspondant au marché réactualisé $(\overline{S}_k^1, \overline{S}_k^2)_{k=0,1}$.*

2. *Déterminer les valeurs réactualisées d'un portefeuille associé à une stratégie d'aménagement sans investissement initial.*
3. *Discuter les situations où l'on peut enrichir son portefeuille $\Delta\overline{V}_1(\Phi) > 0$, sans apport initial.*
4. *Discuter les possibilités d'arbitrage dans les neuf modèles de marchés suivants :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & S_0 = (S_0^1, S_0^2) & S_1 = (S_1^1, S_1^2) \\ \omega^1 & (1;5) & ((1+5\ 10^{-2}); s_{1,1}) \\ \omega^2 & (1;5) & ((1+5\ 10^{-2}); s_{1,2}) \end{array}$$

avec

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 6 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 4 \end{array}\right. \quad 2)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 6 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 7 \end{array}\right. \quad 3)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 10 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 1 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 3 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 2 \end{array}\right. \quad 5)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 5 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 6 \end{array}\right. \quad 6)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 5 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 4 \end{array}\right.$$

$$7)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 3 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 10 \end{array}\right. \quad 8)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 8 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 9 \end{array}\right. \quad 9)\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,1} & = & 1,05\ \times 2 \\ s_{1,2} & = & 1,05\ \times 10 \end{array}\right.$$

Exercice 4.2.5 *On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & \overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1;\overline{s}_0) & (1;\overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1;\overline{s}_0) & (1;\overline{s}_{1,2}) \end{array} \qquad \text{avec} \quad 0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$$

Une banque émet une option de vente de fonction de paiement $f(\omega^i) = f_i$, avec $i = 1, 2$. On note $\overline{f}_i = f_i/(1+r)$ les valeurs réactualisées de cette option.

1. *Déterminer les stratégies de couverture de cette option, en fonction des portefeuilles et des actifs réactualisés.*
2. *Montrer qu'une stratégie de couverture est donnée par*

$$\phi^{2,\,\star} = \left(\overline{f}_1 - \phi^{1,\,\star}\right)/\overline{s}_{1,1}$$

où $\phi^{1,\,\star}$ désigne le point d'intersection des deux droites $(\Delta_i)_{i=1,2}$ déterminées par les équations suivantes :

$$\Delta_i \ :\ \phi^1 \mapsto \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}}\ \overline{f}_i + \phi^1\ \left(1 - \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}_{1,i}}\right)$$

On vérifiera que la stratégie de couverture $(\phi^{1,\,\star}, \phi^{2,\,\star})$ est l'unique solution du système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi^1 + \phi^2\ \overline{s}_{1,1} & = & \overline{f}_1 \\ \phi^1 + \phi^2\ \overline{s}_{1,2} & = & \overline{f}_2 \end{array}\right.$$

3. *Montrer que le coût initial du portefeuille (réactualisé) permettant de couvrir l'option est donné par la formule*

$$\overline{V}_0(\Phi) = \overline{f}_1\ \left(\frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right) + \overline{f}_2\ \left(1 - \frac{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_0}{\overline{s}_{1,2} - \overline{s}_{1,1}}\right)$$

Exercice 4.2.6 *Vérifier la viabilité des marchés suivants, et déterminer les prix $C(f)$, et les stratégies de couverture $(\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$ dans chaque situation.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1;5) & (1;\overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1;5) & (1;\overline{s}_{1,2}) \end{array}$$

avec

$$1)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 3 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 6 \end{array}\right. \quad 2)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 1 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 10 \end{array}\right. \quad 3)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 4 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 7 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 1 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 6 \end{array}\right. \quad 5)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 1 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 20 \end{array}\right. \quad 6)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 2 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 7 \end{array}\right.$$

$$7)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 3 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 50 \end{array}\right. \quad 8)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 4 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 100 \end{array}\right. \quad 9)\left\{\begin{array}{lcl} \overline{s}_{1,1} & = & 2 \\ \overline{s}_{1,2} & = & 1000 \end{array}\right.$$

Exercice 4.2.7 *On considère un modèle de marché viable décrit par le tableau suivant*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & \overline{S}_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) \\ \omega^1 & (1;\overline{s}_0) & (1;\overline{s}_{1,1}) \\ \omega^2 & (1;\overline{s}_0) & (1;\overline{s}_{1,2}) \end{array} \qquad \text{avec} \quad 0 < \overline{s}_{1,1} < \overline{s}_0 < \overline{s}_{1,2}$$

1. *Déterminer l'unique probabilité $\mathbb{P}^\star$ sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ telle que*

$$\mathbb{E}^\star(\overline{S}_1^2 \mid \overline{S}_0^2) = \overline{S}_0^2$$

2. *Montrer que pour tout portefeuille autofinancé, nous avons*

$$\mathbb{E}^\star(\overline{V}_1(\Phi) \mid \overline{S}_0^2) = \overline{V}_0(\Phi)$$

3. *Déterminer la valeur moyenne sous $\mathbb{P}^\star$ d'une fonction de paiement réactualisée $\overline{f}$.*
4. *Décrire une stratégie de couverture $\Phi^\star = (\phi^{1,\star}, \phi^{2,\star})$ de l'option $\overline{f}$, et vérifier que le coût initial d'acquisition du portefeuille de couverture est tel que $\overline{V}_0(\Phi^\star) = \mathbb{E}^\star(\overline{f}) = C(f)$.*

Exercice 4.2.8 *Déterminer les prix, et les stratégies de couverture des options de vente suivantes*

$$1)\ \begin{array}{cccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) & \overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 & (1;5) & (1;3) & 7 \\ \omega^2 & (1;5) & (1;6) & 4 \end{array}$$

$$2)\ \begin{array}{cccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) & \overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 & (1;5) & (1;1) & 7 \\ \omega^2 & (1;5) & (1;10) & 0 \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{cccc} \Omega & \overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2) & S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2) & \overline{f} = (8 - \overline{S}_1^2)_+ \\ \omega^1 & (1;5) & (1;2) & 6 \\ \omega^2 & (1;5) & (1;7) & 1 \end{array}$$

4)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (10 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	7
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0

5)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (100 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;1)$	99
ω^2	$(1;5)$	$(1;20)$	80

6)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;2)$	4
ω^2	$(1;5)$	$(1;7)$	0

7)

Ω	$\overline{S}_0 = (\overline{S}_0^1, \overline{S}_0^2)$	$S_1 = (\overline{S}_1^1, \overline{S}_1^2)$	$\overline{f} = (6 - \overline{S}_1^2)_+$
ω^1	$(1;5)$	$(1;3)$	3
ω^2	$(1;5)$	$(1;50)$	0

4.3 Modèle à deux états sur deux périodes

4.3.1 L'arbre binomial

Le modèle de marché financier binomial sur deux périodes est décrit par le tableau

Ω	$S_0 = (S_0^1, S_0^2)$	$S_1 = (S_1^1, S_1^2)$	$S_2 = (S_2^1, S_2^2)$
ω^1	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$	$((1+r)^2; s_{2,1})$
ω^2	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,1})$	$((1+r)^2; s_{2,2})$
ω^3	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$	$((1+r)^2; s_{2,3})$
ω^4	$(1; s_0)$	$((1+r); s_{1,2})$	$((1+r)^2; s_{2,4})$

peut être schématisé alternativement par l'arbre des épreuves suivant

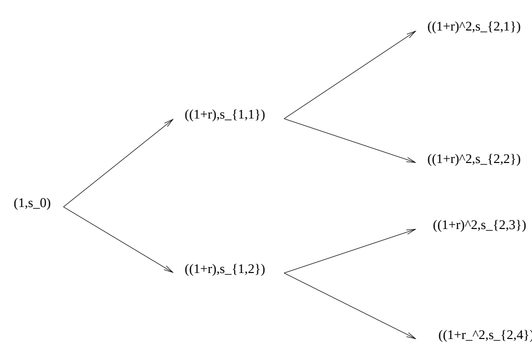

FIG. 4.3 – Arbre binomial