# Chapitre 4

# Mathématiques financières

## 4.1 Petit dictionnaire financier

### 4.1.1 Activité des marchés

Un marché financier est représenté par l'évolution d'un certain nombre d'actifs. Ces actifs sont parfois appelés des titres, ou des actions. L'évolution temporelle du prix d'une part d'un titre est représenté par la donnée d'une chaîne de Markov $(S_k)_{0\leq k\leq n}$. Dans ces notes, nous ne considérerons que des évolutions discrètes. L'unité de temps peut correspondre à une année, un mois, une heure, une seconde, ou encore à la clôture de la bourse chaque jour à 17 heures. Afin de simplifier l'exposé, nous n'examinerons que des marchés à deux titres $(S_k^1)_{0\leq k\leq n}$, et $(S_k^2)_{0\leq k\leq n}$ :

Le premier actif $S_k^1$, joue un rôle bien particulier. Il représente le cours d'un *titre non risqué*, tel un livret de caisse d'épargne, un bon du trésor à taux fixe ou prévisible, ou encore une obligation. Les obligations sont des dettes d'entreprises rémunérées à taux fixe, et convertibles en actions, en cas de croissance. Le second actif $S_k^2$ joue lui aussi un rôle bien particulier. Il représente le cours d'une part d'un *titre risqué*, tel les actions de compagnie privées cotées en bourse.

Le paramètre $n$ joue le rôle d'un horizon temporel, et terminal fixé, souvent appelé *horizon du marché*. Dans l'étude qui suit, il représente à la fois, le temps d'observation du marché, ainsi que *la date d'échéance* des activités économiques considérées.

Nous représenterons l'évolution aléatoire des actifs par le couple d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta S_k^i & = & S_{k-1}^i\ \Delta U_k^i \quad \text{avec} \quad 1\leq k\leq n \\ i & = & 1,2 \end{array}\right.$$

et les conditions initiales $S_0^i$, $i=1,2$, Les processus aléatoires $(U_k^i)_{0\leq k\leq n}$, $i=1,2$, représentent *les rendements des titres* pendant une unité de temps.

Nous conviendrons pour simplifier, que ces rendements sont discrets, en ce sens où les v.a. $U_k^i$ sont à valeurs dans des espaces finis. Cette hypothèse est assez réaliste car les processus de prix $S_k^i$ correspondent à des informations bancaires, ou à des cotations boursières, toujours données avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'information dont dispose un investisseur au temps $k$ est modélisée par la donnée d'une algèbre finie $\mathcal{F}_k$, c'est à dire engendrée par une partition finie d'un ensemble fini d'aléas $\Omega$. On conviendra que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, pour souligner que les prix $(S_0^1, S_0^2)$ des titres à la date initiale sont connus. On conviendra enfin que l'investisseur possède de plus en plus d'information au cours du temps. Plus formellement, on supposera que $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$ est une filtration croissante d'algèbres sur $\Omega$

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega)$$

L'algèbre terminale contenant toute l'information sur les évolution des prix jusqu'à l'échéance, coïncide avec l'algèbre engendrée par les singletons $\{\omega\}$ de tous les évènements élémentaires de $\Omega$. Autrement dit, les investisseurs ont de plus en plus d'information, et à la date d'échéance $n$, ils peuvent déterminer avec certitude la succession des aléa qui se sont produits.

Le choix de l'espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$ est loin d'être unique. Néanmoins, comme les cours des actions $(S_0^2, \ldots, S_k^2)$ sont connus au temps $k$, on doit avoir

$$\mathcal{F}_k \supset \sigma(S_0^2, \ldots, S_k^2)$$

D'autre part, puisque l'investisseur peut prévoir l'évolution de l'actif sans risque à chaque date $k$, *les taux d'intérêts instantanés* $\Delta U_k^1$ de ces actifs sont prévisibles

$$\Delta U_k^1 \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$

Autrement dit, à la date $k$, l'investisseur connaît $U_k^1$. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que la v.a. est $\mathcal{F}_{k-1}$ mesurable, ce que l'on note $U_k^1 \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$.

Il en est tout autrement de l'évolution du cours de l'actif risqué. Au temps $(k-1)$, l'investisseur ne connaît pas $U_k^2$. Il doit attendre la prochaine cotation au temps $k$. Plus formellement, nous avons

$$\Delta U_k^2 \underline{\in} \mathcal{F}_k$$

Par construction, le processus de prix $(S_k^1, S_k^2)_{0\leq k\leq n}$ est une chaîne de Markov discrète, et adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$. On conviendra que les prix des actifs $S_k^i$ sont des v.a. strictement positives.

L'actif $S_n^1$ étant sans risque, il est naturel de considérer que

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad \Delta U_k^1 \geq 0$$

Cette hypothèse conduit à une évolution favorable du titre non risqué

$$S_k^1 = (1 + \Delta U_k^1)\ S_{k-1}^1 \geq S_{k-1}^1$$

Pour simplifier l'analyse du marché, et sans perdre de généralité, nous supposerons que $S_0^1 = 1$. La valeur de l'actif sans risque au temps $k$ est alors donnée par la formule produit

$$S_k^1 = \prod_{l=1}^{k}(1 + \Delta U_l^1) =_{\text{déf.}} \mathcal{E}_k(U^1) \quad \text{avec} \quad U_k^1 = \sum_{l=1}^{k} \Delta U_l^1$$

Ainsi par exemple, un investissement initial de $S_0^1 = 1$ Euro dans l'actif sans risque permet de disposer de $S_k^1 = \mathcal{E}_k(U^1)$ Euros, après $k$ unités de temps. Lorsque le taux d'intérêt par unité de temps est constant, et déterministe

$$\Delta U_k^1 = r$$

cet investissement sans risque rapporte

$$S_k^1 = \mathcal{E}_k(U^1) = (1 + r)^k \text{ Euros}$$

Ce gain peut aussi s'interpréter comme une dépréciation monétaire de l'euro par rapport à une autre monnaie de référence plus forte. Le coefficient

$$\beta_k = \frac{1}{\mathcal{E}_k(U^1)} \ (\leq 1)$$

correspond alors à la valeur d'un euro dans cette monnaie.

**Le prix réactualisé d'une action** $S_k^i$ est alors défini par la quantité

$$\overline{S}_k^i = \beta_k \ S_k^i = \mathcal{E}_k(U^1)^{-1} \ S_k^i$$

On notera que la valeur de l'actif sans risque réactualisés $\overline{S}_k^1 = 1$ peut s'interpréter comme une unité monétaire de référence. On remarque aussi que le prix réactualisé de l'actif risqué, calculé dans cette monnaie de référence et plus forte, est toujours inférieur au prix courant

$$\overline{S}_k^2 = \mathcal{E}_k(U^1)^{-1} \ S_k^2 \ \leq \ S_k^2$$

Pour conclure, notons que l'actif sans risque peut aussi être interprété comme la rémunération d'un prêt financier. Dans ce contexte, $S_0^1 = 1$ Euro prêté, rapportera $S_k^1$ Euros à son investisseur, après $k$ unités de temps. Ainsi, un investisseur proposant un prêt de 100.000 Euros, avec un taux d'intérêt fixe de $R = 4\%$ par an, s'assure une rémunération de 4.000 Euros dans l'année. Pour estimer le rendement quotidien $r$, dans un marché journalier, on doit résoudre l'équation

$$(1 + r)^{365} = 1 + R = 1,04 \Longrightarrow r = 1,04^{\frac{1}{365}} - 1 \simeq 1,0746 \ 10^{-4}$$

Les 100.000 Euros rapportent ainsi

$$100.000 \times 1,0746\ 10^{-4} = 10,746 \text{ Euros}$$

par jour, et dans l'année

$$100.000 \times (1+r)^{365} = 100.000 \times (1+R) = 100.000 + 4.000 = 104.000 \text{ Euros}$$

**Exercice 4.1.1** *On considère le modèle de marché suivant*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1, S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1, S_1^2)$ |
|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1;4)$ | $(1,05;5)$ |
| $\omega^2$ | $(1;4)$ | $(1,05;10)$ |

1. *Construire l'arbre des épreuves représentant l'évolution de ce marché financier.*
2. *On note $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$, et $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1)$ les algèbres représentant l'information disponible à l'origine, et au temps* 1. *Montrer que*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\} = \mathcal{P}(\Omega)$$

3. *Calculer le taux d'intérêt $r = \frac{\Delta S_1^1}{S_0^1}$ de l'actif sans risque.*

**Exercice 4.1.2** *Résoudre les mêmes questions que celles posées dans l'exercice 4.1.1 pour le modèle de marché financier suivant*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1, S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1, S_1^2)$ | $S_2 = (S_2^1, S_2^2)$ |
|---|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1;5)$ | $(1,05;10)$ | $(1,10;20)$ |
| $\omega^2$ | $(1;5)$ | $(1,05;5)$ | $(1,10;10)$ |
| $\omega^3$ | $(1;5)$ | $(1,05;5)$ | $(1,10;5)$ |

### 4.1.2 Gestion de portefeuilles

Le portefeuille d'un investisseur possède à chaque instant $k$ un certain *nombre de parts* $\Phi_k^1$ du titre non risqué, et un nombre de parts $\Phi_k^2$ du titre risqué. *La valeur de ce portefeuille* au temps $k$ est ainsi donné par

$$V_k(\Phi) = \Phi_k^1\ S_k^1 + \Phi_k^2\ S_k^2$$

Contrairement aux valeurs des titres $S_k^i$, les v.a. $\Phi_k^i$ peuvent être négatives. **Si $\Phi_k^1$ est négatif**, cela signifie qu'il y a eu vente à découvert de $(-\Phi_k^1)$ parts du titre non risqué. Vendre à découvert signifie dans le jargon financier que l'on vend des actions que l'on ne possède pas ! On peut aussi interpréter le cas où $\Phi_k^1$ est négatif comme un emprunt, et une dette de $(-\Phi_k^1\ S_k^1)$ Euros. Cette situation peut encore refléter la prise en pension, ou le rachat de $(-\Phi_k^1)$ parts de titres non risqués (au coût $S_k^1$). Dans tous les cas, lorsque $\Phi_k^1$ est négatif, on reçoit une somme de $(-\Phi_k^1 S_k^1)$ Euros, à investir si possible sur des actifs risqués pour rembourser la dette.

**Le cas où $\Phi_k^1$ est positif** correspond plutôt à une vente de $\Phi_k^1$ titres non risqués, et à un gain de $(\Phi_k^1 S_k^1)$ Euros.

A titre illustratif, examinons les stratégies de gestion de portefeuilles dans un marché financier sur deux périodes de temps. Tout d'abord, on remarquera que la valeur d'un portefeuille initial formé de $\Phi_0^i$ parts de titres $\S_0^i$ est donné par

$$V_0(\Phi) = \Phi_0^1\ S_0^1 + \Phi_0^2\ S_0^2 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2\ S_0^2$$

Si $V_0(\Phi) \geq 0$, on doit débourser $V_0(\Phi)$ Euros pour son acquisition. Si au contraire $V_0(\Phi) < 0$, nous recevrons $(-V_0(\Phi))$ Euros lors de son acquisition. L'investisseur réaménage son portefeuille en $\Phi_1^i$ parts de titres $S_0^i$, de sorte à avoir

$$\Phi_1^1\ S_0^1 + \Phi_1^2\ S_0^2 = V_0(\Phi)(= \Phi_0^1\ S_0^1 + \Phi_0^2\ S_0^2)$$

Autrement dit, en liquidant le portefeuille initial $V_0(\Phi)$, l'investisseur possède un montant de $V_0(\Phi)$ Euros pour acheter le portefeuille $\Phi_1 = (\Phi_1^1, \Phi_1^2)$.

A l'instant suivant, les prix $(S_1^1, S_1^2)$ sont annoncés, et le portefeuille prend la valeur

$$V_1(\Phi) = \Phi_1^1\ S_1^1 + \Phi_1^2\ S_1^2$$

A cet instant l'investisseur peut profiter de l'information qu'il a acquise $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1)$, pour modifier son portefeuille. Avec le montant obtenu lors de l'opération initiale $V_1(\Phi)$, il réaménage son portefeuille en $\Phi_2 = (\Phi_2^1, \Phi_2^2)$, de sorte que

$$\Phi_2^1\ S_1^1 + \Phi_2^2\ S_1^2 = V_1(\Phi)(= \Phi_1^1\ S_2^1 + \Phi_1^2\ S_1^2)$$

Comme précédemment, en liquidant $V_1(\Phi)$, l'investisseur possède un montant $V_1(\Phi)$ pour acheter le portefeuille $\Phi_2$. A l'annonce des prix des titres à l'instant $k = 2$, la valeur du portefeuille associée à cette stratégie d'investissement $\Phi_2$, est donnée par

$$V_2(\Phi) = \Phi_2^1\ S_2^1 + \Phi_2^2\ S_2^2$$

Dans la description précédente, nous avons implicitement supposé que les stratégies de gestion $\Phi_k = (\Phi_k^1, \Phi_k^2)$ de portefeuilles sont *prévisibles et autofinancées.*

**La condition de prévisibilité** souligne le fait que l'investisseur, à la date $(k-1)$, doit choisir la répartition $\Phi_k$ des titres de son portefeuille pour la date $k$, avec l'information $\mathcal{F}_{k-1}$ dont il dispose à cette date. La valeur de ce portefeuille à la clôture de la séance boursière du lendemain sera $V_k(\Phi)$.

**La condition d'autofinancement** caractérise le comportement d'un investisseur réorganisant son portefeuille entre la date $k$ et $(k+1)$, et réaménageant ses actifs $\Phi_k \rightsquigarrow \Phi_{k+1}$ de façon à conserver la valeur totale du portefeuille

$$\Phi_{k+1}^1\ S_k^1 + \Phi_{k+1}^2\ S_k^2 = V_k(\Phi) = \Phi_k\ S_k^1 + \Phi_k^2\ S_k^2$$

En terme des variations des quantités d'actifs, cette condition d'autofinancement est équivalente au fait que

$$\Delta\Phi^1_{k+1} \times S^1_{k+1} + \Delta\Phi^2_{k+1} \times S^2_{k+1} = 0$$

L'autofinancement met ainsi de coté les investisseurs prélevant une partie des gains réalisés, ou injectant de l'argent frais pour couvrir les pertes subies. On notera que cette est automatiquement vérifiée dès lors que l'investisseur est passif, c'est à dire lorsque $\Phi_k = \Phi_{k+1}$. On remarquera enfin que les variations des valeurs des portefeuilles autofinancés sont uniquement liées aux variations des prix des actifs

$$\begin{aligned}
\Delta V_{k+1}(\phi) &= V_{k+1}(\phi) - V_k(\phi) \\
&= \Phi^1_{k+1}\,[S^1_{k+1} - S^1_k] + \Phi^2_{k+1}\,[S^2_{k+1} - S^2_k] \\
&= \Phi^1_{k+1}\,\Delta S^1_{k+1} + \Phi^2_{k+1}\,\Delta S^2_{k+1}
\end{aligned}$$

**Une opportunité d'arbitrage** est une stratégie de gestion de portefeuille $(\Phi_k)_{0\leq k\leq n}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. $\forall \omega \in \Omega \qquad V_0(\Phi)(\omega) = 0.$
2. $\forall \omega \in \Omega \qquad V_n(\Phi)(\omega) \geq 0.$
3. $\exists \omega \in \Omega \qquad V_n(\Phi)(\omega) > 0.$

Autrement dit, une telle stratégie permet , avec un investissement initial nul (1), et sans essuyer de pertes (2), d'avoir à l'échéance $k = n$ la possibilité de réaliser un gain (3).

Nous dirons qu'**un marché financier est viable** s'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage.

### 4.1.3 Options européennes financières

Une option européenne est un droit conditionnel intervenant initialement entre deux parties : le vendeur et l'acheteur. A une date d'échéance $n$, elle permet à l'acquéreur de vendre ou acheter une part du titre risqué à un prix $K$ fixé initialement, et appelé **prix d'exercice**. Il existe deux types d'options. Les options de vente, et les options d'achat, appelées parfois sur les marchés financiers les "put"et les "call".

- **Une option (européenne) de vente (un "put"),** permet à l'acquéreur de vendre une part du titre risqué à un prix $K$ fixé initialement, et appelé **prix d'exercice**.
  Deux cas se présentent : Si $S^2_n < K$, l'acquéreur vendra sa part de titre risqué à un montant $K$ (bien) supérieur à celui qu'il obtiendrait sur le marché financier, soit au prix $S^2_n$. Par contre, si $S^2_n \geq K$, l'acquéreur n'exercera pas son option, car il obtiendra un meilleur prix sur le marché.

**La fonction de paiement**, ou la valeur de cette option de vente, est la v.a. donnée par la formule

$$f = (K - S_n^2)_+$$

- **Une option (européenne) d'achat (un "call")**, permet à l'acquéreur d'acheter une part du titre risqué à un prix $K$ fixé initialement, et appelé **prix d'exercice**.
  Deux cas se présentent : Si $S_n^2 > K$, l'acquéreur achètera sa part de titre risqué à un montant $K$ (bien) inférieur à celui qu'il obtiendrait sur le marché financier, soit au prix $S_n^2$. Par contre, si $K \geq S_n^2$, l'acquéreur n'exercera pas son option, car il pourra acheter le titre risqué à un meilleur prix sur le marché.
  **La fonction de paiement**, ou la valeur de cette option de vente, est la v.a. donnée par la formule

$$f = (S_n^2 - K)_+$$

Le vendeur de telles options n'offrira pas de tels avantages à son client sans échange! **Le prix de l'option**, ou de ce droit conditionnel, correspond au montant versé initialement par l'acheteur au vendeur, pour acquérir cette option.

Le vendeur de son coté acceptera tout montant lui permettant l'acquisition d'un portefeuille dont la valeur à l'échéance $n$ sera supérieure ou égale, à la fonction de paiement qu'il s'est engagé à honorer. Un tel portefeuille est appelé **un portefeuille de couverture**. Le plus petit montant lui permettant d'honorer sans perte ses engagements est donné par la formule

$$C^\star(f) \quad = \quad \inf\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists(\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad V_n(\Phi) \geq f\}$$

D'un autre coté, si l'acquéreur du contrat accepte de s'endetter d'un montant $m$ afin d'acheter ce droit conditionnel, alors il voudra en échange être en mesure de rembourser cette dette à l'échéance $n$. Par conséquent, l'acquéreur souhaite pouvoir trouver un portefeuille $(-\Phi_k)_{0\leq k\leq n}$ de sorte à avoir

$$V_0(-\Phi) = -m \quad \text{et} \quad V_n(-\Phi) + f = -V_n(\Phi) + f \geq 0$$

Ainsi, le plus grand montant qu'il acceptera de payer est donné par la formule

$$\begin{aligned} C_\star(f) &= \sup\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists(-\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \\ &\qquad\qquad \text{t.q.} \quad V_0(-\Phi) = -x \quad \text{et} \quad V_n(-\Phi) + f \geq 0\} \\ &= \sup\{x \in [0,\infty) \ : \ \exists(\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad V_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad V_n(\Phi) \leq f\} \end{aligned}$$

La détermination rationnelle de ces prix, et la mise en place de stratégies de couverture, est l'un des principaux objectifs des mathématiques financières.

### 4.1.4 Exercices

**Exercice 4.1.3** *On considère le modèle de marché suivant*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1; S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1; S_1^2)$ |
|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1; 4)$ | $(1,05; 5)$ |
| $\omega^2$ | $(1; 4)$ | $(1,05; 10)$ |

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 8 *parts d'actifs sans risque, pour acheter* 2 *parts d'actifs risqué.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on vend, ou rembourse, les actifs sans risque, et l'on conserve les deux parts d'actifs risqués.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 800 *Euros à moindre frais.*

**Exercice 4.1.4** *On considère le modèle de marché suivant*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1; S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1; S_1^2)$ |
|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1; 4)$ | $(1,05; 2)$ |
| $\omega^2$ | $(1; 4)$ | $(1,05; 3)$ |

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 2 *parts d'actifs risqués, pour acheter* 8 *parts d'actifs sans risque. Autrement dit, l'investisseur vend deux parts d'actions risquées qu'il ne possède pas, et dépose immédiatement l'argent obtenu par cette vente dans un compte épargne qui rapporte* 5%.
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos deux parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos huit parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 1.200 *Euros à moindre frais.*

**Exercice 4.1.5** *On considère le modèle de marché suivant*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1; S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1; S_1^2)$ |
|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1; 10)$ | $(1,05; 5)$ |
| $\omega^2$ | $(1; 10)$ | $(1,05; 10)$ |

1. *Calculer le coût d'acquisition du portefeuille initial d'un investisseur vendant à découvert* 20 *parts d'actifs risqués, et dépose immédiatement l'argent obtenu, soit* 200 *Euros, dans un compte épargne à* 5%.
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille après évolution du cours des actifs, lorsque l'on rembourse nos vingt parts d'actifs risqués, et l'on conserve nos deux cents parts d'actifs sans risques.*
3. *Trouver une stratégie pour gagner au moins* 100 *Euros à moindre frais.*

**Exercice 4.1.6** *Montrer que le modèle de marché suivant est viable*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1; S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1; S_1^2)$ |
|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1; 5)$ | $(1,05; 10)$ |
| $\omega^2$ | $(1; 5)$ | $(1,05; 5)$ |

**Exercice 4.1.7** *On considère le marché viable étudié dans l'exercice 4.1.6.*

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1; S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1; S_1^2)$ | $f = (7 - S_1^2)_+$ |
|---|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1;5)$ | $(1,05;5)$ | $2$ |
| $\omega^2$ | $(1;5)$ | $(1,05;10)$ | $0$ |

1. *Calculer la valeur d'acquisition du portefeuille d'un investisseur vendant à découvert* $2/5$ *de part de titre risqué, et achetant* $4/1,05$ *parts d'actifs sans risques.*
2. *Calculer les valeurs possibles du portefeuille, après évolution des cours des actifs.*
3. *En déduire que ce portefeuille permet de couvrir l'option de vente associée à la fonction de paiement* $f$*.*

**Exercice 4.1.8** *On reprend le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 4.1.7.*

1. *Calculer l'endettement initial d'un investisseur empruntant* $4/1,05$ *parts d'actifs sans risques, et achetant* $2/5$ *de part de titres risqués.*
2. *Calculer les valeurs possibles de ce portefeuille, après l'évolution des cours du marché. En déduire que l'acheteur de l'option* $f$ *pourra, avec ce portefeuille rembourser sa dette initiale.*

**Exercice 4.1.9** *On reprend à nouveau le modèle de marché, et la fonction de paiement, décrits dans l'exercice 4.1.7.*

1. *Caractériser les aménagement de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut* $1$.
2. *Pour de tels portefeuilles, combien de parts d'actifs risqués doit-on vendre à découvert, de sorte à couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa. Vérifier qu'une telle stratégie d'emprunt ne permettra pas de couvrir l'option dans le second jeu d'aléa.*
3. *En conclure que le prix de l'option* $f$ *est nécessairement plus élevé que* $1$.

**Exercice 4.1.10** *Soit* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$ *un marché financier à deux titres.* $(S_k^1, S_k^2)_{0\leq k\leq n}$*. On convient que l'actif sans risque est donné par*

$$S_0^1 = 1 \quad \text{et} \quad S_k^1 = (1+r)\ S_{k-1}^1 = (1+r)^k \quad \text{avec} \quad r > 0$$

*On note* $(\overline{S}_k^1, \overline{S}_k^2)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(\overline{V}_k(\Phi))_{0\leq k\leq n}$ *les valeurs réactualisées des actifs, et des portefeuilles définies par*

$$\overline{S}_k^i = \frac{S_k^i}{(1+r)^k} \quad \text{et} \quad \overline{V}_k(\Phi) = \frac{V_k(\Phi)}{(1+r)^k}$$

1. *Vérifier que les prix* $C^\star(f)$*, et* $C_\star(f)$*, associés à une option de fonction de paiement* $f$*, peuvent s'exprimer sous la forme suivante*

$$\begin{aligned} C^\star(f) &= \inf\left\{x \in [0,\infty)\ :\ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad \overline{V}_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_n(\Phi) \geq \overline{f}\right\} \\ C^\star(f) &= \sup\left\{x \in [0,\infty)\ :\ \exists (\Phi_k)_{0\leq k\leq n} \quad \text{t.q.} \quad \overline{V}_0(\Phi) = x \quad \text{et} \quad \overline{V}_n(\Phi) \leq \overline{f}\right\} \end{aligned}$$

*où* $\overline{f} = f/(1+r)^n$ *désigne la fonction de paiement réactualisée à la date d'échéance.*

2. *Soit $\overline{K} = K/(1+r)^n$ le prix d'exercice réactualisé à la date d'échéance. Vérifier les équivalences suivantes*

$$f = (K - S_n^2)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{K} - \overline{S}_n^2)_+$$

*et*

$$f = (S_n^2 - K)_+ \Longleftrightarrow \overline{f} = (\overline{S}_n^2 - \overline{K})_+$$

## 4.2 Modèle binomial sur une période

Nous allons analyser dans cette première section, l'évolution d'un marché financier élémentaire à deux états, sur une unité de temps $n = 1$. L'évolution du prix d'une part d'un titre sans risque $S_k^1$, à taux d'intérêt constant $\Delta U_k^1 = r > 0$ est simplement donné par les formules

$$S_0^1 = 1 \quad \text{et} \quad S_1^1 = (1+r)$$

Le prix actuel d'une part du titre risqué est connu avec certitude initialement

$$S_0^2 = s_0 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$$

A la période suivante, $S_1^2$ ne peut prendre que deux valeurs

$$\forall \omega \in \Omega \qquad S_1^2(\omega) \in \{s_{1,1}, s_{1,2}\} \quad \text{avec} \quad 0 < s_{1,1} < s_{1,2}$$

Autrement dit, ce marché binomial évolue de deux façons différentes. Pour un certain aléa, disons $\omega^1$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} S_0(\omega^1) & = & (S_0^1(\omega^1), S_0^2(\omega^1)) = (1, s_0) \\ S_1(\omega^1) & = & (S_1^1(\omega^1), S_1^2(\omega^1)) = ((1+r), s_{1,1}) \end{array}$$

Dans un autre contexte aléatoire, disons pour un aléa $\omega^2$, on a plutôt

$$\begin{array}{rcl} S_0(\omega^2) & = & (S_0^1(\omega^2), S_0^2(\omega^2)) = (1, s_0) \\ S_1(\omega^2) & = & (S_1^1(\omega^2), S_1^2(\omega^2)) = ((1+r), s_{1,2}) \end{array}$$

Le modèle binomial sur une période correspond au tableau des épreuves suivant :

| $\Omega$ | $S_0 = (S_0^1, S_0^2)$ | $S_1 = (S_1^1, S_1^2)$ |
|---|---|---|
| $\omega^1$ | $(1; s_0)$ | $((1+r); s_{1,1})$ |
| $\omega^2$ | $(1; s_0)$ | $((1+r); s_{1,2})$ |

Ce marché financier s'exprime donc de façon naturelle sur l'espace des aléas

$$\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$$

muni de la filtration élémentaire :

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1) = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega^1\}, \{\omega^2\}\}$$