Chapitre 3

Éléments de la théorie des martingales

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Caractérisations

Définition 3.1.1 *Une martingale est un processus aléatoire $M = (M_k)_{0\leq k\leq n}$, à valeurs réelles, défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, et vérifiant la propriété suivante*

$$\forall 0 \leq k < n \qquad \mathbb{E}(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k$$

On dit aussi qu'un processus aléatoire réel $M = (M_k)_{0\leq k\leq n}$ est une sous-martingale (resp. une sur-martingale), s'il vérifie les inégalités suivantes

$$\forall 0 \leq k < n \qquad \mathbb{E}(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \geq M_k \qquad (\textit{resp.} \quad \mathbb{E}(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \leq M_k)$$

Les propriétés de martingales que nous avons introduites précisent les tendances locales d'un processus aléatoire. Plus précisément, on note que tout processus aléatoire $M = (M_k)_{0\leq k\leq n}$ peut se mettre sous la forme

$$M_k = M_0 + \sum_{l=1}^{k} \Delta M_k \quad \text{avec} \quad \Delta M_k = (M_k - M_{k-1})$$

La propriété de martingale (resp. sous-martingale, ou sur-martingale), exprime le fait que les accroissements conditionnels moyens et prévisibles, sont nuls (resp. positifs, ou négatifs).

Supposons par exemple que M_k représente l'évolution aléatoire de la fortune d'un joueur. Dans ce cas, la propriété de martingale exprime le fait que le jeu est équitable en moyenne, en ce sens où le joueur ne peut accroître ou diminuer son espérance de gain $(M_{k+1} - M_k)$, à l'aide des information précédentes

$$\mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) = 0$$

On remarquera dans ce cas que le fortune moyenne du joueur reste constante

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(M_k) = \mathbb{E}(M_0)$$

La propriété de sous martingale correspond à un jeu favorable au joueur avec des gains conditionnels certains

$$\forall 0 \leq k < n \qquad \mathbb{E}(M_{k+1} - M_k \mid \mathcal{F}_k) \geq 0$$

conduisant à la croissance en moyenne de sa fortune

$$\mathbb{E}(M_0) \leq \ldots \leq \mathbb{E}(M_k) \leq \mathbb{E}(M_{k+1}) \leq \ldots \leq \mathbb{E}(M_n)$$

Terminons cette section par une caractérisation pratique de la propriété de martingale, en terme de processus transformés. Nous utiliserons cette caractérisation dans le chapitre concernant les mathématiques financières, lorsque nous "neutraliserons" des marchés financiers.

Proposition 3.1.1 *Soit* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ *un processus aléatoire défini sur un espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$. *Le processus* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ *est une martingale si, et seulement si, pour tout processus prévisible* $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$, *on a la propriété suivante*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{l=0}^{n} U_k \ \Delta M_k\right) = \mathbb{E}(U_0 M_0)$$

Preuve:
Si $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une martingale, alors on a clairement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{l=0}^{n} U_k \ \Delta M_k\right) &= \sum_{l=0}^{n} \mathbb{E}\left(U_k \ \Delta M_k\right) \\
&= \mathbb{E}(U_0 M_0) + \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(U_k \ \Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&= \mathbb{E}(U_0 M_0) + \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}\left(U_k \ \mathbb{E}(\Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\right) = \mathbb{E}(U_0 M_0)
\end{aligned}$$

Pour montrer la réciproque, on commence par noter que l'on a nécessairement

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(M_k) = \mathbb{E}(M_0)$$

Pour vérifier cette assertion, il suffit de choisir le processus prévisible constant $U_k = 1$. En effet, dans cette situation, nous avons

$$M_k = \sum_{l=0}^{k} \Delta M_l = \sum_{l=0}^{k} U_l \ \Delta M_l$$

D'après nos hypothèses, on obtient

$$\mathbb{E}(M_k) = \mathbb{E}(\sum_{l=0}^{k} U_l \ \Delta M_l) = \mathbb{E}(U_0 M_0) = \mathbb{E}(M_0)$$

Soit T une v.a. positive entière, telle que les évènements $\{T \geq k\}$ soient prévisibles, c'est à dire $1_{\{T\geq k\}} \Subset \mathcal{F}_{k-1}$. On a clairement

$$M_T = \sum_{k=0}^{T} \Delta M_k = \sum_{k=0}^{n} U_k \ \Delta M_k$$

avec le processus prévisible $U_k = 1_{T\geq k} \Subset \mathcal{F}_{k-1}$. D'après nos hypothèses, nous obtient que

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(U_0 M_0) = \mathbb{E}(M_0)$$

On associe à tout évènement $A \in \mathcal{F}_k$, la v.a. entière

$$T = k \ 1_A + \ (k+1) \ 1_{A^c}$$

Par construction, les évènements

$$\{T \geq l\} = \begin{cases} \Omega & \text{si} \quad l \leq k \\ A^c & \text{si} \quad l = k+1 \\ \emptyset & \text{si} \quad l > (k+1) \end{cases}$$

sont prévisibles. D'autre part, nous avons les décompositions

$$\begin{aligned} M_T &= M_k \ 1_A + M_{k+1} \ 1_{A^c} \\ &= M_k \ 1_A + M_{k+1} \ (1 - 1_A) = M_{k+1} - 1_A \ \Delta M_{k+1} \end{aligned}$$

D'après la discussion précédente, on obtient

$$\forall A \in \mathcal{F}_k \qquad (\mathbb{E}(M_T) =)\mathbb{E}(M_{k+1}) - \mathbb{E}(1_A \ \Delta M_{k+1}) = \mathbb{E}(M_0)$$

Compte tenu du fait que $\mathbb{E}(M_{k+1}) = \mathbb{E}(M_0)$, ceci entraîne que

$$\forall A \in \mathcal{F}_k \qquad \mathbb{E}(1_A \ \Delta M_{k+1}) = 0$$

D'après les propriétés des espérances conditionnelles, on en conclut que

$$\mathbb{E}(\Delta M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = 0$$

En répétant ces raisonnement, pour tous les indices $k \in \{0, \ldots, n\}$, on montre que le processus M_k est nécessairement une martingale. Ceci achève la preuve de la proposition. ■

3.1.2 Compensateurs

Soit $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ une martingale définie sur un espace probabilisé filtré

$$(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$$

Le processus aléatoire formé des carrés $(M_k^2)_{0\leq k\leq n}$ est une sous martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$. Cette propriété résulte simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\mathbb{E}(M_{k+1}^2 \mid F_k) \geq \mathbb{E}(M_{k+1} \mid F_k)^2 = M_k^2$$

Définition 3.1.2 *On associe à une martingale $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, le processus prévisible $(\langle M\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$\langle M\rangle_k = \sum_{l=0}^{k}[\mathbb{E}(M_l^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) - M_{l-1}^2] = \sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}([M_l - M_{l-1}]^2 \mid \mathcal{F}_{l-1})$$

Le processus aléatoire $(\langle M\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$, est appelé **le compensateur, la variation quadratique prévisible**, *ou encore* **le processus croissant**, *associé à la martingale $(M_k)_{0\leq k\leq n}$.*

Dans la définition précédente, nous avons utilisé la convention $\mathbb{E}([M_0 - M_{-1}]^2 \mid \mathcal{F}_{-1}) = \mathbb{E}(M_0^2)$, lorsque $l = 0$. L'importance de ce processus résulte de la proposition suivante.

Proposition 3.1.2 *Soit $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ une martingale réelle définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$. Le processus aléatoire*

$$M_k^2 - \langle M\rangle_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$.

Preuve:
Pour vérifier la première assertion, on observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}([M_k + (M_{k+1} - M_k)]^2 \mid \mathcal{F}_k) \\
&= M_k^2 + 2M_k\mathbb{E}((M_{k+1} - M_k) \mid \mathcal{F}_k) + \mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k) \\
&= M_k^2 + \mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k)
\end{aligned}$$

On en déduit la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
[M_{k+1}^2 - \langle M\rangle_{k+1}] - [M_k^2 - \langle M\rangle_k] &= [M_{k+1}^2 - M_k^2] - [\langle M\rangle_{k+1} - \langle M\rangle_k] \\
&= [M_{k+1}^2 - M_k^2] - \mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k) \\
&= [M_{k+1}^2 - M_k^2] - [\mathbb{E}(M_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k) - M_k^2]
\end{aligned}$$

Il est alors clair que la propriété de martingale est satisfaite

$$\mathbb{E}(M_{k+1}^2 - \langle M\rangle_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k^2 - \langle M\rangle_k$$

■

Définition 3.1.3 *On associe à un couple de martingales réelles* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *et* $(N_k)_{0\leq k\leq n}$*, sur un même espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*, le processus prévisible* $(\langle M, N\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$*, défini par*

$$\langle M, N\rangle_k = \sum_{l=0}^{k}[\mathbb{E}(M_l N_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) - M_{l-1}N_{l-1}] = \sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}(\Delta M_l \Delta N_l \mid \mathcal{F}_{l-1})$$

avec la convention $\mathbb{E}([M_0 - M_{-1}][N_0 - N_{-1}] \mid \mathcal{F}_{-1}) = \mathbb{E}(M_0 N_0)$*, lorsque* $l = 0$*.*

Le prochain théorème est une extension de la proposition précédente à des produits quelconques de martingales.

Théorème 3.1.1 *Soit* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *et* $(N_k)_{0\leq k\leq n}$*, un couple de martingales réelles, et définies sur un même espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*. Dans cette situation, les processus aléatoires défini par*

$$M_k N_k - [M, N]_k \qquad et \qquad M_k N_k - \langle M, N\rangle_k$$

sont des martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$

Preuve:
D'après la formule d'intégration par parties (2.4), nous avons la décomposition

$$M_k N_k = \sum_{l=1}^{k} M_{l-1}\ \Delta N_l + \sum_{l=1}^{k} N_{l-1}\ \Delta M_l + [M, N]_k$$

D'autre part, nous avons vu dans l'exercice 3.1.5 que les processus

$$\sum_{l=1}^{k} M_{l-1}\Delta N_l \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{k} N_{l-1}\Delta M_l$$

sont des martingales. On en conclut que

$$M_k N_k - [M, N]_k = M_0 N_0 + \sum_{l=1}^{k} M_{l-1}\ \Delta N_l + \sum_{l=1}^{k} N_{l-1}$$

est une martingale.

Pour vérifier la dernière assertion du théorème, on remarque tout d'abord que l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{k+1}N_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}([M_k + (M_{k+1} - M_k)][N_k + (N_{k+1} - N_k)] \mid \mathcal{F}_k) \\ &= M_k N_k + \mathbb{E}([M_{k+1} - M_k][N_{k+1} - N_k] \mid \mathcal{F}_k)\end{aligned}$$

On en déduit la décomposition

$$\begin{aligned}&[M_{k+1}N_{k+1} - \langle M, N\rangle_{k+1}] - [M_k N_k - \langle M, N\rangle_k] \\ &= [M_{k+1}N_{k+1} - M_k N_k] - [\langle M, N\rangle_{k+1} - \langle M, N\rangle_k] \\ &= [M_{k+1}N_{k+1} - M_k N_k] - \mathbb{E}([M_{k+1} - M_k][N_{k+1} - N_k] \mid \mathcal{F}_k) \\ &= [M_{k+1}N_{k+1} - M_k N_k] - [\mathbb{E}(M_{k+1}N_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) - M_k N_k]\end{aligned}$$

On en conclut que la propriété de martingale est satisfaite

$$\mathbb{E}(M_{k+1}N_{k+1} - \langle M, N\rangle_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k N_k - \langle M, N\rangle_k$$

■

Les compensateurs $([M, N]_k)_{0\leq k\leq n}$, et $(\langle M, N\rangle_k)_{0\leq k\leq n}$, décrits dans le théorème 3.1.1, sont des processus aléatoires initialisés en

$$[M, N]_0 = M_0 N_0 \quad \text{et} \quad \langle M, N\rangle_0 = \mathbb{E}(M_0 N_0)$$

Comme dans l'étude des décompositions (2.5), nous pouvons alternativement utiliser des compensateurs initialisés en 0. Plus précisément, il est facile de vérifier que les deux processus suivants

$$M_k N_k - M_0 N_0 - (\langle M, N\rangle_k - \langle M, N\rangle_0)$$

et

$$M_k N_k - M_0 N_0 - ([M, N]_k - [M, N]_0)$$

sont des martingales nulles à l'origine.

3.1.3 Propriétés fondamentales

La proposition suivante offre un catalogue synthétique de propriétés classiques utilisées dans la suite du cours.

Proposition 3.1.3 *Soit $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ une martingale (réelles) définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$.*

1. *Pour tout $0 \leq k \leq l \leq n$, on a $\mathbb{E}(M_l \mid \mathcal{F}_k) = M_k$. En particulier, la martingale M_k s'exprime en fonction de son état terminal, par la formule*
$$M_k = \mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_k)$$
On a de plus, $\mathbb{E}(M_k) = \mathbb{E}(M_0)$.
2. *Pour toute fonction convexe f sur $\mathbb{R}$, le processus $(f(M_k))_{0\leq k\leq n}$ une sous martingale. En particulier, les processus aléatoires $(M_k^2)_{0\leq k\leq n}$, et $(|M_k|)_{0\leq k\leq n}$, sont des sous martingales.*
3. *Toute combinaison linéaire de martingales, est une martingale.*

Preuve:
Le premier point est équivalent au fait que

$$\forall 0 \leq p+m \leq n \qquad \mathbb{E}(M_{m+p} \mid \mathcal{F}_m) = M_m$$

Le cas $p = 1$ résulte de la définition même d'une martingale. On raisonne ensuite par récurrence sur cet indice. Supposons donc le résultat vrai au rang p. Compte tenu du fait que $\mathcal{F}_{m+p} \supset \mathcal{F}_m$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{m+(p+1)} \mid \mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}(\ \mathbb{E}(M_{m+(p+1)} \mid \mathcal{F}_{m+p})\mid \mathcal{F}_m) \\ &= \mathbb{E}(M_{m+p} \mid \mathcal{F}_p) \\ &= M_p \end{aligned}$$

Le dernier point résulte de l'hypothèse de récurrence. Ceci achève la preuve du résultat recherché. Le second point est une conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E}(f(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \geq f\left(\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) = f(M_n)$$

La vérification de la dernière propriété ne pose aucune difficulté majeure. ■

La proposition suivante est une conséquence de la première propriété énoncée dans la proposition 3.1.3. Nous utiliserons ce résultat dans les prochains chapitres de ce cours, lorsque nous aborderons les stratégies de financement de portefeuilles, et la simulation d'options, dans des marchés financiers viables.

Proposition 3.1.4 *Soit $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \ldots, X_k)$, $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à un processus aléatoire $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, à valeurs dans un espace d'états fini E. On associe à une fonction $g_n : E^{n+1} \to \mathbb{R}$, la suite de fonctions*

$$V_k : (x_0, \ldots, x_k) \in E^{k+1} \mapsto V_k(x_0, \ldots, x_k) \in \mathbb{R} \ , \quad 0 \leq k \leq n$$

définies par les formules de récurrence inverse

$$\begin{array}{rcl} V_n(x_0, \ldots, x_n) & = & g_n(x_0, \ldots, x_n) \\ V_k(x_0, \ldots, x_k) & = & \mathbb{E}\left(V_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, X_{k+1}) \mid (X_0, \ldots, X_k) = (x_0, \ldots, x_k)\right) \end{array}$$

pour tout $0 \leq k < n$. Le processus aléatoire $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k = V_k(X_0, \ldots, X_k)$$

est l'unique martingale, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$, dont la valeur terminale M_n coïncide avec la v.a. $g_n(X_0, \ldots, X_n)$.

Preuve:
Par construction, le processus

$$M_k = V_k(X_0, \ldots, X_k)$$

forme une martingale, telle que $M_n = g_n(X_0, \ldots, X_n)$. On notera que les relations de récurrence inverse sont équivalentes à la propriété de martingale

$$M_k = \mathbb{E}\left(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right)$$

De plus, d'après la première propriété énoncée dans la proposition 3.1.3, nous avons

$$M_k = \mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(g_n(X_0, \ldots, X_n) \mid \mathcal{F}_k)$$

pour toute martingale $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, telle que $M_n = g_n(X_0, \ldots, X_n)$. Par conséquent, si $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et $(M'_k)_{0 \leq k \leq n}$, désignent un couple de martingales telles que

$$M_n = M'_n = g_n(X_0, \ldots, X_n)$$

alors on a nécessairement

$$M_k = \mathbb{E}(g_n(X_0, \ldots, X_n) \mid \mathcal{F}_k) = M'_k$$

Ceci démontre l'unicité d'une martingale à condition terminale fixé, et achève la preuve de la proposition.

■

3.1.4 Martingales exponentielles

Afin d'éviter des répétitions inutiles, on conviendra dans ce qui suit que tous les processus aléatoires considérés sont définis sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$.

Définition 3.1.4 *Le processus exponentiel* $(\mathcal{E}_k(X))_{0\leq k\leq n}$ *d'un processus aléatoire réel* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *est défini de la façon suivante*

$$\mathcal{E}_k(X) = \prod_{l=1}^{k}(1+\Delta X_l) = \mathcal{E}_{k-1}(X)\ (1+\Delta X_k)$$

On notera que $(\mathcal{E}_k(X))_{0\leq k\leq n}$ *est défini de manière équivalente, par la donnée des accroissements*

$$\Delta\mathcal{E}_k(X) = \mathcal{E}_{k-1}(X)\times\Delta X_k$$

On adoptera la convention usuelle $\prod_{\emptyset} = 1$*, de sorte que* $\mathcal{E}_0(X) = 1$*.*

Proposition 3.1.5 *Pour tout couple de processus aléatoires* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*, on a la formule produit*

$$\mathcal{E}_k(X)\times\mathcal{E}_k(Y) = \epsilon_k(X+Y+[X,Y])$$

En particulier, lorsque les accroissements du processus $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *sont tels que* $(1+\Delta X_k) > 0$*, on a la formule d'inversion*

$$\mathcal{E}_k(X)\times\mathcal{E}_k(-X^{\star}) = 1$$

avec le processus aléatoire $(X_k^{\star})_{0\leq k\leq n}$*, donné par les accroissements*

$$\Delta X_k^{\star} = \Delta X_k/(1+\Delta X_k)$$

Preuve:
Pour vérifier la première assertion, il suffit de noter que

$$\begin{aligned}(1+\Delta X_k)(1+\Delta Y_k) &= 1+\Delta X_k+\Delta Y_k+\Delta X_k\Delta Y_k\\ &= 1+\Delta(X+Y+[X,Y])_k\end{aligned}$$

La seconde assertion est une conséquence immédiate de la première. En effet, par définition de $(X_k^{\star})_{0\leq k\leq n}$, nous avons

$$1+\Delta X_k-\Delta X_k^{\star}-\Delta X_k\Delta X_k^{\star} \;=\; 1+\Delta X_k-\Delta X_k^{\star}(1+\Delta X_k) = 1$$

Par conséquent, on obtient

$$1 + \Delta(X - X^\star - [X, X^\star])_k = 1$$

et finalement

$$\mathcal{E}_k(X) \times \mathcal{E}_k(-X^\star) = \mathcal{E}_k(X - X^\star - [X, X^\star]) = 1$$

■

Proposition 3.1.6 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, et $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$, un couple de processus aléatoires. On suppose que $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ est prévisible, et ses accroissements sont tels que $(1 + \Delta Y_k) > 0$. Dans cette situation, nous avons les équivalences suivantes*

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{E}_k(X))_{0\leq k\leq n} \text{ martingale} & \Longleftrightarrow & (X_k)_{0\leq k\leq n} \text{ martingale} \\ (\mathcal{E}_k(X)/\mathcal{E}_k(Y))_{0\leq k\leq n} \text{ martingale} & \Longleftrightarrow & (X_k - Y_k)_{0\leq k\leq n} \text{ martingale}\end{array}$$

Preuve:
La première équivalence est une conséquence directe du fait suivant

$$\mathbb{E}(1 + \Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0$$

Pour vérifier la seconde, on remarque que l'on a

$$\mathcal{E}_k(X)/\mathcal{E}_k(Y) = \mathcal{E}_k(X)\ \mathcal{E}_k(-Y^\star) = \epsilon_k(X - Y^\star - [X, Y^\star])$$

et

$$\begin{array}{rcl}\Delta X_k - \Delta Y_k^\star - \Delta X_k \Delta Y_k^\star & = & \Delta X_k - \dfrac{\Delta Y_k}{1 + \Delta Y_k} - \dfrac{\Delta X_k \Delta Y_k}{1 + \Delta Y_k} \\ & = & \dfrac{\Delta X_k + \Delta X_k \Delta Y_k - \Delta Y_k - \Delta X_k \Delta Y_k}{1 + \Delta Y_k} \\ & = & \dfrac{\Delta X_k - \Delta Y_k}{1 + \Delta Y_k}\end{array}$$

La fin de la démonstration est désormais claire. ■

3.1.5 Lemme de Girsanov

La donnée d'une martingale positive $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$, sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, peut s'interpréter comme un changement de probabilité. On définit cette nouvelle probabilité $\mathbb{P}'$ en posant

$$\forall A \subset \Omega \qquad \mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}(Z_n\ 1_A)\ \left(= \sum_{\omega\in A} Z_n(\omega)\ \mathbb{P}(\omega)\right) \tag{3.1}$$

On vérifie aisément que $\mathbb{P}'$ est bien une mesure de probabilité sur Ω. De plus, on a pour tout $0 \leq k \leq n$

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathcal{F}_k \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}'(A) & = & \mathbb{E}(Z_n \ 1_A) \\ & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n \ 1_A \mid \mathcal{F}_k)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_k) \ 1_A) \\ \Longrightarrow \quad \mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}(Z_k \ 1_A) & & \end{array}$$

Ces deux propriétés sont souvent notées “de façon synthétique”

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad \frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}_{|F_k} = Z_k$$

Avec ces notations, les formules précédentes s'expriment sous la forme suivante

$$A \in \mathcal{F}_k \Rightarrow \mathbb{P}'(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}'(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) \times \frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}_{|F_k}(\omega) = \mathbb{E}(Z_k \ 1_A)$$

Les résultats que nous venons d'examiner s'étendent aux variables aléatoires. En effet, lorsque $U \underline{\in} \mathcal{F}_k$, avec $0 \leq k \leq n$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}'(U) & = & \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} U(\omega) \ \mathbb{P}'(\omega) \\ & = & \mathbb{E}(U Z_n) = \mathbb{E}(U \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_k)) = \mathbb{E}(U Z_k) \end{array}$$

Remarquons que pour tout $V \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$, on a $(UV) \underline{\in} \mathcal{F}_k$, et en accord avec ce qui précède, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}'(UV) & = & \mathbb{E}(UVZ_k) \\ & = & \mathbb{E}(\mathbb{E}(UVZ_k \mid F_{k-1})) = \mathbb{E}(V\mathbb{E}(UZ_k \mid F_{k-1})) \\ & = & \mathbb{E}(V \ Z_k Z_{k-1}^{-1} \ \mathbb{E}(UZ_k \mid F_{k-1})) \\ & = & \mathbb{E}' \left(V \ Z_{k-1}^{-1} \mathbb{E}(UZ_k \mid F_{k-1})\right) \end{array}$$

L'égalité ci-dessus étant satisfaite pour tout $V \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$, on en conclut que

$$\mathbb{E}'(U \mid \mathcal{F}_{k-1}) = Z_{k-1}^{-1} \mathbb{E}(UZ_k \mid F_{k-1})$$

On vérifie alors aisément le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 (Lemme de Girsanov) *Si $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}$, alors le processus*

$$M'_k = M_k - \sum_{l=0}^{k} Z_{l-1}^{-1} \mathbb{E}(Z_l \ \Delta M_l \mid \mathcal{F}_{l-1})$$

est une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}'$ défini en (3.1). Lorsque $l = 0$, on utilise les conventions $Z_{-1}^{-1} = 1$, $\mathcal{F}_{l-1} = \{\emptyset, \Omega\}$, et $\Delta M_0 = M_0$, de sorte que

$$M'_0 = M_0 - \mathbb{E}(Z_0 \ M_0)$$

3.1.6 Exercices

Exercice 3.1.1 *On considère un processus prévisible* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$*, et un processus aléatoire* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*, sur un espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*. Montrer que si* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une martingale, il en est de même de* $((X \bullet Y)_k)_{0\leq k\leq n}$*. Lorsque* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *est positif, vérifier que* $((X \bullet Y)_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une sous martingale (resp. une sur martingale), dès que* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une sous martingale (resp. une sur martingale).*

Exercice 3.1.2 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*, avec*

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = p \in [0,1]$$

On conviendra que $\{\epsilon_k = +1\}$ *représente l'évènement favorable ou le joueur gagne à la* $k^{\text{ième}}$ *séquence de jeu une unité de mise. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots \epsilon_k)$$

la filtration associée au déroulement du jeux, avec la convention $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*, pour* $k = 0$*. Vérifier que le processus de comptage des succès*

$$M_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale si $p = 1/2$*, une sur-martingale lorsque* $p \leq 1/2$*, et enfin une sous-martingale lorsque* $p \geq 1/2$*.*

Exercice 3.1.3 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Montrer que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$M_k = \sum_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots \epsilon_k)$*.*

Exercice 3.1.4 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. indépendantes, de moyenne unité (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Vérifier que processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par le produit*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \dots \epsilon_k)$*.*

Exercice 3.1.5 *Soit* L_0*, une v.a., et* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *et* $(N_k)_{0\leq k\leq n}$*, un couple de martingales définies sur un même espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*. Vérifier que le processus* $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini ci-dessous*

$$L_k = L_0 + \sum_{l=1}^{k} M_{l-1} \Delta N_l$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$*.*

Exercice 3.1.6 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles indépendantes, centrées (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. On note* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$*, la filtration d algèbres associée.*

1. *Vérifier que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k = \sum_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$*.*

2. *On notera par la suite* $\sigma_k^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$*, les variances des v.a.* ϵ_k*. Montrer que*

$$\mathbb{E}([M_{k+1} - M_k]^2 \mid \mathcal{F}_k) = \sigma_{k+1}^2$$

En déduire que les processus aléatoires

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k^2 - \sum_{l=0}^{k} \sigma_l^2 \quad \textit{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - \sum_{l=1}^{k} \sigma_l^2$$

sont des martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$*.*

3. *Dans le cas où les v.a.* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *sont i.i.d. et centrées, les processus aléatoires*

$$M_k^2 - (k+1)\sigma^2 \quad \textit{et} \quad M_k^2 - M_0^2 - k\ \sigma^2 \qquad \textit{avec} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(\epsilon_k^2)$$

forment des martingales.

Exercice 3.1.7 *Soit* $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles indépendantes, de moyenne unité (i.e.* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. On note* $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$*, la filtration d algèbres associée.*

1. *Montrer que le processus aléatoire* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$M_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$*.*

2. *On notera par la suite* $\sigma_k^2 = \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)]^2)$*, les variances des v.a.* ϵ_k*. Vérifier que le processus aléatoire*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l^2] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m^2]\ \sigma_l^2$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$*.*

Exercice 3.1.8 *Soit* $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, indépendantes et centrées (en ce sens où* $\mathbb{E}(\epsilon_k) = 0 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$*. On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(Y'_k)_{0\leq k\leq n}$*, définies par*

$$Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k \quad \text{et} \quad Y'_k = \epsilon'_0 + \ldots + \epsilon'_k$$

1. *Montrer que le compensateur* $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ *du processus produit* $X_k = Y_k Y'_k$, *est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{E}(\epsilon_l \epsilon'_l)$$

2. *En déduire que le processus*

$$[\sum_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\sum_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k)$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

Exercice 3.1.9 *Soit* $((\epsilon_k, \epsilon'_k))_{0 \leq k \leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$, *indépendantes et telles que*

$$\mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 = \mathbb{E}(\epsilon'_k)$$

et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. *On note*

$$\mathcal{F}_k = \sigma((\epsilon_1, \epsilon'_1), \ldots, (\epsilon_k, \epsilon'_k))$$

la filtration d algèbres associée. On associe à ces suites, le couple de martingales $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, *et* $(Y'_k)_{0 \leq k \leq n}$, *définies par*

$$Y_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon_l \quad et \quad Y'_k = \prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l$$

1. *Vérifier que la formule*

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_k, \epsilon'_k) =_{\text{déf.}} \mathbb{E}([\epsilon_k - \mathbb{E}(\epsilon_k)][\epsilon'_k - \mathbb{E}(\epsilon'_k)]) = \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon'_k) - 1$$

2. *Montrer que le compensateur* $(\langle Y, Y' \rangle_k)_{0 \leq k \leq n}$ *du processus produit* $X_k = Y_k Y'_k$, *est donnée par la formule suivante*

$$\langle Y, Y' \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

3. *En déduire que le processus*

$$[\prod_{l=0}^{k} \epsilon_l] \times [\prod_{l=0}^{k} \epsilon'_l] - \sum_{l=0}^{k} [\prod_{m=0}^{l-1} \epsilon_m \epsilon'_m] \times \mathrm{Cov}(\epsilon_l, \epsilon'_l)$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$.

Exercice 3.1.10 *Soit* $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ *un processus de Markov, à valeurs dans les espaces* $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, *de probabilités de transitions* $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, *et de loi initiale* η_0. *On associe à toute fonction* f_{k+1} *sur* E_{k+1}, *la fonction* $M_{k+1}(f_{k+1})$ *sur* E_k *définie par*

$$\forall x_k \in E_k \qquad M_{k+1}(f_{k+1})(x_k) = \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) f(x_{k+1}) = \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k)$$

1. *Soit $f = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de fonctions définies sur les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$. Montrer que le processus*

$$M_k(f) = \sum_{l=1}^{k} \left[f_l(X_l) - K_l(f_l)(X_{l-1}) \right]$$

est une martingale nulle en l'origine, par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ associée au processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

2. *Déterminer le compensateur de la martingale $(M_k(f))_{0 \leq k \leq n}$.*

Exercice 3.1.11 *Soit $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes et centrées, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec*

$$u_k < 0 \leq v_k \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k\ p_k + v_k\ (1 - p_k) = 0$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$) à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \{\sum_{l=0}^{k} w_l \ : \ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\} = E_{k-1}^Y + \{u_k, v_k\}$$

3. *Vérifier que le processus $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$ est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

Exercice 3.1.12 *Soit $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points $E_k = \{u_k, v_k\}$, avec*

$$u_k < 1 \leq v_k \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k) = 1 \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\epsilon_k = u_k) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = v_k) = p_k \in (0,1)$$

On note $\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$, avec $0 \leq k \leq n$, la filtration naturelle associée à ces variables aléatoires.

1. *Vérifier la propriété suivante :*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad u_k\ p_k + v_k\ (1 - p_k) = 1$$

2. *Montrer que le processus défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 \times \ldots \times \epsilon_k = Y_{k-1} \times \epsilon_k$$

est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$) à valeurs dans les espaces

$$E_k^Y = \{\prod_{l=0}^{k} w_l \ : \ w_l \in \{u_l, v_l\}, \quad 0 \leq l \leq k\}$$

3. *Vérifier que le processus* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *est aussi une chaîne de Markov. Déterminer sa loi initiale, et ses probabilités de transitions.*

Exercice 3.1.13 *Soit* X *une v.a. réelle définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$. *On considère une filtration croissante de sous algèbres* $(F_k)_{0\leq k\leq n}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$. *Vérifier que la processus aléatoire* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad X_k = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_k)$$

est une martingale sur l'espace filtré $(\Omega, (F_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$. *Inversement, si* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *désigne une martingale par rapport à la filtration* $(F_k)_{0\leq k\leq n}$, *montrer qu'il existe une v.a. réelle* X, *telle que* $X_k = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_k)$, *pour tout* $0 \leq k \leq n$.

Exercice 3.1.14 *Soit* $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. réelles, indépendantes, centrées, et équidistribuées. On considère la martingale*

$$\forall 0 \leq k \leq k \qquad M_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l = M_{k-1} + \epsilon_k$$

et la fonction $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda\epsilon_1}) \in \mathbb{R}$.

1. *Vérifier que le processus défini*

$$Z_k^\lambda = e^{\lambda M_k - k\log\varphi(\lambda)} \left(= e^{\lambda M_{k-1} - (k-1)\log\varphi(\lambda)} \ \frac{e^{\lambda\epsilon_k}}{\mathbb{E}(e^{\lambda\epsilon_k})} \right)$$

est une martingale exponentielle

2. *Plus généralement, montrer que pour toute martingale* $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, *le processus suivant est à nouveau une martingale exponentielle*

$$Z_k^\lambda = e^{\lambda M_k} / \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}(e^{\lambda \Delta M_l} \mid \mathcal{F}_{l-1})$$

Exercice 3.1.15 *Soit* $(\mathcal{E}_k(X))_{0\leq k\leq n}$ *le processus exponentiel d'une martingale* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, *définie sur* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, *et telle que* $(1 + \Delta X_k) > 0$, *pour tout indice* $0 \leq k \leq n$.

1. *Vérifier que* Z_k *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$.
2. *On note* $\mathbb{P}'$ *la probabilité sur* Ω, *définie par*

$$\forall A \subset \Omega \qquad \mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}(Z_n \ 1_A) \quad \text{avec} \quad Z_n = \mathcal{E}_n(X)$$

Montrer que pour toute martingale $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ *sur* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, *le processus aléatoire* $(M'_k)_{0\leq k\leq n}$ *défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M'_k = M_k - \langle M, X\rangle_k$$

est une martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P}')$.

Exercice 3.1.16 *Soit* $((\epsilon_k,\epsilon'_k))_{0\leq k\leq n}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, indépendantes et centrées (en ce sens où* $\mathbb{E}(\epsilon_k)=0=\mathbb{E}(\epsilon'_k)$*), et définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathbb{P})$*. On note*

$$\mathcal{F}_k=\sigma((\epsilon_1,\epsilon'_1),\ldots,(\epsilon_k,\epsilon'_k))$$

la filtration d algèbres associée. On associe aux suites $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(\epsilon'_k)_{0\leq k\leq n}$*, les processus* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$*, et* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$*, donnés par*

$$X_k=\sum_{k=0}^{n}\epsilon_k \quad \text{et} \quad Y_k=\sum_{k=0}^{n}\epsilon'_k$$

1. *Vérifier que le processus exponentiel de* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *est donné par*

$$Z_k=\mathcal{E}_k(X)=\prod_{l=0}^{k}(1+\epsilon_l)$$

2. *On suppose que les v.a.* ϵ_k *sont telles que* $\epsilon_k>-1$*, et on note* $\mathbb{P}'$ *la probabilité sur* Ω*, définie par*

$$\forall A\subset\Omega \qquad \mathbb{P}'(A)=\mathbb{E}(Z_n\ 1_A) \quad \text{avec} \quad Z_n=\mathcal{E}_n(X)$$

Vérifier que $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une martingale sur* $(\Omega,(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n},\mathbb{P})$*. Montrer que le processus*

$$Y'_k=Y_k-\sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}(\epsilon_l\ \epsilon'_l)$$

est une martingale sur $(\Omega,(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n},\mathbb{P}')$*.*

3.2 Contrôle de martingales

3.2.1 La notion de temps d'arrêt

Dans la théorie des jeux la donnée d'une filtration d'algèbres $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$ sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$ correspond à l évolution de l'information dont dispose un joueur sur les résultats du jeu. En pratique, ces algèbres sont engendrées par des séquences de v.a. numérique représentant par exemple les successions des gains et des pertes à chaque mise dans le déroulement du jeu. La suite des gains aléatoires au cours des différentes mises est "malheureusement" souvent donné par une martingale $(M_k)_{0\leq k\leq n}$

$$\forall 1\leq k\leq n \qquad \mathbb{E}(M_k\mid\mathcal{F}_{k-1})=M_{k-1} \tag{3.2}$$

Cette propriété représente le caractère imprévisible de l'accroissement des gains dans des jeux équitables

$$(3.2)\Longleftrightarrow\forall 1\leq k\leq n \quad \mathbb{E}(\Delta M_k\mid\mathcal{F}_{k-1})=\mathbb{E}([M_k-M_{k-1}]\mid\mathcal{F}_{k-1})=0$$

Il est d'autant plus désespérant de noter que toute transformée

$$(X\,.\,M)_k=\sum_{l=0}^{k}\ X_l\ \Delta M_l$$

de $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ par un processus quelconque *prévisible* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, est à nouveau une martingale

$$\forall 1 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(X_k\ \Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = X_k\ \mathbb{E}(\Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0$$

Il est donc impossible de contrôler honnêtement les accroissements des gains au cours du jeu. Existe-t-il néanmoins des stratégies aléatoires pour quitter le jeu, en augmentant ses chances de gain ? Peut-on maximiser son espérance de gain ? Ces règles d'arrêt sont l'un des notions les plus importantes de la théorie de probabilités. Nous examinerons des exemples classiques de stratégies d'arrêt de jeu dans les sections 3.2.3, et 3.2.5.

Un temps d'arrêt sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$ est une application

$$T : \omega \in \Omega \mapsto T(\omega) \in \{0, 1, \ldots, n\} \cup \{\infty\}$$

telle que

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad T^{-1}(\{k\}) = \{T = k\} = \{\omega \in \Omega\ :\ T(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k$$

On notera que pour tout $0 \leq k \leq n$, les évènements $\{T \geq k\}$ sont prévisibles. Plus précisément, nous avons

$$\{T \geq k\} = \Omega - \{T < k\} = \cap_{0\leq l<k}\{T \neq l\} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

La valeur $T = \infty$ correspond au cas où le jeu n'est pas arrêté, nous conviendrons donc dans ce cas que l'on a

$$\{T = \infty\} = \{T > n\} \in \mathcal{F}_n$$

On définit l'arrêt d'un processus aléatoire $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ au temps T en décomposant ce processus sur les évènements $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k$

$$\begin{aligned}\forall 0 \leq k \leq n \qquad X_k^T =_{\text{déf.}} X_{T\wedge k} = \sum_{l=0}^{n} X_l\ 1_{\{(T\wedge k)=l\}} &= \left[\textstyle\sum_{l=0}^{k-1}\ X_l\ 1_{\{T=l\}}\right]\ 1_{\{T<k\}} + X_k\ 1_{T\geq k} \\ &= X_T\ 1_{\{T<k\}} + X_k\ 1_{T\geq k}\end{aligned}$$

Les propriétés de martingales, sous-martingales, et sur-martingales, sont stables par l'opération d'arrêt.

Montrons par exemple qu'une martingale arrêtée $(M_k^T)_{0\leq k\leq n}$ au temps T, est à nouveau une martingale. Pour vérifier ce résultat, on rappelle que les évènements $\{T \geq k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$ sont prévisibles. Par conséquent, en utilisant la décomposition précédente, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_k^T \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(\left[\sum_{l=0}^{k-1} M_l\ 1_{\{T=l\}}\right]\ 1_{\{T<k\}} + M_k\ 1_{T\geq k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \left[\sum_{l=0}^{k-1} M_l\ 1_{\{T=l\}}\right]\ 1_{\{T<k\}} + \mathbb{E}(M_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\ 1_{T\geq k} \\
&= M_T\ 1_{\{T<k\}} + M_{k-1}\ 1_{T\geq k} \\
&= M_T\ 1_{\{T\leq (k-1)\}} + M_{k-1}\ 1_{T>(k-1)} = M_{T\wedge(k-1)} \times [1_{\{T\leq(k-1)\}} + 1_{T>(k-1)}]
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\mathbb{E}(M_k^T \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{T\wedge(k-1)} = M_{k-1}^T$$

En itérant ce procédé on montre que

$$\forall 0 < k \leq l \leq n \qquad \mathbb{E}(M_l^T \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{T\wedge(k-1)}$$

En choisissant $l = n$, on obtient la formule suivante

$$\boxed{\forall 0 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_k) = M_{T\wedge k}}$$

3.2.2 Jeux stochastiques

On considère la marche aléatoire

$$Y_k = \sum_{l=1}^{k} \epsilon_l = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

associée à une suite de v.a. de Bernoulli, indépendantes, et équidistribuées, avec

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = +1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = -1) = p \in [0,1]$$

On interprète dans ce qui suit les valeurs prises par les v.a. ϵ_k, comme le succès ($\epsilon_k = +1$), ou l'échec ($\epsilon_k = -1$), d'un joueur à la $k^{\text{ième}}$ étape d'un jeu.

On notera que la mise aléatoire X_k du joueur à la $k^{\text{ième}}$ étape ne peut dépendre que des informations fournies par le déroulement du jeu, jusqu'à l'instant k, exclu ! Autrement dit, la mise X_k est prévisible par rapport à la filtration d'information associée aux successions de gains et pertes jusqu'à l'instant k. Plus formellement, nous avons

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad X_k \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1} =_{\text{déf.}} \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-1})$$

La variable déterministe $X_1 = 1$ représente la mise initiale, fixée à l'avance, pour que le joueur gagne, ou perde, une quantité d'argent donnée.

On notera que

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad \mathbb{E}(\epsilon_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_k) = (+1)\ p + (-1)\ (1-p) = 2p - 1$$

Les accroissements aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq n}$ du portefeuille du joueur, utilisant au cours du jeu une stratégie de mises $(X_k)_{2\leq k\leq n}$, sont données par la transformée de $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ par $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, c'est à dire

$$Z_k = (X.Y)_k = \sum_{l=1}^{k} X_l\ \Delta Y_l = \sum_{l=1}^{k} X_l\ \epsilon_l$$

Dans cette situation, la décomposition de Doob

$$Z_k = A_k^Z + M_k^Z$$

est donnée par le processus prévisible

$$\begin{aligned} A_k^Z &= \sum_{p=1}^{k} \mathbb{E}(\Delta Z_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) \\ &= \sum_{p=1}^{k} \mathbb{E}(X_l\ \epsilon_l \mid \mathcal{F}_{l-1}) = \sum_{p=1}^{k}\ X_l\ \mathbb{E}(\epsilon_l) = \sum_{p=1}^{k}\ X_l\ (2p-1) \end{aligned}$$

et la martingale

$$\begin{aligned} M_k^Z &= \sum_{l=1}^{k} [\Delta Z_l - \mathbb{E}(\Delta Z_l \mid \mathcal{F}_{l-1})] \\ &= \sum_{l=1}^{k} [X_l\ \epsilon_l - \mathbb{E}(X_l\ \epsilon_l \mid \mathcal{F}_{l-1})] = \sum_{l=1}^{k}\ X_l\ \ (\epsilon_l - (2p-1)) \end{aligned}$$

Trois cas se présentent :

1. Lorsque $p > 1/2$, le jeu est favorable au joueur, et la partie prévisible des gains A_k^Z est un processus croissant. Dans ce cas, la stratégie du joueur consistera à miser le maximum d'argent à chaque tour du jeu.
2. Lorsque $p < 1/2$, le jeu est défavorable au joueur, et la partie prévisible des gains A_k^Z est un processus décroissant. Dans ce cas, la stratégie consistera à éviter de jouer, ou bien quitter le jeu le plus rapidement possible.
3. Lorsque $p = 1/2$, le jeu est imprévisible, et équitable, en ce sens où l'on a $A_k^Z = 0$, pour tout $0 \leq k \leq n$. Dans ce cas, les gains et pertes successifs du joueur forment une martingale.

3.2.3 Stratégies de jeux équitables

Examinons plus en détail le jeu stochastique décrit dans la section précédente. On supposera que le jeu est imprévisible, c'est à dire $p = 1/2$. Dans ces conditions, le processus aléatoire des gains et pertes du joueur est donné par la martingale

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad Z_k = \sum_{l=1}^{k}\ X_l\ \Delta Y_l \quad \text{avec} \quad \Delta Y_l = \epsilon_l$$

Le processus prévisible $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ représente la stratégie utilisée par le joueur, les v.a. de Bernoulli $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$, à valeurs dans $\{-1,+1\}$, représente les gains et pertes aléatoires, à chaque étape du jeu. Le paramètre n représente la durée du jeu. A titre illustratif, sur l'évènement

$$\{\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1, \epsilon_k = +1\}$$

le joueur perd ses $(k-1)^{\text{ière}}$ mises, et gagne à la $k^{\text{ième}}$. Sur cet évènement, les accroissements du portefeuille du joueur sont donnés par

$$Z_k = -(X_1 + \ldots + X_{k-1}) + X_k$$

A la première étape, le joueur peut gagner ou perdre une quantité d'argent proportionnelle à sa mise X_1, et fixée à l'avance

$$Z_1 = X_1\ \epsilon_1 = (+X_1)\ 1_{\epsilon_1=1} + (-X_1)\ 1_{\epsilon_1=-1}$$

Ainsi, sur l'évènement $\{\epsilon_1 = -1\}$, le joueur perd sa mise

$$Z_1\ 1_{\epsilon_1=-1} = -X_1\ 1_{\epsilon_1=-1}$$

Sur l'évènement contraire $\{\epsilon_1 = +1\}$, le joueur gagne l'équivalent de sa mise ; autrement dit, il accroît son portefeuille de la valeur

$$Z_1\ 1_{\epsilon_1=+1} = +X_1\ 1_{\epsilon_1=+1}$$

1. Supposons tout d'abord que le joueur, quelque peu expérimenté, cherche à gagner le montant des gains relatifs à sa mise initiale $X_1 = 1$.

   Une stratégie consiste à doubler la mise, jusqu'au premier instant où l'on gagne, et l'on quitte le jeu :

   $$X_k = \begin{cases} 2^{k-1}X_1 & \text{si} \quad \epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Une réalisation possible de cette stratégie est décrite ci-dessous

   $$\begin{array}{lcll} X_1 & = & 1 & \text{fixée} \\ X_2 & = & 2\times 1 & \text{si} \quad \epsilon_1 = -1 \\ X_3 & = & 2\times 2\times 1 & \text{si} \quad \epsilon_1 = -1,\ \epsilon_2 = -1 \\ X_4 & = & 2\times 2\times 2\times 1 & \text{si} \quad \epsilon_1 = -1,\ \epsilon_2 = -1,\ \epsilon_3 = -1 \\ \ldots & & & \end{array}$$

   On note T le premier instant où le joueur gagne

   $$T = \inf\{1 \leq k \leq n\ :\ \epsilon_k = 1\}$$

avec la convention $T = \infty$ sur l'évènement $\{\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_n = -1\}$. Pour chaque instant $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a l'équivalence entre évènements

$$\{T = k\} = \{\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1,\ \epsilon_k = 1\}$$

de sorte que sur les évènements $\{T = k\}$, le joueur augmente son capital de la quantité

$$\begin{aligned} Z_T\ 1_{T=k} &= 1_{T=k}\ \left[\sum_{l=1}^{k-1} X_l\ \epsilon_l + X_k\ \epsilon_k\right] = 1_{T=k}\ \left[-\sum_{l=1}^{k-1} 2^{l-1} + 2^{k-1}\right] \\ &= 1_{T=k}\ \left[-(2^{k-1} - 1) + 2^{k-1}\right] = 1_{T=k} \times 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_T\ 1_{T<\infty}) &= \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}(Z_T\ 1_{T=l}) = \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}(1_{T=l}) \\ &= \mathbb{P}(T < \infty) = 1 - \mathbb{P}(T = \infty) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_n = -1) = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

On notera que sur l'évènement $\{T = \infty\}$, les dettes du joueur s'élèvent à

$$Z_T\ 1_{T=\infty} = -1_{T=\infty} \sum_{l=1}^{n} 2^{l-1} = -1_{T=\infty}\ (2^n - 1)$$

2. Supposons qu'un joueur bien plus gourmand, cherche à augmenter son capital proportionnellement à toutes les pertes qu'il a pu subir ! Une stratégie envisageable, mais quelque peu coûteuse, consiste à miser à chaque instant le double des pertes totales, jusqu'au premier instant où l'on gagne, et l'on quitte le jeu. A l'instant du gain, le joueur aura à la fois remboursé ses dettes, et son portefeuille aura augmenté proportionnellement à cette même somme.

Cette stratégie peut s'écrire sous la forme

$$X_k = \begin{cases} 2\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-1}) & \text{si} \quad \epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle stratégie est équivalente à miser, jusqu'à l'instant tant attendu du gain, les sommes suivantes

$$\begin{aligned}
X_k &= 2\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-1}) \\
&= 2\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-2} + 2(X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-2})) \\
&= 2 \times 3\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-2}) \\
&= 2 \times 3\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-3} + 2(X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-3})) \\
&= 2 \times 3^2\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-3}) \\
&\ldots \\
&= 2 \times 3^{k-2} \qquad \text{(pour tout } k \geq 2)
\end{aligned}$$

Cette stratégie consiste donc à triplé la mise, jusqu'au premier instant où l'on gagne, et l'on quitte le jeu :

$$X_k = \begin{cases} 3\ X_{k-1} & \text{si} \quad \epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme précédemment, on note T le premier instant où le joueur gagne, avec la convention

$$\{T = \infty\} = \{\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_n = -1\}$$

Pour chaque instant $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a l'équivalence entre évènements

$$\{T = k\} = \{\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1,\ \epsilon_k = 1\}$$

Sur chacun des évènements $\{T = k\}$, avec $k \geq 2$, le joueur augmente son capital de la somme

$$\begin{aligned}
Z_T\ 1_{T=k} &= 1_{T=k}\ \left[\sum_{l=1}^{k-1} X_l\ \epsilon_l + X_k\ \epsilon_k\right] = 1_{T=k}\ \left[-\sum_{l=1}^{k-1} X_l + X_k\right] \\
&= 1_{T=k}\ \left[\sum_{l=1}^{k-1} X_l\right] = 1_{T=k}\ 3^{k-2}
\end{aligned}$$

Si le joueur gagne dès le premier, ou le second instant de jeu, il accroît son portefeuille d'une unité

$$\begin{aligned}
Z_T\ 1_{T=1} &= X_1\ 1_{T=1} = 1 \times 1_{T=1} \\
Z_T\ 1_{T=2} &= (-X_1 + X_2)\ 1_{T=2} = 1 \times 1_{T=2}
\end{aligned}$$

Si la chance ne lui sourit qu'au troisième instant, il accroît son portefeuille de trois unités

$$Z_T\ 1_{T=3} = (-[X_1 + X_2] + X_3)\ 1_{T=3} = (1 + 2) \times 1_{T=2}$$

Les probabilités $\mathbb{P}(T < \infty)$, ou $\mathbb{P}(T = \infty)$, pour que le joueur gagne, ou bien perde, au cours de la partie sont données respectivement par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T<\infty) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = -1,\ \epsilon_k = 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \\
\mathbb{P}(T=\infty) &= \mathbb{P}(\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{n-1} = -1,\ \epsilon_n = -1) = \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_T\ 1_{T<\infty}) &= \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}(Z_T\ 1_{T=l}) \\
&= \mathbb{P}(T=1) + \sum_{l=2}^{n} 3^{l-2}\ \mathbb{P}(T=l) = \frac{1}{2} + \sum_{l=2}^{n} 3^{l-2}\ \frac{1}{2^l} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \sum_{l=2}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{l-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

L'accroissement moyen du portefeuille du joueur chanceux est alors donné par la formule

$$\mathbb{E}(Z_T \mid T<\infty) = \frac{\mathbb{E}(Z_T\ 1_{T<\infty})}{\mathbb{E}(1_{T<\infty})} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} / \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Néanmoins, sur l'évènement $\{T = \infty\}$, le joueur s'est endetté de

$$Z_T\ 1_{T=\infty} = -1_{T=\infty} \sum_{l=1}^{n} X_l = -1_{T=\infty}\ 3^{n-1}$$

D'autre part, nous avons

$$\mathbb{E}(Z_T\ 1_{T=\infty}) = -3^{n-1}\mathbb{P}(T=\infty) = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Ainsi, l'endettement moyen du joueur malchanceux est alors donné par la formule

$$\mathbb{E}(Z_T \mid T=\infty) = \frac{\mathbb{E}(Z_T\ 1_{T=\infty})}{\mathbb{E}(1_{T=\infty})} = -3^{n-1}$$

On remarquera que l'espérance de gain au cours du jeu reste nulle

$$\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_T\ 1_{T<\infty}) + \mathbb{E}(Z_T\ 1_{T=\infty}) = 0$$

3.2.4 Jeux à conditions terminales fixées

On se donne une martingale réelle $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, muni de la filtration naturelle

$$\mathcal{F}_k = \sigma(Y_0, \ldots, Y_k)$$

associée au processus $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$. On conviendra que l'état Y_k est à valeurs dans un espace réduit à deux points $\{a_k, b_k\}$, sachant $(Y_0, \ldots, Y_k)$. Autrement dit, il existe des couples de v.a. $(a_k, b_k) \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$, avec $a_k(\omega) \neq b_k(\omega)$, et tels que

$$\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 1 - \mathbb{P}(Y_k = b_k)$$

Les deux exemples suivants illustrent ces modèles biphasés, plus ou moins abstraits.

Exemple 3.2.1 *Soit $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, et centrées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On considère la filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$$

associée à cette séquence aléatoire. Sur l'espace filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, on définit la martingale

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = \epsilon_0 + \ldots + \epsilon_k = Y_{k-1} + \epsilon_k$$

On remarque tout d'abord que

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k) = \sigma(Y_0, \ldots, Y_k)$$

D'autre part, si les v.a. ϵ_k ne prennent que deux valeurs

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \epsilon_k(\omega) \in E_k = \{u_k, v_k\}$$

alors on a

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Y_k(\omega) = Y_{k-1}(\omega) + \epsilon_k(\omega) \in Y_{k-1}(\omega) + \{u_k, v_k\}$$

Autrement dit, nous avons

$$\mathbb{P}(Y_k \in \{a_k, b_k\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad \text{avec} \quad (a_k, b_k) = (Y_{k-1} + u_k, Y_{k-1} + v_k) \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$

Exemple 3.2.2 *Soit $(\epsilon_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, et centrées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On considère la filtration naturelle*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k)$$

associée à cette séquence aléatoire. Sur l'espace filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, on définit la martingale exponentielle

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Y_k = (1 + \epsilon_0) \ldots (1 + \epsilon_k) = Y_{k-1}(1 + \epsilon_k)$$

Si les v.a. ϵ_k ne prennent que deux valeurs

$$\forall \omega \in \Omega \quad \epsilon_k(\omega) \in E_k = \{u_k, v_k\} \quad \textit{avec} \quad 0 < 1 + u_k < 1 + v_k$$

alors on a $\mathcal{F}_k = \sigma(Y_0, \ldots, Y_k)$, et

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Y_k(\omega) = Y_{k-1}(\omega)\ (1 + \epsilon_k(\omega)) \in Y_{k-1}(\omega) \times \{1 + u_k, 1 + v_k\}$$

Autrement dit, nous avons

$$\mathbb{P}(Y_k \in \{a_k, b_k\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad \text{avec} \quad (a_k, b_k) = (Y_{k-1} \times (1 + u_k), Y_{k-1} \times (1 + v_k))$$

On se donne une fonction $g_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. L'objectif de cette section est de trouver une condition initiale $M_0 \in \mathcal{F}_0$, et construire une stratégie de contrôle prévisible $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que la martingale définie ci dessous

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k = M_0 + \sum_{l=1}^{k} X_k \ \Delta Y_k$$

termine au temps final n, en la valeur aléatoire

$$M_n = g_n(Y_0, \ldots, Y_n)$$

Pour résoudre ce problème de contrôle, on considère la suite de fonctions

$$V_k : (y_0, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mapsto V_k(y_0, \ldots, y_k) \in \mathbb{R} \ , \quad 0 \leq k \leq n$$

décrites dans la proposition 3.1.4, et définies par les formules de récurrence inverse

$$\begin{array}{rcl} V_n(y_0, \ldots, y_n) & = & g_n(y_0, \ldots, y_n) \\ V_k(y_0, \ldots, y_k) & = & \mathbb{E}\left(V_{k+1}(y_0, \ldots, y_k, Y_{k+1}) \mid (Y_0, \ldots, Y_k) = (y_0, \ldots, y_k)\right) \end{array}$$

pour tout $0 \leq k < n$. D'après la proposition 3.1.4, le processus aléatoire

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad V_k(Y_0, \ldots, Y_k)$$

est l'unique martingale, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$, dont la valeur terminale coïncide avec la v.a. recherchée

$$V_n(Y_0, \ldots, Y_n) = g_n(Y_0, \ldots, Y_n)$$

La solution de notre problème, si elle existe, nous sera donc donnée par les formules

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad V_k(Y_0, \ldots, Y_k) = M_k = M_0 + \sum_{l=1}^{k} X_k \ \Delta Y_k$$

On commence par noter que la condition initiale M_0 est nécessairement donnée par

$$M_0 = V_0(Y_0)$$

et les accroissement de la martingale $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ sont tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad \Delta M_k = X_k \ \Delta Y_k = V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, Y_k) - V_{k-1}(Y_0, \ldots, Y_{k-1})$$

Autrement dit, en raisonnant conditionnellement aux valeurs $(Y_0, \ldots, Y_{k-1})$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} X_k \ (a_k - Y_{k-1}) & = & V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, a_k) - V_{k-1}(Y_0, \ldots, Y_{k-1}) \\ X_k \ (b_k - Y_{k-1}) & = & V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, b_k) - V_{k-1}(Y_0, \ldots, Y_{k-1}) \end{array}$$

Une simple soustraction de ces deux équations nous conduit à la valeur prévisible du processus de contrôle prévisible

$$X_k = \frac{V_k(Y_0,\ldots,Y_{k-1},b_k) - V_k(Y_0,\ldots,Y_{k-1},a_k)}{(b_k - a_k)} \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$$

Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Théorème 3.2.1 *Pour toute fonction* $g_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$*, il existe une unique v.a. initiale* $M_0 \in \mathcal{F}_0$*, et un unique processus de contrôle prévisible* $X_k \underline{\in} \mathcal{F}_{k-1}$*,* $1 \leq k \leq n$*, tel que la martingale*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad M_k = M_0 + \sum_{l=1}^{k} X_k\ \Delta Y_k$$

se termine en $M_n = g_n(Y_0,\ldots,Y_n)$*. De plus, le couple* $(M_0,(X_k)_{1\leq k\leq n})$*est donnée par les formules*

$$\left\{\begin{array}{rcl} M_0 & = & V_0(Y_0) \\ X_k & = & \dfrac{V_k(Y_0,\ldots,Y_{k-1},b_k) - V_k(Y_0,\ldots,Y_{k-1},a_k)}{(b_k - a_k)} \end{array}\right.$$

où $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ *désigne la famille de fonctions définies par les formules de récurrence inverse*

$$V_k(y_0,\ldots,y_k) = \mathbb{E}\left(V_{k+1}(y_0,\ldots,y_k,Y_{k+1}) \mid (Y_0,\ldots,Y_k) = (y_0,\ldots,y_k)\right)$$

avec la condition terminale $V_n = g_n$*.*

Preuve:
D'après la discussion précédente, il reste bien entendu à vérifier que la stratégie obtenue répond bien à notre problème. On commence par remarquer que l'on a

$$X_k\ \Delta Y_k \quad = \quad X_k\ (b_k - Y_{k-1})\ 1_{Y_k=b_k} + X_k\ (a_k - Y_{k-1})\ 1_{Y_k=a_k}$$

D'autre part, en utilisant le fait que Y_k est une martingale, on obtient la propriété suivante

$$Y_{k-1} = \mathbb{E}(Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = a_k\ \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + b_k\ \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

de sorte que

$$\begin{array}{rcl} (b_k - Y_{k-1}) & = & b_k - (a_k\ \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + b_k\ \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\ & = & b_k\ (\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\ & & \quad - (a_k\ \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + b_k\ \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\ & = & (b_k - a_k)\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned}
(a_k - Y_{k-1}) &= a_k - (a_k \ \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + b_k \ \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\
&= a_k \ (\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\
&\qquad - (a_k \ \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + b_k \ \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\
&= (a_k - b_k)\mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$\begin{aligned}
&(b_k - Y_{k-1}) \ 1_{Y_k = b_k} + \ (a_k - Y_{k-1}) \ 1_{Y_k = a_k} \\
&= (b_k - a_k) \ (\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) 1_{Y_k = b_k} - \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \ 1_{Y_k = a_k})
\end{aligned}$$

Par définition de X_k, ceci entraîne que

$$\begin{aligned}
X_k \ \Delta Y_k &= (V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, b_k) - V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, a_k)) \\
&\quad \times (\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) 1_{Y_k = b_k} - \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \ 1_{Y_k = a_k})
\end{aligned}$$

Notons enfin que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) 1_{Y_k = b_k} - \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \ 1_{Y_k = a_k} \\
&= \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \ (1 - 1_{Y_k = a_k}) - \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \ 1_{Y_k = a_k} \\
&= \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - 1_{Y_k = a_k} \\
&= (1_{Y_k = b_k} - \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1}))
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
X_k \ \Delta Y_k &= V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, b_k) \times (1_{Y_k = b_k} - \mathbb{P}(Y_k = b_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\
&\quad + V_k(Y_0, \ldots, Y_{k-1}, a_k) \times (1_{Y_k = a_k} - \mathbb{P}(Y_k = a_k \mid \mathcal{F}_{k-1})) \\
&= V_k(Y_0, \ldots, Y_k) - \mathbb{E}(V_k(Y_0, \ldots, Y_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= V_k(Y_0, \ldots, Y_k) - V_{k-1}(Y_0, \ldots, Y_{k-1}) = \Delta V_k(Y_0, \ldots, Y_k)
\end{aligned}$$

Il en découle que $M_k = V_k(Y_0, \ldots, Y_k)$, pour tout $0 \leq k \leq n$. ■

Pour conclure, supposons que la martingale $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ forme un processus de Markov, et la fonction g_n ne dépend que du point terminal

$$g_n(y_0,\ldots,y_n) = h_n(y_n)$$

avec $h_n$une fonction donnée. Dans ces conditions, et d'après les propriétés de Markov, les fonctions $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ définies par les formules de récurrence inverse ne dépendent que du point terminal

$$V_k(y_0,\ldots,y_k) = W_k(y_k) = \mathbb{E}(W_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k)$$

Dans ces conditions, la stratégie de contrôle $(M_0,(X_k)_{1\leq k\leq n})$ s'exprime plus simplement par les formules

$$M_0 = V_0(Y_0) \quad \text{et} \quad X_k = \frac{W_k(b_k) - W_k(a_k)}{(b_k - a_k)}$$

3.2.5 Problème d'arrêt de Snell

Soit $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de nombres réels aléatoire représentant les gains successifs d'un joueur au cours du temps. Nous conviendrons que ces v.a. forment un processus sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n})$. Autrement dit, les v.a. Z_k sont adaptés à une filtration d'algèbre $\mathcal{F}_k$ représentant l'information dont dispose le joueur sur les résultats du jeu à chaque instant k

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Z_k \underline{\in} \mathcal{F}_k$$

Lorsque les algèbres sont réduites à l'algèbre triviale sur Ω, les v.a. Z_k sont nécessairement constantes

$$\mathcal{F}_k = \{\emptyset,\Omega\} \Longrightarrow \exists z_k \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \forall \omega\in\Omega \quad Z_k(\omega) = z_k$$

A chaque étape k du jeu, notre joueur a pour objectif de quitter le jeu en optimisant son espérance de gain. A cet instant k, le joueur dispose d'une information $\mathcal{F}_k$, et souhaite trouver un temps d'arrêt T_k avec $T_k \geq k$, et tel que

$$U_k =_{\text{déf.}}= \mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_k) = \sup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_k)$$

où $\mathcal{T}_k$ désigne l'ensemble des temps d'arrêts T supérieurs ou égaux à k. La suite $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ que nous venons de définir est appelée **l'enveloppe de Snell du processus $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$**.

Cas déterministe

Dans le cas déterministe où les $\mathcal{F}_k$ sont réduites à des algèbres triviales, l'ensemble $\mathcal{T}_k$ est réduit à l'ensemble des entiers de k à n. Dans cette situation, l'enveloppe de Snell de la suite de réel $(z_k)_{0\leq k\leq n}$ est aussi déterministe $U_k(\omega) = u_k$, tout comme le temps d'arrêt optimal $T_k(\omega) = t_k$ introduit ci-dessus. L'indice t_k correspond à un instant sur lequel z_{t_k} est supérieur à toutes les valeurs $z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$. Dans ces conditions, nous avons

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathcal{F}_k = \{\emptyset, \Omega\} \Longrightarrow \forall 0 \leq k \leq n \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{T}_k & = & \{k, k+1, \ldots, n\} \\ & & \\ u_k & = & z_{t_k} = \sup_{l\geq k} z_l \end{array} \right.$$

L'enveloppe de Snell $(u_k)_{0\leq k\leq n} = (z_{t_k})_{0\leq k\leq n}$, associée à une suite de réel $(z_k)_{0\leq k\leq n}$, peut être décrite schématiquement par le diagramme suivant.

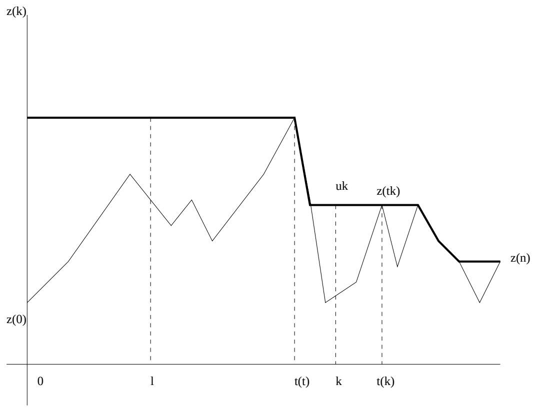

FIG. 3.1 – Enveloppe de Snell

On peut noter que le suprémum des z_k peut être atteint en différents instants. Le premier de ces indices

$$t_k = \inf\{k \leq t \leq n \ : \ z_t = \sup_{l\geq k} z_l\}$$

correspond au premier instant où la suite $(z_t)_{k\leq t\leq n}$ touche l'enveloppe de Snell $(u_t)_{k\leq t\leq n}$ D'autre part, nous avons

$$t_k \quad = \quad \inf\{k \leq t \leq n \ : \ z_t = \sup_{l\geq k} z_l\} = k \ 1_{z_k\geq u_k} + t_{k+1} \ 1_{z_k<u_k}$$

Par conséquent, ces instants $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ peuvent se calculer par les formules de récurrence inverse

$$
\begin{array}{rcllrcl}
t_n & = & n & \Longrightarrow & z_{t_n} & = & \sup_{t=n} z_t \\
t_{n-1} & = & (n-1)\ 1_{z_{n-1}\geq z_{t_n}} + t_n\ 1_{z_{n-1}<z_{t_n}} & \Longrightarrow & z_{t_{n-1}} & = & \sup_{t\in\{n-1,n\}} z_t \\
t_{n-2} & = & (n-2)\ 1_{z_{n-2}\geq z_{t_{n-1}}} + t_{n-1}\ 1_{z_{n-2}<z_{t_{n-1}}} & \Longrightarrow & z_{t_{n-2}} & = & \sup_{t\in\{n-2,n-1,n\}} z_t \\
\ldots & = & \ldots & & & & \\
t_k & = & k\ 1_{z_k\geq z_{t_{k+1}}} + t_{k+1}\ 1_{z_k<z_{t_{k+1}}} & \Longrightarrow & z_{t_k} & = & \sup_{t\in\{k,k+1,\ldots,n\}} z_t \\
\ldots & = & \ldots & & & & \\
t_0 & = & 0\ 1_{z_0\geq z_{t_1}} + t_1\ 1_{z_0<z_{t_1}} & \Longrightarrow & z_{t_0} & = & \sup_{t\in\{0,\ldots,n\}} z_t
\end{array}
$$

La suite $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ correspondant à la situation examinée dans la figure précédente est donnée ci dessous

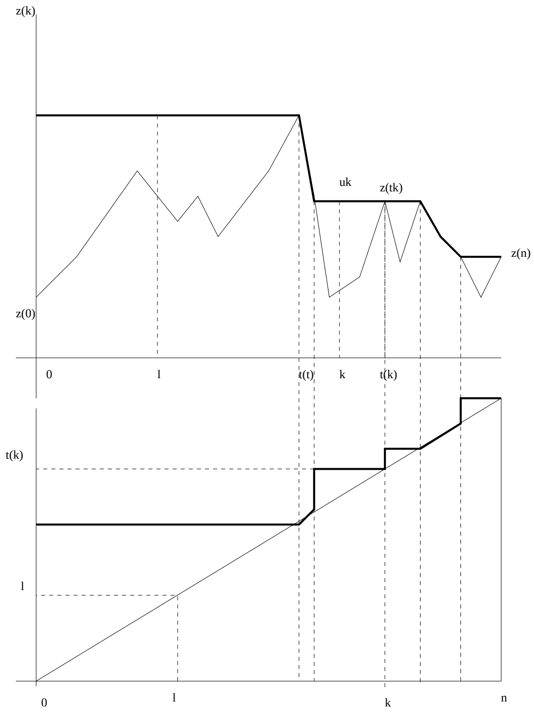

FIG. 3.2 –

Cas aléatoire

Dans le cas aléatoire, la situation peut se résoudre de façon similaire en introduisant la suite de temps d'arrêt $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ définie par les formules de récurrence inverse

$$\begin{array}{rcl} T_n & = & n \\ T_k & = & k\ 1_{Z_k \geq \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)} + T_{k+1}\ 1_{Z_k < \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)} \end{array}$$

Pour vérifier que ces temps d'arrêt répondent au problème de Snell, on raisonne par récurrence inverse sur le paramètre temporel.

– Pour l'horizon terminal $k = n$, l'ensemble $\mathcal{T}_n$ des temps d'arrêt supérieur à n est réduit au temps d'arrêt déterministe $T_n(\omega) = n$. Dans cette situation, il est clair que l'on a

$$T_n(\omega) = n \Rightarrow Z_{T_n}(\omega) = Z_n(\omega) \Rightarrow \mathbb{E}(Z_{T_n} \mid \mathcal{F}_n) = Z_n = \sup_{T\in\mathcal{T}_n} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_n)$$

– $(k+1) \Rightarrow (k)$: Supposons que l'on a au rang $(k+1)$

$$\mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{k+1}) = \sup_{T\in\mathcal{T}_{k+1}} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_{k+1})$$

Par définition de T_K, on obtient

$$Z_{T_k} = Z_k\ 1_{Z_k \geq \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)} + Z_{T_{k+1}}\ 1_{Z_k < \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)}$$

Après avoir noté que

$$Z_k \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k) \underline{\in} \mathcal{F}_k$$

on en déduit que

$$\mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_k) \quad = \quad Z_k\ 1_{Z_k \geq \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)} + \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)\ 1_{Z_k < \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)}$$

On en conclut que

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_k) = Z_k \vee \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)}$$

Le temps d'arrêt T_k étant dans $\mathcal{T}_k$, nous obtient la majoration

$$\mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_k) = Z_k \vee \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k) \leq \sup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_k)$$

Notons enfin que pour tout $T \in \mathcal{T}_k$, nous avons la décomposition suivante

$$Z_T \quad = \quad k\ 1_{T=k} + T\ 1_{T\geq(k+1)} = k\ 1_{T=k} + (T \vee (k+1))\ 1_{T\geq(k+1)}$$

avec

$$\{T = k\},\ \{T \geq (k+1)\} \underline{\in} \mathcal{F}_k \quad \text{et} \quad (T \vee (k+1)) \in \mathcal{T}_{k+1} \subset \mathcal{T}_k$$

En prenant les espérances par rapport à $\mathcal{F}_k$, et en utilisant notre hypothèse de récurrence, nous arrivons aux majorations suivantes

$$\begin{aligned}
\forall T \in \mathcal{T}_k \qquad \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_k) &= Z_k \; 1_{T=k} + \mathbb{E}(Z_{T\vee(k+1)} \mid \mathcal{F}_k) \; 1_{T\geq(k+1)} \\
&= Z_k \; 1_{T=k} + \mathbb{E}(\; \mathbb{E}(Z_{T\vee(k+1)} \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k) \; 1_{T\geq(k+1)} \\
&\leq Z_k \; 1_{T=k} + \mathbb{E}(\; \sup_{S\in\mathcal{T}_{k+1}} \mathbb{E}(Z_S \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k) \; 1_{T\geq(k+1)} \\
&= Z_k \; 1_{T=k} + \mathbb{E}(\; \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k) \; 1_{T\geq(k+1)} \\
&= Z_k \; 1_{T=k} + \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k) \; 1_{T\geq(k+1)} \\
&\leq Z_k \vee \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)
\end{aligned}$$

En prenant le suprémum sur tous les $T \in \mathcal{T}_k$, on en conclut que

$$\mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_k) = Z_k \vee \mathbb{E}(Z_{T_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k) = \sup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_k)$$

Autrement dit, en terme d'enveloppe de Snell, nous avons démontré les majorations, et les formules de récurrence inverse suivantes :

$$\boxed{Z_k \;\leq\; Z_k \vee \mathbb{E}(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = U_k \quad \left(=_{\text{déf.}} \sup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_k)\right)}$$

Comme dans le cas déterministe, l'enveloppe de Snell majore la suite Z_k, et les temps d'arrêt T_k correspondent aux premiers instants de rencontre entre ces deux processus

$$T_k = \inf\{k \leq t \leq n \;:\; Z_t = U_t\}$$

Pour vérifier cette assertion, on note simplement que l'on a

$$T_k = k \; \underbrace{1_{Z_k\geq\mathbb{E}(U_{k+1}|\mathcal{F}_k)}}_{\substack{\Updownarrow \\ U_k = Z_k}} + T_{k+1} \qquad \underbrace{1_{Z_k<\mathbb{E}(U_{k+1}|\mathcal{F}_k)}}_{\substack{\Updownarrow \\ U_k > Z_k \\ \Updownarrow \\ U_k = \mathbb{E}(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)}}$$

3.2.6 Exercices

Exercice 3.2.1 *Vérifier que les fonctions constantes $T(\omega) = k$, sont des temps d'arrêts par rapport à une filtration quelconque d'algèbre.*

Exercice 3.2.2 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans un espace E, et défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n})$. On convient que le processus est initialisé avec une v.a. X_0 à valeurs dans une région $A \subset E$ donnée. Montrer que le temps de sortie S_A de A*

$$S_A = \inf\{0 \leq k \leq n \ : \ X_k \not\in A\}$$

est un temps d'arrêt. On note enfin T_B l'instant d'impact du processus dans une région $B \subset E$

$$T_B = \inf\{0 \leq k \leq n \ : \ X_k \in B\}$$

Montrer que T_B est un temps d'arrêt. Pour éviter des discussions inutiles, on pourra supposer que $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 3.2.3 *Soit T un temps d'arrêt par rapport à une filtration donnée $(\mathcal{F}_k)_{leqk\leq n}$. On considère une sous-martingale $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{leqk\leq n}, \mathbb{P})$. Montrer que le processus arrété $(M_k^T)_{0\leq k\leq n}$ est une sous-martingale. Vérifier enfin que le processus arrêté $(M_k^T)_{0\leq k\leq n}$ d'une sur-martingale est à nouveau une sur-martingale.*

Exercice 3.2.4 *On note $(Z_k)_{1\leq k\leq n}$ le processus des gains et pertes du joueur*

$$\forall 1 \leq k \leq n \qquad Z_k = \sum_{l=1}^{k} X_l \ \epsilon_l$$

Le processus prévisible $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ représente la stratégie utilisée par le joueur, les v.a. de Bernoulli $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq n}$, à valeurs dans $\{-1, +1\}$, représente les gains et pertes aléatoires, à chaque étape du jeu. Plutôt que de miser le double des pertes subies au cours du jeu, qui peut s'avérer trop coûteux, le joueur peut aussi envisager de ne miser qu'une plus faible proportion $(1+\alpha) > 1$ de ce pertes.

1. *Proposer un modèle probabiliste associé à cette stratégie d'arrêt.*
2. *Montrer que l'on a*
$$Z_T \ 1_{T=k} = \alpha \ (2+\alpha)^{k-2} \ 1_{T=k}$$
3. *Vérifier que*
$$\mathbb{E}(Z_T \ 1_{T<\infty}) = \frac{1}{2} \ \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice 3.2.5 *Soit $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0\leq k\leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0\leq k\leq n}$, et de loi initiale η_0. On associe à toute fonction f_n sur E_n, le processus $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ défini par*

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad Z_k(f_n) = \mathbb{E}(f_n(Y_n) \mid Y_k) = M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)(Y_k)$$

avec la convention $M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n = Id$, lorsque $k = n$.

1. *Montrer que* $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$ *est une martingale par rapport à la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_k^Y)_{0\leq k\leq n}$ *associée au processus* $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$.
2. *On considère la suite de fonctions* $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ *définies par la formule de récurrence inverse*

$$\begin{array}{rcl} V_n(y_n) & = & f_n(y_n) \\ V_k(y_k) & = & \mathbb{E}(V_{k+1}(Y_{k+1}) \mid Y_k = y_k) \end{array}$$

Montrer que l'on a

$$\forall 0 \leq k \leq n \qquad V_k = M_{k+1}M_{k+2}\ldots M_n(f_n)$$

En déduire que le processus $(V_k(Y_k))_{0\leq k\leq n}$ *coïncide avec* $(Z_k(f_n))_{0\leq k\leq n}$.

Exercice 3.2.6 *Soit* $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$ *une suite de nombres réels aléatoire sur un espace probabilisé filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n})$. *Soit* $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ *l'enveloppe de Snell associée à* $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$ *définie par la formule suivante*

$$U_k =_{\text{déf.}}= \sup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbb{E}(Z_T \mid \mathcal{F}_k) \ (\geq Z_k)$$

où $\mathcal{T}_k$ *désigne l'ensemble des temps d'arrêts* T *supérieurs ou égaux à* k. *On note* $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ *les temps d'arrêt correspondent aux premiers instants de rencontre entre ces deux processus*

$$T_k = \inf\{k \leq t \leq n \ : \ Z_t = U_t\}$$

1. *Vérifier que l'on a*

$$\forall k \leq l < T_k \qquad Z_l < U_l$$

2. *Montrer que les processus arrêtés* $(U_l^{T_k})_{l\geq k}$, *avec* $0 \leq k \leq n$, *sont des martingales.*
3. *Vérifier que l'on a*

$$\forall k \leq l \leq n \qquad \mathbb{E}(Z_{T_k} \mid \mathcal{F}_l) = U_l^{T_k}$$

Exercice 3.2.7 *Soit* $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ *une chaîne de Markov à valeurs dans des espaces* $(E_k)_{0\leq k\leq n}$, *et définie sur un espace probabilisé filtré canonique* $(\Omega, (\mathcal{F}_k^X)_{0\leq k\leq n})$. *Soit* $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ *l'enveloppe de Snell associée à la suite de nombres aléatoires* $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$ *définie par*

$$Z_k = g_k(X_k)$$

où $(g_k)_{0\leq k\leq n}$ *désigne une suite de fonctions numériques sur les espaces* $(E_k)_{0\leq k\leq n}$.

1. *On note* $M_k(x_{k-1}, x_k)$ *les probabilités de transitions de la chaîne* X_k

$$\mathbb{P}(X_k = x_k \mid X_{k-1} = x_{k-1}) = M_k(x_{k-1}, x_k)$$

Montrer que l'enveloppe de Snell $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ *peut s'écrire sous la forme suivante*

$$U_k = \mathcal{U}_k(Z_k)$$

avec la suite de fonctions $(\mathcal{U}_k)_{0\leq k\leq n}$ *sur les espaces* $(E_k)_{0\leq k\leq n}$ *définies par les formules de récurrence inverse*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_n(x_n) & = & g_n(x_n) \\ \mathcal{U}_k(x_k) & = & g_k(x_k) \vee M_{k+1}(\mathcal{U}_{k+1})(x_k) \ \ (= g_k(x_k) \vee \mathbb{E}(\mathcal{U}_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k)) \end{array}$$