

Chapitre 2

Processus aléatoires discrets

2.1 Introduction

La notion de processus aléatoire est l'une des notions les plus fructueuses de la théorie de probabilités. Ces modèles apparaissent dès que l'on étudie des phénomènes évoluant aléatoirement au fil du temps : dynamiques de populations en biologie, ou de particules élémentaires en physique, processus de ruine dans des jeux de hasard, évolution de files d'attente dans des réseaux de communication, etc.

Nous avons déjà rencontré de tels phénomènes dans les sections précédentes. En effet, toute expérience aléatoire formée d'une succession d'épreuves élémentaires, peut s'interpréter comme un processus aléatoire. Ainsi, les lancers de pièces de monnaie, ou encore les sélections de boules dans une urne, peuvent s'interpréter séquentiellement, comme une succession d'expériences élémentaires se déroulant dans le temps. Le résultat de telles expériences s'exprime comme un événement élémentaire dans un espace produit

$$\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n = \underbrace{E \times \dots \times E}_{(n+1)\text{-termes}} = E^{n+1}$$

où ω_0 représente le résultat de l'expérience initiale, et chaque composante ω_p reflète le résultat de la p -ième épreuve. Dans le jeu de pile ou face, ces aléas $\omega_p \in E = \{0, 1\}$ représentent le résultat du p -ième lancer ; $\omega_p = 0$, si le résultat est pile, et $\omega_p = 1$, si le résultat est face.

Nous étudierons dans ce chapitre les différents modes de réalisation d'un processus aléatoire. La première section offre un exposé sur les interprétations de processus en terme d'arbres d'épreuves. Ces modèles graphiques permettent de visualiser la réalisation d'un processus à chaque étape de son évolution. Nous examinerons séparément les cas où les transitions élémentaires du processus dépendent ou non du point de départ.

La seconde section concerne l'étude de l'information portée par un processus aléatoire au cours de son évolution. Dans un premier temps, nous examinerons en détail deux types de réalisations de marches aléatoires sur la droite réelle. Cette exemple nous permettra de visualiser graphiquement l'information décrite par l'évolution du processus. Par la suite, nous examinerons les notions plus générales d'événements cylindriques, et de filtrations d'algèbres sur des espaces d'aléas. Ces modèles ensemblistes nous permettront de décrire de façon

générale et abstraite des évolutions d'environnements aléatoires complexes. Dans le cadre des mathématiques financières, ces environnements aléatoires correspondent à des évolutions de prix d'actions, des stratégies de financements de portefeuilles d'agents, des variations de taux d'intérêts d'emprunts ou de placement, des évolutions de conjonctures économiques ou géopolitiques nationales, ou internationales. Dans ce contexte, ces filtrations croissantes d'algèbres correspondent aux informations perçues par un observateur du marché financier, et des conjonctures internationales.

La troisième partie de ce chapitre concerne les décompositions canoniques de processus aléatoires sur la base d'une filtration croissante d'algèbres événementielles. Les décompositions présentées dans cette section reflètent les tendances locales, prévisibles ou non, d'un processus aléatoire donné, par rapport aux informations reçues au cours du temps.

Les quatrième et cinquième sections sont consacrées à l'étude des martingales. Ces processus représentent en quelque sorte des processus aléatoires imprévisibles par rapport à une séquence d'observations donnée. La première partie offre un exposé synthétique sur les principales propriétés de ces processus. Dans la seconde partie, nous examinerons les applications de la théorie des martingales à la théorie des jeux aléatoires. Nous présenterons notamment des stratégies de jeux équitables et aléatoires permettant de gagner la mise sur des événements très probables. Enfin, nous présenterons une technique de simulation d'une martingale à conditions terminales fixées. Cet algorithme sera utilisé dans le chapitre suivant, concernant les mathématiques financières, pour simuler une option, et décrire le portefeuille de couverture associé.

2.2 Arbres et chaînes de Markov

L'évolution temporelle de ces phénomènes aléatoires peut s'interpréter comme l'exploration aléatoire d'un arbre déterministe représentant toutes les réalisations possibles de l'expérience en question.

La construction naturelle de cet arbre consiste à tracer pas à pas, et depuis un noeud originel, tous les chemins conduisant aux résultats envisageables (deux à deux incompatibles avec les premières épreuves). Chaque événement élémentaire

$$\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n = E^n$$

correspond ainsi à un chemin, ou à une branche, allant du noeud initial à l'un des noeuds terminaux. Il est important de noter que l'instant n joue ici le rôle bien particulier d'horizon terminal du processus. En d'autres termes, le paramètre n correspond à la hauteur de l'arbre des épreuves.

On affecte ensuite à chacun des chemins élémentaires, leurs probabilités de réalisation respectives.

La probabilité de suivre un chemin donné au cours de l'expérience, n'est autre que le produit des probabilités élémentaires le long du chemin. La probabilité d'un événement aléatoire formé de plusieurs chemins est la somme des probabilités des chemins.

2.2.1 Feuillages de Bernoulli

Les processus aléatoires les plus élémentaires sont formés de n successions d'évènements élémentaires indépendants, et à valeurs dans des espaces réduits à deux points. Ces phénomènes aléatoires biphasés peuvent être représentés mathématiquement par des séquences de v.a. indépendantes ϵ_k , de lois de Bernoulli

$$\mu_k(u) = \alpha_k 1_1(u) + (1 - \alpha_k) 1_0(u) \quad \text{avec} \quad \alpha_k \in [0, 1], \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq n$$

Le couple de symboles $\{0, 1\}$ peut représenter tout type de phénomène biophysiques, tel le jeu du pile ou face, l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur électrique, ou l'échec ou le succès d'une expérience. Ces processus s'expriment de façon naturelle sur l'espace produit

$$\Omega_n = \{\omega : \omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in E^{n+1}\} = E^{n+1} \quad \text{avec} \quad E = \{0, 1\} \quad (2.1)$$

muni de la mesure de probabilité produit

$$\mathbb{P}_n(\omega_0, \dots, \omega_n) = \prod_{k=0}^n (\alpha_k 1_1(\omega_k) + (1 - \alpha_k) 1_0(\omega_k))$$

Plus précisément, si l'on considère les v.a. canoniques

$$(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) : \omega \in \Omega_n \mapsto \omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in E^{n+1}$$

on vérifie aisément que pour toute séquence $(u_0, \dots, u_n) \in E^{n+1}$, on a

$$(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{-1}(\{(u_0, \dots, u_n)\}) = \{(u_0, \dots, u_n)\}$$

Par conséquent, et par définition des lois de probabilités de v.a., la séquence $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ est distribuées selon la loi trajectorielle définie par la mesure produit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)}(u_0, \dots, u_n) &= \mathbb{P}_n((\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{-1}(\{(u_0, \dots, u_n)\})) \\ &= \mathbb{P}_n(u_0, \dots, u_n) = \prod_{k=0}^n (\alpha_k 1_1(u_k) + (1 - \alpha_k) 1_0(u_k)) \end{aligned}$$

La figure suivante représente l'arbre des épreuves associé à ce modèle de Bernoulli lorsque $n = 2$.

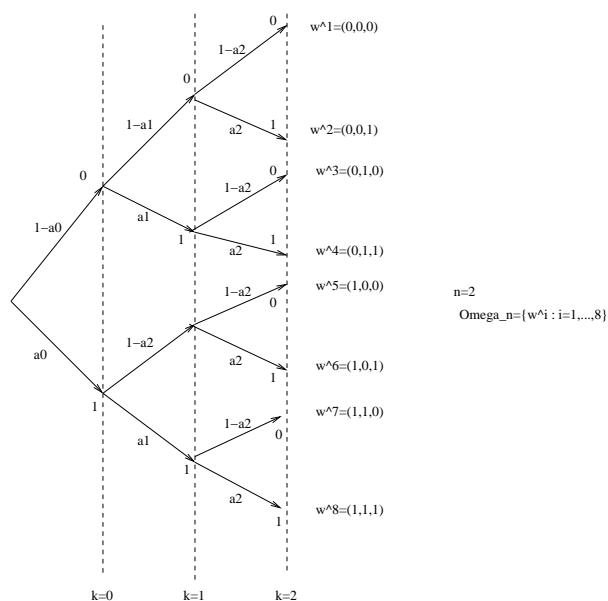


FIG. 2.1 – Arbre de Bernoulli

Exemple 2.2.1 La mesure de probabilité correspondant à une succession de n expériences aléatoires homogènes en temps, et à valeurs dans $\{0, 1\}$, est donnée par la mesure produit

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \mathbb{P}_n((\omega_1, \dots, \omega_n)) = p^{\omega_1} (1-p)^{1-\omega_1} \times \dots \times p^{\omega_n} (1-p)^{1-\omega_n} \quad \text{avec } p \in [0, 1]$$

Dans ce contexte, l'évènement A_k correspondant à k succès (i.e. $\sum_{i=1}^n \omega_i = k$), est formé des chemins $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n$ contenant exactement k fois 1. La probabilité de chacun de ses chemins est donnée par

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \mathbb{P}_n((\omega_1, \dots, \omega_n)) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i} = p^k (1-p)^{n-k}$$

Comme il y a C_n^k chemins possibles contenant exactement k fois le chiffre 1, la probabilité de l'évènement en question est donnée par la loi binomiale

$$\mathbb{P}(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2.2.2 Feuillages chaotiques

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, une suite de v.a. indépendantes

$$(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$$

arbitraires, de lois respectives μ_0, \dots, μ_n sur un espace fini E , peu s'interpréter comme un processus aléatoire évoluant chaotiquement dans E . Ce processus élémentaire prend à chaque

instant k , une valeur aléatoire ϵ_k , indépendante des états passés de l'évolution $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{k-1}$. La séquence de v.a. de Bernoulli examinée précédemment est un cas particulier de tels processus. Les trajectoires aléatoires de ce modèle probabiliste peuvent à nouveau être décrites canoniquement sur l'espace produit

$$\Omega_n = \{\omega : \omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in E^{n+1}\} = E^{n+1}$$

muni de la mesure de probabilité

$$\mathbb{P}_n(\omega_0, \dots, \omega_n) = \mu_0(\omega_0) \dots \mu_n(\omega_n)$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans le cadre des v.a. de Bernoulli, on vérifie sans trop de peine que les variables aléatoires trajectorielles canoniques

$$(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) : \omega \in \Omega_n = E^{n+1} \mapsto \omega \in E^{n+1}$$

sont distribuées selon la mesure produit

$$\mathbb{P}^{(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)}(u_0, \dots, u_n) = \mu_0(u_0) \dots \mu_n(u_n)$$

Ce processus élémentaire, lorsque $E = \{0, 1, 2\}$, peut se représenter schématiquement par l'arbre des épreuves décrit dans la figure suivante. Compte tenu de l'explosion combinatoire, pour simplifier la présentation, certaines branches ont été omises, et seule une partie des transitions sont spécifiées.

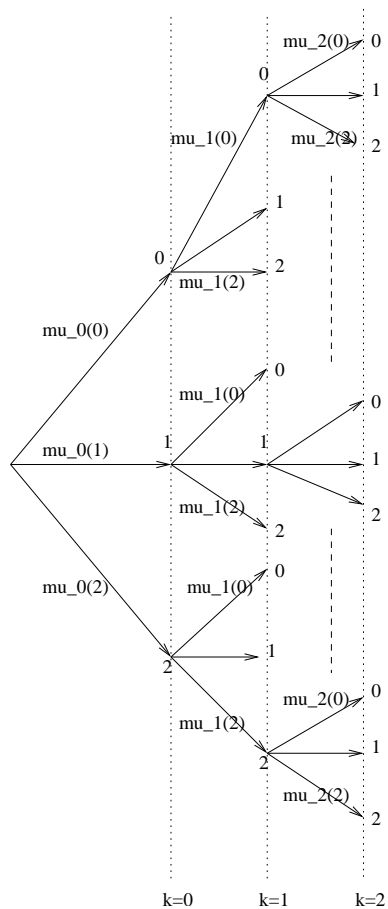


FIG. 2.2 – Arbre chaotique

2.2.3 Feuillages markoviens

Dans les sections précédentes, nous avons étudié les interprétations en terme d'arbres, d'espace d'évènements Ω_n définis par des espaces produits

$$\Omega_n = \{\omega : \omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in E^{n+1}\} = E^{n+1}$$

où E désigne un espace fini. Dans ce contexte, chaque aléa $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ correspond à la donnée d'une branche sur l'arbre des épreuves

$$\omega_0 \longrightarrow \omega_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \omega_{n-1} \longrightarrow \omega_n$$

Les feuillages markoviens correspondent à la situation où les probabilité de passage d'un noeud donné ω_p à un autre ω_{p+1} ne sont pas indépendantes du noeud de départ. Pour décrire cette situation, on se donne une famille de matrice stochastiques

$$M_k = (M_k(x, y))_{x, y \in E}$$

avec $0 \leq k \leq n$.

Une matrice stochastique M_k , est une matrice à entrées positives, dont la somme des termes de chaque ligne vaut 1

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad M_k(x, y) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{y \in E} M_k(x, y) = 1$$

On interprète les entrées de chaque ligne $(M_k(x, y))_{y \in E}$, comme les probabilités de passage du point x vers l'un des états possibles $y \in E$.

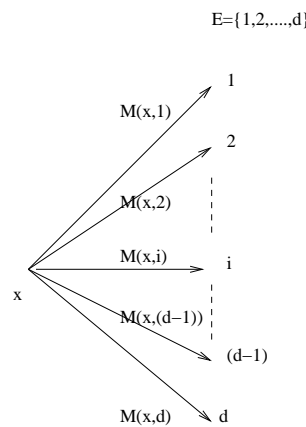


FIG. 2.3 – Probabilités de transitions

On affecte ensuite à chaque chemin élémentaire $(\omega_{k-1} \rightsquigarrow \omega_k)$ de l'arbre des épreuves, la probabilité $M_k(\omega_{k-1}, \omega_k)$.

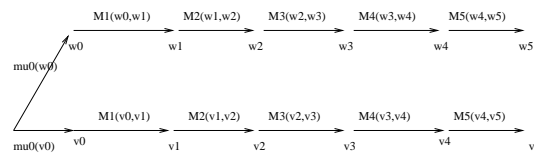


FIG. 2.4 – Probabilités de transitions

Comme précédemment, la probabilité de partir d'un état initial ω_0 , choisi selon une loi μ_0 sur E , puis suivre un chemin donné

$$\omega_0 \longrightarrow \omega_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \omega_{k-1} \longrightarrow \omega_k \longrightarrow \dots \longrightarrow \omega_n$$

au cours de l'expérience, est donnée par le produit des probabilités élémentaires le long de ce chemin

$$\mathbb{P}_n(\omega_0, \dots, \omega_n) = \mu_0(\omega_0)M_1(\omega_0, \omega_1) \dots M_n(\omega_{n-1}, \omega_n)$$

Il est souvent utile d'étendre les modèles précédents à des processus évoluant à chaque instants p dans des espaces E_p dépendants du paramètre temporel.

L'espace des événements associés à ces situations non homogènes sont définis de la façon suivante

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \{\omega : \omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in E_0 \times \dots \times E_n\} \\ &= E_0 \times E_1 \times \dots \times E_n \end{aligned}$$

où $(E_p)_{0 \leq p \leq n}$ désigne une suite d'espaces finis. Les interprétations arborescentes de ces espaces sont définies comme précédemment, en considérant des feuillages non homogènes. La probabilité de suivre un chemin

$$\omega_0 \longrightarrow \omega_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \omega_{k-1} \longrightarrow \omega_k \longrightarrow \dots \longrightarrow \omega_n$$

est toujours donnée par le produit des probabilités élémentaires le long de ce chemin

$$\mathbb{P}_n(\omega_0, \dots, \omega_n) = \mu_0(\omega_0)M_1(\omega_0, \omega_1) \dots M_n(\omega_{n-1}, \omega_n)$$

Dans ce cadre non homogène en temps, M_k désigne une collection de matrices stochastiques représentant les probabilités de transition de l'espace E_{k-1} , vers l'espace E_k .

La figure suivante représente l'arbre des épreuves associé à une évolution aléatoire entre les espaces suivants

$$E_0 = \{1\} \rightsquigarrow E_1 = \{1, 2, 3\} \rightsquigarrow E_2 = \{1, 2\} \rightsquigarrow E_3 = \{1\} \rightsquigarrow E_4 = \{1, 2\}$$

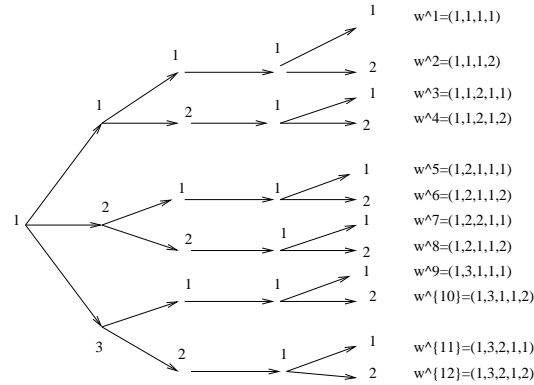


FIG. 2.5 – Évolution non homogène

La loi $\mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}$ de la v.a. trajectorielle (X_0, \dots, X_n) canonique

$$(X_0, \dots, X_n) : \omega \in \Omega_n \mapsto (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in (E_0 \times \dots \times E_n)$$

est donnée pour toute trajectoire $(x_0, \dots, x_n) \in (E_0 \times \dots \times E_n)$ par la formule produit

$$\mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}(x_0, \dots, x_n) = \mu_0(x_0)M_1(x_0, x_1) \dots M_n(x_{n-1}, x_n)$$

De telles séquences de v.a. $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont appelés des **chaînes de Markov**, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale μ_0 .

2.3 Processus aléatoires

Cette section a pour objectif d'introduire un certain nombre de notions abstraites, et fondamentales, sur lesquelles est édifiée la théorie des processus aléatoires. Les notions de filtration d'algèbres, d'adaptation, et de prévisibilité, font partie du langage courant du probabiliste. Elles permettent en quelques mots de préciser les caractéristiques d'un modèle aléatoire, sans rentrer dans la construction détaillée des espaces probabilisés sur lesquels sont définis les processus étudiés. Enfin, ce cadre abstrait révèle de nombreuses propriétés analytiques ou algébriques universelles de phénomènes aléatoires spatio-temporels.

2.3.1 Marches aléatoires

Considérons une suite de v.a. indépendantes $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de même loi de Bernoulli

$$\mu(u) = \alpha 1_1(u_p) + (1 - \alpha) 1_{-1}(u_p) \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 1]$$

On associe à cette suite aléatoire, la séquence des v.a. $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ définies par

$$X_k = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k = X_{k-1} + \epsilon_k \quad k = 1, \dots, n$$

avec $X_0 = 0$. La suite aléatoire ainsi construite forme clairement un processus aléatoire à incréments indépendants

$$\Delta X_k =_{\text{def.}} (X_k - X_{k-1}) = \epsilon_k$$

Ce processus est initialisé en l'origine $X_0 = 0$, et il évolue de l'espace

$$\begin{aligned} E_k &= \left\{ \sum_{l=1}^k u_l : (u_1, \dots, u_k) \in \{-1, 1\}^k \right\} \\ &= \{(1) \times l + (-1) \times (k-l) : l = 0, \dots, k\} = \{2k-l : l = 0, \dots, k\} \end{aligned}$$

vers E_{k+1} selon les transitions de probabilités $M_{k+1}(x, y)$ données pour tout $x \in E_k$ par la formule

$$M_{k+1}(x, y) = \alpha 1_{x+1}(y) + (1 - \alpha) 1_{x-1}(y)$$

Cette chaîne de Markov est appelée une marche aléatoire sur la droite réelle. Son interprétation dépend du domaine d'application. En physique, X_k représente la position d'une particule élémentaire évoluant à chaque étape, soit d'un pas vers l'avant, soit d'un pas vers l'arrière. En biologie, ce processus aléatoire s'interprète plutôt comme un processus de naissance et mort dans une population initialement formée de X_0 individus. En théorie des jeux, X_k représente les pertes et gains successifs au cours d'un jeu de hasard. Enfin, en mathématiques financières, les v.a. de Bernoulli ϵ_k correspondent aux tendances à la hausse, ou à la baisse, du cours d'une action.

Le processus que nous venons de définir admet deux types d'interprétations arborescentes :

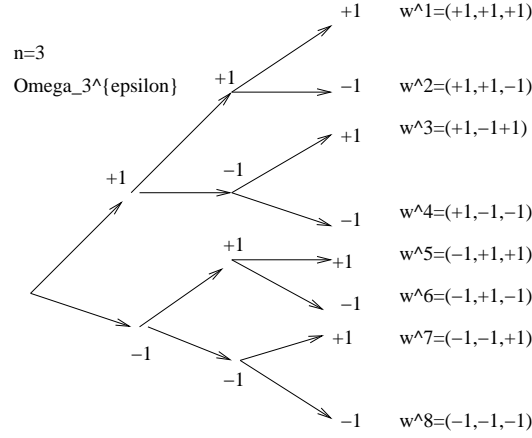
1) La première interprétation est associée aux multiples choix des incréments aléatoires $\Delta X_p = \epsilon_p$, lors de l'évolution du processus depuis son origine, jusqu'au temps terminal n . Ce modèle d'arbre coïncide avec l'interprétation arborescente de l'espace des aléas

$$\Omega_n^\epsilon = \{\omega : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{-1, 1\}^n\}$$

muni de la mesure de probabilité produit

$$\mathbb{P}_n^\epsilon(\omega_1, \dots, \omega_n) = \mu(\omega_1) \dots \mu(\omega_n)$$

La figure suivante donne l'interprétation graphique de l'espace des aléas Ω_n^ϵ , lorsque $n = 2$.

FIG. 2.6 - L'espace $\Omega_2^\epsilon = \{\omega^i : i = 1, \dots, 8\}$

On observe que chaque séquence d'incréments

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n^\epsilon = \{-1, 1\}^n$$

conduit le processus à suivre la trajectoire

$$0 \in E_0 \rightarrow \omega_1 \in E_1 \rightarrow (\omega_1 + \omega_2) \in E_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\omega_1 + \dots + \omega_n) \in E_n$$

On définit ainsi le processus (X_0, \dots, X_n) sur l'espace probabilisé $(\Omega_n^\epsilon, \mathbb{P}_n^\epsilon)$. Plus précisément, on réalise la chaîne de Markov X en terme du processus canonique des incréments

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n^\epsilon \mapsto \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{-1, 1\}^n$$

par la donnée de l'application

$$(X_0, \dots, X_n) : \omega \in \Omega_n^\epsilon \mapsto (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in (E_0 \times \dots \times E_n)$$

avec, pour chaque séquence d'incréments $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n^\epsilon$

$$\begin{aligned} & (X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \\ &= (0, \epsilon_1(\omega), \epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega), \dots, \sum_{p=1}^n \epsilon_p(\omega)) \\ &= (0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \dots, \sum_{p=1}^n \omega_p) \in (E_0 \times E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \end{aligned}$$

Par construction, la loi de la trajectoire (X_0, \dots, X_n) est donnée par

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}(x_0, \dots, x_n) \\ &= \mathbb{P}_n^\epsilon(\{\omega \in \Omega_n^\epsilon : (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (x_0, \dots, x_n)\}) \\ &= \mathbb{P}_n^\epsilon(\{\omega \in \Omega_n^\epsilon : (0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \dots, \sum_{p=1}^n \omega_p) = (x_0, x_1, \dots, x_n)\}) \\ &= \mathbf{1}_0(x_0) \mathbb{P}_n^\epsilon(\{(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1})\}) \end{aligned}$$

Par définition de \mathbb{P}_n^ϵ , on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}(x_0, \dots, x_n) &= 1_0(x_0) \mu(x_1) \mu(x_2 - x_1) \dots \mu(x_n - x_{n-1}) \\ &= 1_0(x_0) M_1(x_0, x_1) \dots M_n(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

2) La seconde interprétation est associée aux chemins canoniques de l'évolution de la chaîne de Markov. Dans cette situation, le modèle d'arbre coïncide avec l'interprétation arborescente de l'espace canonique

$$\Omega_n^X = (E_0 \times E_1 \times \dots \times E_n)$$

muni de la mesure de probabilité markovienne

$$\mathbb{P}_n^X(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) = 1_0(\omega_0) M_1(\omega_0, \omega_1) \dots M_n(\omega_{n-1}, \omega_n)$$

et de la v.a. canonique

$$(X_0, \dots, X_n) : \omega \in \Omega_n^X \mapsto (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in (E_0 \times \dots \times E_n)$$

Par construction, la loi de la trajectoire (X_0, \dots, X_n) est clairement donnée par

$$\mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}(x_0, \dots, x_n) = 1_0(x_0) M_1(x_0, x_1) \dots M_n(x_{n-1}, x_n)$$

La figure suivante représente l'interprétation graphique de l'espace des aléas Ω_n^X , lorsque $n = 4$, en terme d'un arbre binomial.

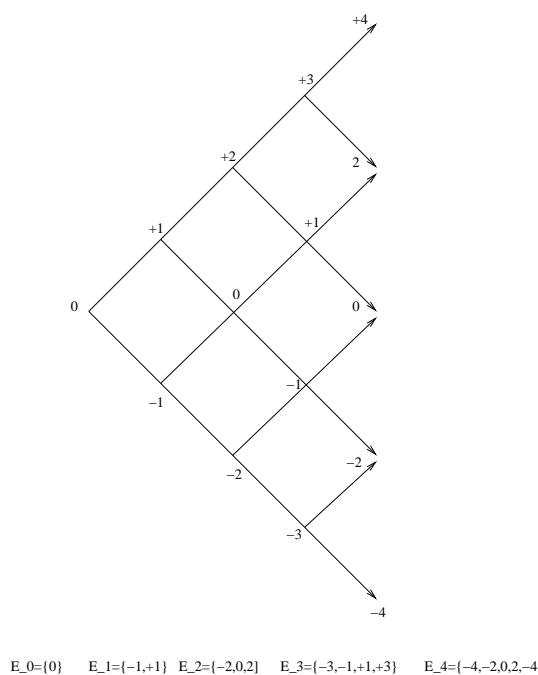


FIG. 2.7 – L'espace Ω_4^X

En résumé, une marche aléatoire est une chaîne de Markov $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie sur un espace de probabilités (Ω, \mathbb{P}) , d'origine $X_0 = 0$ et de probabilités de transitions homogènes

$$\begin{aligned} M(x, y) &=_{\text{def.}} \mathbb{P}(X_k = y \mid X_{k-1} = x) = \mathbb{P}^{X_k \mid X_{k-1}}(y \mid x) \\ &= \alpha 1_{x+1}(y) + (1 - \alpha) 1_{x-1}(y) \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

Pour décrire une réalisation dynamique de cette chaîne, on se donne une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ distribuées sur $\{-1, +1\}$ selon la même loi de Bernoulli

$$\mathbb{P}(\epsilon_k = +1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_k = -1) = \alpha$$

On associe à cette séquence, le système dynamique aléatoire donné par

$$\begin{cases} X_k = X_{k-1} + \epsilon_k \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

2.3.2 Évènements cylindriques

Dans l'exemple de la marche aléatoire, nous avons exhibé **deux types de réalisations** d'un même processus aléatoire (X_0, \dots, X_n) ; l'une associée à la réalisation canonique d'une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ sur un espace probabilisé $(\Omega_n^\epsilon, \mathbb{P}_n^\epsilon)$; la seconde correspondant à la réalisation canonique classique de la chaîne sur un espace probabilisé $(\Omega_n^X, \mathbb{P}_n^X)$.

Il existe donc en général de nombreux choix d'espaces probabilisés (Ω_n, \mathbb{P}_n) sur lesquels un même processus aléatoire (X_0, \dots, X_n) peut être réalisé. En pratique, le choix d'un espace dépend du degré de finesse avec lequel on souhaite décrire le processus.

Afin d'éclaircir la présentation, et de préciser **les interprétations graphiques** des diverses notions que nous allons introduire, nous conviendrons par la suite qu'une chaîne de Markov donnée est toujours définie sur son espace probabilisé canonique

$$\begin{aligned} \Omega_n &= (E_0 \times E_1 \times \dots \times E_n) \\ \mathbb{P}_n(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) &= \mu_0(\omega_0) M_1(\omega_0, \omega_1) \dots M_n(\omega_{n-1}, \omega_n) \end{aligned}$$

avec

$$(X_0, \dots, X_n) : \omega \in \Omega_n \mapsto (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in (E_0 \times \dots \times E_n)$$

On rappelle que la loi $\mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}$ de la v.a. trajectorielle (X_0, \dots, X_n) sur $(E_0 \times \dots \times E_n)$ est donnée pour toute trajectoire $(x_0, \dots, x_n) \in (E_0 \times \dots \times E_n)$ par la formule produit

$$\mathbb{P}_n^{(X_0, \dots, X_n)}(x_0, \dots, x_n) = \mu_0(x_0) M_1(x_0, x_1) \dots M_n(x_{n-1}, x_n)$$

Ce modèle canonique nous permettra à la fois d'introduire naturellement, et d'étudier rigoureusement, diverses notions structurelles associées à l'évolution du processus aléatoire. Nous reviendrons sur la non unicité du choix des espaces probabilisés, lorsque nous aborderons la notion d'adaptation du processus à une filtration d'algèbres d'évènements.

On représente l'information associée au déroulement d'un processus

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{k-1} \rightarrow X_k$$

depuis son origine jusqu'à un instant $k \in \{0, \dots, n\}$, par la donnée de la décomposition $\mathcal{D}_p^{n,X}$ de Ω_n , définie ci-après

$$\mathcal{D}_k^{n,X} =_{\text{aéf.}} \{A_k^n(x_0, \dots, x_k), (x_0, \dots, x_k) \in E^{k+1}\}$$

avec les évènements

$$\begin{aligned} A_k^n(x_0, \dots, x_k) &= (X_0, \dots, X_k)^{-1}(\{(x_0, \dots, x_k)\}) \\ &= \{\omega \in \Omega_n : (X_0(\omega), \dots, X_k(\omega)) = (x_0, \dots, x_k)\} \end{aligned}$$

On notera que chaque évènement cylindrique $A_k^n(x_0, \dots, x_k)$ contient bien toute l'information connue sur la trajectoire, depuis son origine jusqu'au temps p . En effet, par construction, nous avons

$$\forall \omega \in A_k^n(x_0, \dots, x_k) \quad X_0(\omega) = x_0, X_1(\omega) = x_1, \dots, X_k(\omega) = x_k$$

On retiendra que l'évènement composé $A_k^n(x_0, \dots, x_k)$ est formé de tous les aléas élémentaires $\omega \in \Omega_n$ conduisant le processus à suivre la trajectoire (x_0, \dots, x_k) depuis son origine, jusqu'au temps k .

Il est particulièrement intéressant de visualiser graphiquement ces évènements cylindriques sur l'arbre de épreuves. Plus précisément, sur l'espace canonique l'évènement

$$\begin{aligned} A_k^n(x_0, \dots, x_k) &= \{\omega \in \Omega_n : (X_0(\omega), \dots, X_k(\omega)) = (x_0, \dots, x_k)\} \\ &= \{(x_0, \dots, x_k)\} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n \end{aligned}$$

correspond au *sous-arbre ou à la ramification*, formé de la branche issue du noeud originel, passant respectivement par les noeuds intermédiaires x_1, \dots , et x_k , puis complété par le reste de l'arbre issu du dernier noeud x_k .

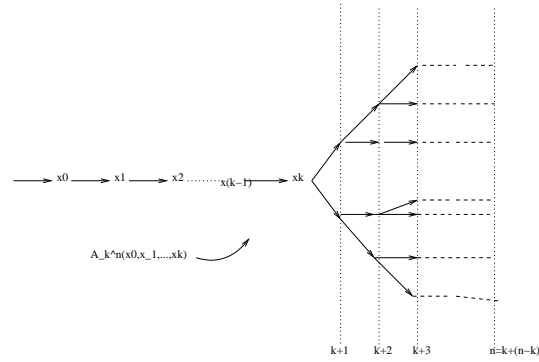


FIG. 2.8 – Évènements cylindriques

La trajectoire du processus, depuis l'origine jusqu'au temps k , s'exprime sur chacun de ces évènements, par la formule synthétique suivante

$$(X_0, \dots, X_k) = \sum_{(x_0, \dots, x_k) \in (E_0 \times \dots \times E_k)} (x_0, \dots, x_k) 1_{A_k^n(x_0, \dots, x_k)}$$

Cette représentation fonctionnelle souligne le fait suivant :

Si l'évènement $A_k^n(x_0, \dots, x_k)$ se réalise, la trajectoire du processus prend la valeur (x_0, \dots, x_k) , et inversement. Plus formellement, nous avons l'équivalence

$$\omega \in A_k^n(x_0, \dots, x_k) \iff (X_0, \dots, X_k)(\omega) = (x_0, \dots, x_k) \quad (2.3)$$

Lorsque k coïncide avec l'horizon terminal $k = n$, et sur l'espace canonique, les évènements cylindriques se réduisent à des singletons trajectoriels

$$\begin{aligned} A_n^n(x_0, \dots, x_n) &= \{\omega \in \Omega_n : (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (x_0, \dots, x_n)\} \\ &= \{(x_0, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la partition $\mathcal{D}_n^{n,X}$ de l'espace canonique est formée de tous les singletons trajectoriels envisageables

$$\mathcal{D}_n^{n,X} = \{\{(x_0, \dots, x_n)\} : (x_0, \dots, x_n) \in (E_0 \times \dots \times E_n)\}$$

Par définition des lois conditionnelles par rapport à des partitions, et avec des notations abusives évidentes, nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_n^{(X_{k+1}, \dots, X_n)}((x_{k+1}, \dots, x_n) \mid \mathcal{D}_k^{n, X}) \\ &= \sum_{(x_0, \dots, x_k)} \mathbb{P}_n^{(X_{k+1}, \dots, X_n) \mid (X_0, \dots, X_k)}((x_{k+1}, \dots, x_n) \mid (x_0, \dots, x_k)) \mathbf{1}_{A_k^n(x_0, \dots, x_k)} \end{aligned}$$

En combinant (2.3) avec les propriétés de Markov, on trouve que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_n^{(X_{p+1}, \dots, X_n) \mid (X_0, \dots, X_p)}((x_{p+1}, \dots, x_n) \mid (x_0, \dots, x_p)) \\ &= M_{p+1}(x_p, x_{p+1}) M_{p+2}(x_{p+1}, x_{p+2}) \dots M_n(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

On obtient finalement la représentation fonctionnelle suivante.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_n^{(X_{p+1}, \dots, X_n)}((x_{p+1}, \dots, x_n) \mid \mathcal{D}_p^{n, X}) \\ &= M_{p+1}(X_p, x_{p+1}) M_{p+2}(x_{p+1}, x_{p+2}) \dots M_n(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Cette formule reflète le fait que les événements passés associés à la trajectoire (X_0, \dots, X_k) n'influencent pas le futur du processus (X_{k+1}, \dots, X_n) , sinon par la valeur de l'état du système X_k à l'instant présent. La plupart des processus que nous avons rencontré vérifient cette propriété de Markov. C'est bien entendu le cas des marches aléatoires sur la droite réelle, les évolutions de population biologiques, ou encore le nombre des succès et échecs dans une répétition d'expériences biphasés.

2.3.3 Filtrations de partitions

Commençons par remarquer que l'on a les décompositions événementielles suivantes

$$\begin{aligned} A_p^n(x_0, \dots, x_p) &= (X_0, \dots, X_p)^{-1}(\{(x_0, \dots, x_p)\}) \\ &= \cup_{y_{p+1} \in E_{p+1}} A_{p+1}^n(x_0, \dots, x_p, y_{p+1}) \\ &= \cup_{y_{p+1}, y_{p+2} \in (E_{p+1} \times E_{p+2})} A_{p+2}^n(x_0, \dots, x_p, y_{p+1}, y_{p+2}) \\ &= \dots \\ &= \cup_{y_{p+1}, \dots, y_n \in (E_{p+1} \times \dots \times E_n)} A_{p+2}^n(x_0, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Sur l'espace canonique, ces décompositions d'évènements s'expriment sous la forme équivalente

$$\begin{aligned}
& A_p^n(x_0, \dots, x_p) \\
&= \cup_{y_{p+1} \in E_{p+1}} \{(x_0, \dots, x_p, y_{p+1})\} \times (E_{p+2} \times \dots \times E_n) \\
&= \cup_{y_{p+1}, y_{p+2} \in (E_{p+1} \times E_{p+2})} \{(x_0, \dots, x_p, y_{p+1}, y_{p+2})\} \times (E_{p+3} \times \dots \times E_n) \\
&= \dots \\
&= \cup_{y_{p+1}, \dots, y_n \in (E_{p+1} \times \dots \times E_n)} \{(x_0, \dots, x_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n)\}
\end{aligned}$$

Autrement dit, chaque évènement $A_p^n(x_0, \dots, x_p)$ représentant une information précise jusqu'au temps p , peut être décomposé sur toute l'information future envisageable. Néanmoins, savoir que l'une d'entre elles pourra se produire, ne permet bien évidemment pas de prédire grand chose! Ces représentations n'apportent donc aucune information sur l'évolution future du processus.

En conclusion, nous avons décomposé les informations selon *une filtration croissante* de partitions

$$\mathcal{D}_0^{n,X} \subset \mathcal{D}_1^{n,X} \subset \dots \subset \mathcal{D}_{p-1}^{n,X} \subset \mathcal{D}_p^{n,X} \subset \dots \subset \mathcal{D}_n^{n,X}$$

En terme d'arbres, ces propriétés de monotonie expriment le fait que tout sous arbre $A_p^n(x_0, \dots, x_p)$ de $\mathcal{D}_p^{n,X}$, peut être décomposé en une famille de sous-arbres de $\mathcal{D}_{p+1}^{n,X}$.

Exemple 2.3.1 *Considérons l'espace canonique des aléas associé à des v.a. de Bernoulli décrit en (2.1). Dans cette situation, nous avons*

$$\mathcal{D}_p^{n,\epsilon} = \left\{ \{(u_0, \dots, u_p)\} \times \{0, 1\}^{(n-p)} : (u_0, \dots, u_p) \in \{0, 1\}^{p+1} \right\}$$

Ainsi, sur l'évènement cylindrique

$$\{(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)\} \times \{0, 1\}^{(n-7)}$$

la trajectoire depuis son origine jusqu'au temps 6, est parfaitement connue

$$(\epsilon_0, \dots, \epsilon_6) = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$$

Néanmoins, lorsque cet évènement se réalise, nous avons aucune information sur les valeurs des états suivants ϵ_p , avec $p > 6$. Par exemple, lorsque $n = 9$, la décomposition de l'évènement cylindrique

$$\{(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)\} \times \{0, 1\}^2 = \cup_{u,v \in \{0,1\}} \{(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, u, v)\}$$

exprime le fait que sur l'évènement

$$\{(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)\} \times \{0, 1\}^2$$

l'une des 4 possibilités suivantes pourra se produire

$$(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, u, v) \quad \text{avec} \quad (u, v) \in \{0, 1\}^2$$

Notons pour conclure que chaque v.a. trajectorielle $((\epsilon_0, \dots, \epsilon_p))$ s'exprime sur la partition d'évènements $\mathcal{D}_p^{n,\epsilon}$ par la formule

$$(\epsilon_0, \dots, \epsilon_p) = \sum_{(u_0, \dots, u_p) \in \{0,1\}^{p+1}} (u_0, \dots, u_p) 1_{\mathcal{D}_p^{n,\epsilon}}$$

2.3.4 Filtrations d'algèbres

La plus petite algèbre $\mathcal{F}_p^{n,X}$ contenant $\mathcal{D}_p^{n,X}$ est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p^{n,X} &= \sigma_n(X_0, \dots, X_p) \\ &= \{(X_0, \dots, X_p)^{-1}(B_p) \text{ avec } B_p \subset (E_0 \times \dots \times E_p)\} \end{aligned}$$

De plus, chaque évènement de $\mathcal{F}_p^{n,X}$ peut s'écrire sous la forme

$$(X_0, \dots, X_p)^{-1}(B_p) = \cup_{(x_0, \dots, x_p) \in B_p} A_p^n(x_0, \dots, x_p)$$

avec

$$A_p^n(x_0, \dots, x_p) = (X_0, \dots, X_p)^{-1}(\{(x_0, \dots, x_p)\})$$

Sur l'espace canonique

$$\Omega_n^X = (E_0 \times \dots \times E_n)$$

on rappelle que chaque évènement cylindrique est donné par la formule explicite suivante

$$\begin{aligned} (X_0, \dots, X_p)^{-1}(B_p) &= B_p \times (E_{p+1} \times \dots \times E_n) \\ &= \cup_{(x_0, \dots, x_p) \in B_p} (\{(x_0, \dots, x_p)\} \times (E_{p+1} \times \dots \times E_n)) \end{aligned}$$

Par conséquent, en terme graphique, chaque évènement

$$(X_0, \dots, X_p)^{-1}(B_p) = (B_p \times (E_{p+1} \times \dots \times E_n)) \in \mathcal{F}_p^{n,X}$$

correspond donc à la forêt formée par les arbres $A_p^n(x_0, \dots, x_p)$, dont les troncs (x_0, \dots, x_p) sont dans B_p .

Les trajectoires depuis l'origine jusqu'au temps p , sont bien mesurables par rapport à ces algèbres

$$\forall 0 \leq p \leq n \quad (X_0, \dots, X_p) \in \mathcal{F}_p^{n,X}$$

néanmoins, on a en général

$$\forall 0 \leq q < p \leq n \quad (X_0, \dots, X_p) \notin \mathcal{F}_q^{n,X}$$

Autrement dit, l'information contenue dans $\mathcal{F}_{p-1}^{n,X}$ est insuffisante pour décrire les trajectoires depuis leurs origines, jusqu'au temps p . Par exemple, nous avons sur l'espace canonique

$$\begin{aligned} X_p^{-1}(\{x_p\}) &= (E_0 \times \dots \times E_{p-1}) \times \{x_p\} \times (E_{p+1} \times \dots \times E_n) \\ &\notin \mathcal{F}_{p-1}^X = \{B_{p-1} \times E_p \times (E_{p+1} \times \dots \times E_n) : B_{p-1} \subset (E_0 \times \dots \times E_{p-1})\} \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons construit sur l'espace canonique $(\Omega_n^X, \mathbb{P}_n^X)$ une filtration croissante d'algèbres représentant l'adaptation du processus lors de son évolution

$$\mathcal{F}_0^{n,X} \subset \mathcal{F}_1^{n,X} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{p-1}^{n,X} \subset \mathcal{F}_p^{n,X} \subset \dots \subset \mathcal{F}_n^{n,X} = \mathcal{P}(E_0 \times \dots \times E_n)$$

De plus, par définition des lois conditionnelles par rapport à une algèbre, nous avons pour tout $0 \leq p \leq n$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_n^{(X_{p+1}, \dots, X_n)}((x_{p+1}, \dots, x_n) \mid \mathcal{F}_p^{n,X}) \\ &= \mathbb{P}_n^{(X_{p+1}, \dots, X_n)}((x_{p+1}, \dots, x_n) \mid \mathcal{D}_p^{n,X}) \\ &= M_{p+1}(X_p, x_{p+1})M_{p+2}(x_{p+1}, x_{p+2}) \dots M_n(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Ces propriétés de Markov peuvent alternativement s'exprimer par la formule suivante

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_n^{(X_{p+1}, \dots, X_n)}((x_{p+1}, \dots, x_n) \mid \sigma_n(X_0, \dots, X_n)) \\ &= \mathbb{P}_n^{(X_{p+1}, \dots, X_n)}((x_{p+1}, \dots, x_n) \mid \sigma_n(X_n)) \\ &= M_{p+1}(X_p, x_{p+1})M_{p+2}(x_{p+1}, x_{p+2}) \dots M_n(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

2.4 Décompositions canoniques

2.4.1 Information et filtrations

Dans les sections précédentes, nous avons étudié la notion de filtrations d'algèbres associées à des processus aléatoires. Ces objets ensemblistes représentent l'information que l'on peut acquérir en observant l'évolution d'un processus depuis son origine jusqu'au temps terminal. D'un point de vue mathématique, cette information est modélisée par des partitions ensemblistes de plus en plus fine de l'espace des évènements élémentaires. Chaque partition reflète tous les évènements aléatoires que l'on peut observer au cours de l'évolution du processus.

En accord avec la discussion menée à la section 1.3.2, page 40 (voir aussi l'exercice 1.2.5), chaque algèbre d'évènements abstraite peut s'interpréter comme une algèbre engendrée par une collection de v.a. numériques. En pratique, ces v.a. représentent l'évolution d'un phénomène aléatoire plus ou moins complexe : évolutions de cours d'actions financières, variations des valeurs de portefeuilles, ou de taux d'intérêts d'emprunts. La propriété de monotonie reflète le degré croissant de finesse, et de pertinence, de l'information que l'on acquiert au cours du temps en observant le processus. En ce sens, une filtration croissante d'algèbres d'évènements peut s'interpréter comme l'information mesurable associée à l'observation de l'évolution d'un

environnement aléatoire au cours du temps. De telles situations sont décrites par le modèle probabiliste suivant.

Définition 2.4.1 *Un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$, est un espace de probabilités (Ω, \mathbb{P}) muni d'une filtration croissante d'algèbres*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{p-1} \subset \mathcal{F}_p \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$$

Pour poursuivre notre analyse, il convient de rappeler que chaque algèbre \mathcal{F}_p est engendrée par une partition $\mathcal{D}_p = (D_{i,p})_{i \in I_p}$ de Ω , formée d'événements deux à deux incompatibles, et ayant pu se réaliser au temps p . Pour fixer les idées, supposons que l'aléa en cours de réalisation $\omega \in \Omega$ appartient à l'un des ensembles $D_{i,p} \subset \mathcal{D}_p$. Dans cette situation, nous avons trivialement

$$\omega \in D_{i,p} \quad \text{et} \quad \forall j \neq i \quad \omega \notin D_{j,p}$$

Autrement dit, à l'instant p , nous savons que seul l'évènement $D_{i,p}$ s'est réalisé! Néanmoins l'ensemble $D_{i,p} \subset \Omega$ est lui même formé d'évènements élémentaires et il nous est impossible de discerner lequel des évènements $\omega' \in D_{i,p}$ c'est réellement produit!

A l'instant suivant $(p+1)$, l'algèbre \mathcal{F}_{p+1} est engendrée par une partition \mathcal{D}_{p+1} plus fine que \mathcal{D}_p . Par conséquent, il existe une collection d'indices $I_{i,p+1} \subset I_p$ telle que

$$\omega \in D_{i,p} = \cup_{j \in I_{i,p+1}} D_{j,p+1}$$

Les ensembles $D_{j,p+1}$ formant une partition de $D_{i,p}$, l'évènement en cours ω appartient nécessairement à l'un d'entre eux

$$\omega \in D_{i,p} = \cup_{j \in I_{i,p+1}} D_{j,p+1} \implies \exists! j \in I_{i,p+1} \quad \omega \in D_{j,p+1}$$

A l'instant $(p+1)$, nous savons que désormais que c'est l'évènement $D_{j,p+1} \subset D_{i,p}$ s'est réalisé. Cette inclusion souligne le fait que nous avons plus d'information sur l'évènement élémentaire qui s'est produit, sans toutefois discerner lequel des évènements élémentaire

$$\omega' \in D_{j,p+1} \subset D_{i,p}$$

c'est réellement produit! Néanmoins, au cours du temps, la finesse des partitions nous renseigne de plus en plus sur cette question.

Exemple 2.4.1 *L'espace canonique $(\Omega_n^X, \mathbb{P}_n^X)$, associé à une chaîne de Markov $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, et muni de la filtration d'algèbres*

$$\mathcal{F}_k^{n,X} = \sigma_n(X_0, \dots, X_k) \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n$$

décrites dans la section 2.3.4, est un espace de probabilités filtré. Cette filtration est appelée la **filtration canonique naturelle** associée au processus X_p .

Exemple 2.4.2 *Considérons à nouveau une suite de v.a. indépendantes $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$, à valeurs dans $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, de même loi de Bernoulli*

$$\mu(u) = \alpha 1_1(u_p) + (1 - \alpha) 1_{-1}(u_p) \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1]$$

On conviendra que ces v.a. sont définies sur l'espace probabilisé canonique $(\Omega_n^\epsilon, \mathbb{P}_n^\epsilon)$, avec

$$\Omega_n^\epsilon = \{-1, 1\}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_n^\epsilon(\omega_1, \dots, \omega_n) = \mu(\omega_1) \dots \mu(\omega_n)$$

La filtration canonique naturelle associée à la suite ϵ_p est donnée par

$$\mathcal{F}_p^{n, \epsilon} = \sigma_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$$

et $(\Omega_n^\epsilon, (\mathcal{F}_p^{n, \epsilon})_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P}_n^\epsilon)$ est clairement un espace probabilisé filtré.

Exemple 2.4.3 *On associe à la suite de v.a. de Bernoulli $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ décrite dans l'exemple précédent, le processus aléatoire initialisé en $X_0 = 0$, et évoluant de E_{p-1} vers l'ensemble $E_p (= \{2p - k, k = 0, \dots, p\})$ selon la formule*

$$\Delta X_p =_{\text{aéf.}} (X_p - X_{p-1}) = \epsilon_p$$

L'espace $(\Omega_n^\epsilon, (\mathcal{F}_p^{n, X})_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P}_n^\epsilon)$ muni des sous algèbres

$$\mathcal{F}_p^{n, X} = \sigma(X_0, \dots, X_p) \quad (\subset \mathcal{P}(\Omega_n^\epsilon))$$

est encore un espace probabilisé filtré. On notera que cette filtration d'algèbre coïncide avec celle présentée dans l'exemple 2.4.2. Plus précisément, nous avons

$$\mathcal{F}_p^{n, X} = \sigma(X_0, \dots, X_p) = \sigma_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) = \mathcal{F}_p^{n, \epsilon}$$

A titre d'exemple, nous avons

$$\begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)^{-1}(\{(1, -1, 1)\}) &= \{\omega \in \Omega_n^\epsilon : (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)(\omega) = (1, -1, 1)\} \\ &= \{\omega \in \Omega_n^\epsilon : (X_1, X_2, X_3)(\omega) = (1, 0, 1)\} \\ &= (X_1, X_2, X_3)^{-1}(\{(1, 0, 1)\}) \end{aligned}$$

2.4.2 Adaptation et prévisibilité

Nous avons vu dans la section précédentes que les filtrations d'algèbres $(\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}$ sur des espaces d'évènements sont bien souvent en pratique associées à des phénomènes aléatoires trop complexes pour être décrits par un unique processus aléatoire simple. Ces modèles probabilistes abstraits représentent l'information perçue par un observateur. En théorie des jeux, l'algèbre \mathcal{F}_p représente l'information dont dispose un joueur sur le déroulement du jeu jusqu'au temps p . Dans les modèles de mathématiques financières, ces filtrations représentent plutôt la diversité des informations qu'un agent financier peut utiliser pour aménager son portefeuille d'action, tout en observant l'évolution d'un certain nombre de paramètres aléatoires. Dans ce contexte, les flux des valeurs des actifs, les stratégies d'aménagements de portefeuilles, ou encore les variations des taux d'intérêts bancaires, sont ils mesurables, et quantifiables, par rapport à ces informations? Peut on prévoir leurs évolutions? En langage probabiliste, ces deux notions correspondent aux propriétés d'adaptation et de prévisibilité définies ci-après.

Définition 2.4.2 Une suite de v.a. $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$, à valeurs dans des espaces $(E_p)_{0 \leq p \leq n}$, et définie sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$, est dite **adaptée** lorsque l'on a

$$\forall 0 \leq p \leq n \quad (X_0, \dots, X_p) \subseteq \mathcal{F}_p$$

La suite de v.a. $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ est dite **prévisible** lorsque l'on a

$$\forall 0 \leq p \leq n \quad (X_0, \dots, X_p) \subseteq \mathcal{F}_{p-1}$$

avec la convention $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$, lorsque $p = 0$.

La propriété d'adaptation souligne le fait que les v.a. trajectorielles (X_0, \dots, X_p) peuvent se représenter en terme d'évènements de \mathcal{F}_p . Autrement dit les évènements

$$A_p(x_0, \dots, x_p) = (X_0, \dots, X_p)^{-1}(\{(x_0, \dots, x_p)\})$$

sont dans l'algèbre \mathcal{F}_p , et font partie de l'information que l'on peut observer jusqu'au temps p . Plus précisément, nous avons la décomposition fonctionnelle

$$(X_0, \dots, X_p) = \sum_{(x_0, \dots, x_p) \in (E_0 \times \dots \times E_p)} (x_0, \dots, x_p) 1_{A_p(x_0, \dots, x_p)}$$

La propriété de prévisibilité reflète une situation où les évènements $A_p(x_0, \dots, x_p)$ sont dans l'algèbre \mathcal{F}_{p-1} . Ces évènements font désormais partie de l'information que l'on peut observer au temps $(p-1)$. Dans ce cas, la valeur X_p du processus au temps p est prévisible dès l'instant $(p-1)$.

Exemple 2.4.4 En reprenant les exemples précédents, on vérifie aisément que les suites $(\epsilon_p)_{0 \leq p \leq n}$, et $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ sont toutes deux adaptées à la filtration $(\mathcal{F}_p^{n, \epsilon})_{0 \leq p \leq n}$. De même, on vérifie les processus retardés

$$X_p^- =_{\text{déf.}} X_{p-1} \quad \text{et} \quad \epsilon_p^- =_{\text{déf.}} \epsilon_{p-1}$$

sont prévisibles par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_p^{n, \epsilon})_{0 \leq p \leq n}$.

Nous arrivons enfin à la définition abstraite tant attendue d'un processus aléatoire.

Définition 2.4.3 Un processus aléatoire à valeurs dans un ensemble (fini) E est une suite de v.a. adaptées $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ à valeurs dans E , et définies sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$.

Il peut être utile de souligner à nouveau que pour tout processus aléatoire $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (F_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$, nous avons les inclusions d'algèbres

$$\mathcal{F}_p^X =_{\text{déf.}} \sigma(X_0, \dots, X_p) \subset \mathcal{F}_p$$

La définition abstraite précédente nous permet donc d'analyser des processus aléatoires définis sur des espace probabilisés muni de filtrations d'algèbres autres que les filtrations canoniques. Cette souplesse de modélisation est particulièrement utile lorsque l'on étudie plusieurs processus aléatoires sur le même espace probabilisé filtré. Dans cette situation, **les algèbres \mathcal{F}_p représentent l'adaptation de tous les phénomènes aléatoires en jeu, jusqu'au temps p .**

Exemple 2.4.5 *Supposons que $(X_p, Y_p)_{0 \leq p \leq n}$ soit une chaîne de Markov à valeurs dans un espace produit $(E \times F)$, définie sur l'espace filtré canonique*

$$(\Omega_n, (F_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P}_n)$$

avec

$$\forall 0 \leq p \leq n \quad \mathcal{F}_p = F_p^{(X, Y)} (= \sigma((X_0, Y_0), \dots, (X_p, Y_p)))$$

Dans ce cas, la séquence $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ est un processus aléatoire à valeurs dans E , à nouveau défini sur $(\Omega_n, (F_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P}_n)$. Dans cette situation, nous avons

$$\mathcal{F}_p^X = \sigma(X_0, \dots, X_p) \subset \mathcal{F}_p$$

La notion abstraite de processus aléatoire que nous venons d'introduire nous permet de définir très simplement divers processus aléatoires à partir d'un processus de référence donné. Supposons que $(X'_p)_{0 \leq p \leq n}$, soit processus aléatoire à valeurs dans des espaces finis $(E'_p)_{0 \leq p \leq n}$, et défini sur un espace de probabilisé filtré $(\Omega, (F_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$. Pour toute collection de transformations

$$f_p : E'_0 \times \dots \times E'_p \longrightarrow E_p$$

de $E'_0 \times \dots \times E'_p$ dans des espaces produit, et finis, auxiliaires E_p , la séquence des transformations

$$X_p = f_p(X'_0, \dots, X'_p)$$

est à nouveau un processus aléatoire défini sur le même espace de probabilisé filtré $(\Omega, (F_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$.

2.4.3 Intégration par parties discrète

On considère un processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ à valeurs réelles, et défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$. On notera $(\Delta X_p)_{0 \leq p \leq n}$ la suite des accroissements définis par

$$\forall 0 \leq p \leq n \quad \Delta X_p = (X_p - X_{p-1})$$

avec la convention $\Delta X_0 = X_0$, lorsque $p = 0$. La version discrète de l'intégrale stochastique correspond à la notion suivante.

Définition 2.4.4 On considère un processus prévisible réel $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, et un processus aléatoire réel $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, sur un même espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}, \mathbb{P})$. On appelle transformée de Y par X , et on note $((X \cdot Y)_k)_{0 \leq k \leq n}$, le processus décrit par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad (X \cdot Y)_k = \sum_{l=0}^k X_l \Delta Y_l$$

On notera que les accroissements du processus $((X \cdot Y)_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont donnés par

$$\Delta(X \cdot Y)_k = X_k \Delta Y_k$$

A chaque instant $(k-1)$, les v.a. X_k et Y_{k-1} , sont connues, seule la v.a. Y_k est imprévisible, en ce sens où $Y_k \notin \mathcal{F}_p$.

Définition 2.4.5 La variation quadratique entre deux processus réels $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$, définis sur un même espace probabilisé filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$, est le processus aléatoire $([X, Y]_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad [X, Y]_k = [Y, X]_k = \sum_{l=0}^k \Delta X_l \Delta Y_l$$

avec, lorsque $l=0$, les conventions

$$X_{-1} = 0 = Y_{-1}, \quad \Delta X_0 = X_0, \quad \text{et} \quad \Delta Y_0 = Y_0$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \Delta(XY)_k &= X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} \\ &= X_{k-1} (Y_k - Y_{k-1}) + Y_k (X_k - X_{k-1}) Y_k \\ &= X_{k-1} (Y_k - Y_{k-1}) + Y_{k-1} (X_k - X_{k-1}) \\ &\quad + (X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}) \\ &= X_{k-1} \Delta Y_k + Y_{k-1} \Delta X_k + \Delta X_k \Delta Y_k \end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule d'intégration par parties discrète

$$X_k Y_k = \sum_{l=1}^k X_{l-1} \Delta Y_l + \sum_{l=1}^k Y_{l-1} \Delta X_l + [X, Y]_k \quad (2.4)$$

En terme de transformées de processus, cette formule s'écrit sous la forme

$$(XY)_k = (YX)_k = (X \cdot Y)_k + (Y \cdot X)_k + [X, Y]_k$$

2.4.4 Décomposition de Doob

Dans la section 2.4.1, nous avons présenté la notion de filtration d'algèbres $(\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}$ sur un espace d'aléas Ω . Ces algèbres abstraites permettent de modéliser, sans rentrer dans le détail, des évolutions d'environnements aléatoires observables. L'information connue à un temps p , se résume ainsi à la donnée d'une algèbre \mathcal{F}_p sur Ω .

Chaque incrément d'un processus réel $(X_p)_{0 \leq p \leq n}$ sur $(\Omega, (\mathcal{F}_p)_{0 \leq p \leq n}, \mathbb{P})$ se décompose en une partie prévisible, et une partie imprévisible

$$\Delta X_p = \underbrace{\mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1})}_{\text{partie prévisible}} + \underbrace{[\Delta X_p - \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1})]}_{\text{partie imprévisible}}$$

Plus généralement, nous avons la décomposition de Doob :

$$X_k = \sum_{p=0}^k \Delta X_p = A_k^X + M_k^X$$

avec le couple de processus $(A_k^X, M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ donnés par

$$\begin{aligned} A_k^X &= \sum_{p=0}^k \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) = \sum_{p=0}^k [\mathbb{E}(X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) - X_{p-1}] \\ M_k^X &= \sum_{p=0}^k [\Delta X_p - \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1})] = \sum_{p=0}^k [X_p - \mathbb{E}(X_p \mid \mathcal{F}_{p-1})] \end{aligned}$$

Dans les formules précédentes, lorsque $p = 0$, nous avons à nouveau utilisé les conventions

$$X_{-1} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\Delta X_0 \mid \mathcal{F}_{-1}) = \mathbb{E}(X_0 \mid \mathcal{F}_{-1}) = \mathbb{E}(X_0)$$

En accord avec les remarques précédentes, le premier processus $(A_k^X)_{0 \leq k \leq n}$, est formé des tendances locales prévisibles

$$\Delta A_k^X = \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

Par conséquent $(A_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ est prévisible par rapport à l'information portée par la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(A_k^X \mid \mathcal{F}_{k-1}) = A_k^X$$

L'évolution du second processus $(M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$, est au contraire totalement imprévisible, en ce sens où l'on a

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(M_k^X \mid \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}^X$$

Comme leur nom ne l'indique pas, les processus vérifiant cette propriété sont appelés des martingales.

Le processus $(M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ est appelé **la partie martingale** de $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$. Le processus $(A_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ est parfois appelé **la partie prévisible**, ou encore **le compensateur** de $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, en ce sens où

$$M_k = X_k - A_k^X$$

forme une martingale.

Du fait de leur importance en pratique, la section suivante est consacrée à l'étude de tels processus aléatoires.

Terminons cette section par une remarque élémentaire concernant la condition initiale X_0 du processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$. Dans les décompositions précédentes, nous avons inclue la moyenne $\mathbb{E}(X_0)$ de X_0 dans la partie prévisible du processus, de sorte à avoir

$$A_0^X = \mathbb{E}(X_0) \quad \text{et} \quad M_0^X = X_0 - \mathbb{E}(X_0)$$

Dans ces conditions, la partie martingale $(M_k^X)_{0 \leq k \leq n}$ du processus est de moyenne nulle $\mathbb{E}(M_0^X) = 0$. En remplaçant X_k par $(X_k - X_0)$, on peut alternativement utiliser les décompositions suivantes :

$$\bar{X}_k =_{\text{def.}} (X_k - X_0) = \sum_{l=1}^k \Delta X_l = \bar{A}_k^X + \bar{M}_k^X \tag{2.5}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{A}_k^X &= A_k^X - A_0^X \\ &= \sum_{p=1}^k \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) = \sum_{p=0}^k [\mathbb{E}(X_p \mid \mathcal{F}_{p-1}) - X_{p-1}] \\ \bar{M}_k^X &= M_k^X - M_0^X \\ &= \sum_{p=1}^k [\Delta X_p - \mathbb{E}(\Delta X_p \mid \mathcal{F}_{p-1})] = \sum_{p=1}^k [X_p - \mathbb{E}(X_p \mid \mathcal{F}_{p-1})] \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les parties prévisibles, et martingales, sont initialement nulles

$$\bar{A}_0^X = 0 \quad \text{et} \quad \bar{M}_0^X = 0$$

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 *En utilisant un modèle d'arbre, calculer la probabilité des évènements suivants : (B_1) obtenir exactement une fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs ; (B_2) obtenir exactement deux fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs ; (B_3) obtenir exactement trois fois le chiffre 6 lors de 3 lancer de dés successifs.*

Exercice 2.5.2 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, de même loi de Bernoulli*

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = 1/3$$

Expliciter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Exercice 2.5.3 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une suite de v.a. indépendantes $(\epsilon_i)_{i=1,2,3,4}$, de lois de Bernoulli*

$$\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

Expliciter l'espace des évènements associé à ce modèle.

Exercice 2.5.4 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne entre les espaces suivants*

$$E_0 = \{1, 2\} \longrightarrow E_1 = \{1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{1, 2\} \longrightarrow E_3 = \{1\} \longrightarrow E_4 = \{1, 2\}$$

On note η_0 la loi initiale de la chaîne, et l'on désigne par $M_k(x_{k-1}, x_k)$ la probabilité de transition d'un état $x_{k-1} \in E_{k-1}$, vers un état $x_k \in E_k$. Décrire les probabilités pour que le processus $(X_k)_{0 \leq k \leq 4}$ suive les trajectoires suivantes

1. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 1 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 2$.
2. $X_0 = 1 \longrightarrow X_1 = 3 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1$.
3. $X_0 = 2 \longrightarrow X_1 = 2 \longrightarrow X_2 = 2 \longrightarrow X_3 = 1 \longrightarrow X_4 = 1$.

Exercice 2.5.5 *Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur une période, entre les espaces suivants*

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$$

1. *Vérifier que cette évolution élémentaire peut être synthétisée par le tableau suivant*

Ω	X_0	X_1
ω^1	x_0	$x_{1,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,2}$

2. Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques

$$\begin{aligned} A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \end{aligned}$$

3. Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \end{aligned}$$

4. Déterminer les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$.

5. Vérifier les formules suivantes

$$X_0 = x_0 \quad \text{et} \quad X_1 = \sum_{i=1}^2 x_{1,i} 1_{\{\omega^i\}}$$

6. Déterminer la quantité moyenne $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$. Pour quelle probabilité \mathbb{P}^* sur Ω a-t-on

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 2.5.6 Décrire l'arbre des épreuves associé à une évolution markovienne sur deux périodes, entre les espaces

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}\}$$

et synthétisée par le tableau suivant

Ω	X_0	X_1	X_2
ω^1	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$
ω^2	x_0	$x_{1,1}$	$x_{2,2}$
ω^3	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,3}$
ω^4	x_0	$x_{1,2}$	$x_{2,4}$

1. Expliciter un espace des évènements, et les évènements cylindriques

$$\begin{aligned} A_0(x_0) &= X_0^{-1}(\{x_0\}) \\ A_1(x_0, x_{1,1}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1})\}) \\ A_1(x_0, x_{1,2}) &= (X_0, X_1)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,1}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,1})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,1}, x_{2,2}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,1}, x_{2,2})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,3}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,3})\}) \\ A_2(x_0, x_{1,2}, x_{2,4}) &= (X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x_0, x_{1,2}, x_{2,4})\}) \end{aligned}$$

2. Décrire dans cette situation les décompositions de l'espace Ω

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x, y, z)\}) : (x, y, z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\}\end{aligned}$$

3. Déterminer les algèbres \mathcal{F}_k^X engendrées par les partitions \mathcal{D}_k^X , avec $k = 0, 1$.

4. Vérifier les formules suivantes

$$\begin{aligned}X_0 &= x_0 \\ X_1 &= x_{1,1} 1_{\{\omega^1, \omega_2\}} + x_{1,2} 1_{\{\omega^3, \omega_4\}} \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{i=1}^4 x_{2,i} 1_{\omega^i}\end{aligned}$$

5. Déterminer les quantités moyennes

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X)$$

6. Existe-t-il une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 2.5.7 On considère l'évolution markovienne $(X_k)_{k=0,1,2,3}$ sur trois périodes décrites par l'arbre des épreuves suivant

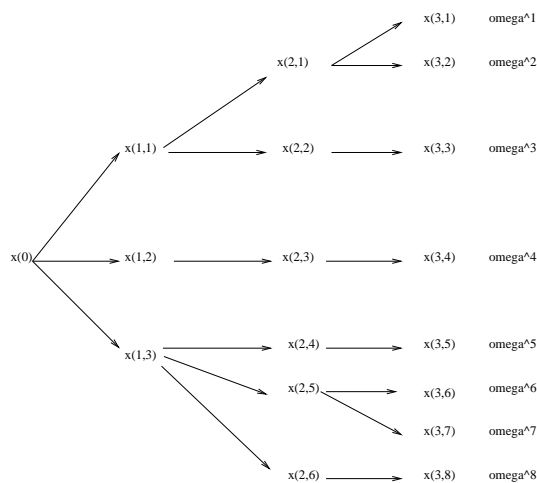


FIG. 2.9 –

1. Déterminer les évènements $A_{i,j}$ pour lesquels les décompositions suivantes sont satisfaites :

$$X_0 = x_0, \quad X_1 = \sum_{i=1}^3 x_{1,i} 1_{A_{1,i}}$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^6 x_{2,i} 1_{A_{2,i}}, \quad \text{et} \quad X_3 = \sum_{i=1}^8 x_{3,i} 1_{A_{3,i}}$$

Déterminer les décompositions $(\mathcal{D}_k^X)_{k=0,1,2,3}$ définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^X &= \{X_0^{-1}(\{x\}) : x \in E_0\} \\ \mathcal{D}_1^X &= \{(X_0, X_1)^{-1}(\{(x, y)\}) : (x, y) \in (E_0 \times E_1)\} \\ \mathcal{D}_2^X &= \{(X_0, X_1, X_2)^{-1}(\{(x, y, z)\}) : (x, y, z) \in (E_0 \times E_1 \times E_2)\} \\ \mathcal{D}_3^X &= \{(X_0, X_1, X_2, X_3)^{-1}(\{(x, y, z, t)\}) : (x, y, z, t) \in (E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3)\} \end{aligned}$$

avec les espaces d'états

$$E_0 = \{x_0\} \longrightarrow E_1 = \{x_{1,i} \mid i = 1, 2, 3\} \longrightarrow E_2 = \{x_{2,i}, \mid i = 1, \dots, 6\}$$

$$\longrightarrow E_3 = \{x_{3,i}, \mid i = 1, \dots, 8\}$$

2. Déterminer les probabilités suivantes en fonction des probabilités des évènements élémentaires ω^i .

$$\begin{array}{l|l} \mathbb{P}(X_3 = x_{3,1} | X_2 = x_{2,1}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,1} | X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,2} | X_2 = x_{2,1}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,2} | X_1 = x_{1,1}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,6} | X_2 = x_{2,5}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,4} | X_1 = x_{1,3}) \\ \mathbb{P}(X_3 = x_{3,7} | X_2 = x_{2,5}) & \mathbb{P}(X_2 = x_{2,5} | X_1 = x_{1,3}), \quad \mathbb{P}(X_2 = x_{2,6} | X_1 = x_{1,3}) \end{array}$$

et enfin

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{1,1} | X_0 = x_0) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,2} | X_0 = x_0) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_{1,3} | X_0 = x_0)$$

3. On note \mathcal{F}_k^X les algèbres engendrées par les décompositions \mathcal{D}_k^X , avec la séquence d'indices $k = 0, 1, 2, 3$. Déterminer les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}(X_3 | \mathcal{F}_2^X), \quad \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1^X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0^X)$$

4. Existe-t-il une probabilité \mathbb{P}^* sur Ω telle que

$$\mathbb{E}^*(X_3 | \mathcal{F}_2^X) = X_2 \quad \mathbb{E}^*(X_2 | \mathcal{F}_1^X) = X_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*(X_1 | \mathcal{F}_0^X) = X_0$$

Exercice 2.5.8 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η_0 . On rappelle qu'une mesure de probabilités μ_k sur E_k est une suite de nombres $(\mu_k(x_k))_{x_k \in E_k} \in [0, 1]$ telle que $\sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) = 1$. On associe à une telle mesure μ_k sur E_k , la mesure $(\mu_k M_{k+1})$ sur E_{k+1} définie par

$$\forall x_{k+1} \in E_{k+1} \quad (\mu_k M_{k+1})(x_{k+1}) = \sum_{x_k \in E_k} \mu_k(x_k) M_{k+1}(x_k, x_{k+1})$$

1. Vérifier que l'on a

$$(\mu_k M_{k+1})M_{k+2} = \mu_k(M_{k+1}M_{k+2})$$

avec la probabilité de transition $(M_{k+1}M_{k+2})$ de E_k vers E_{k+2} définie par la formule

$$\begin{aligned} (M_{k+1}M_{k+2})(x_k, x_{k+2}) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1})M_{k+2}(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+2} = x_{k+2} \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

2. Plus généralement, on note $(M_{k+1} \dots M_{k+l})$ la probabilité de transition de E_k vers E_{k+l} définie par la formule

$$\begin{aligned} (M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_k, x_{k+l}) \\ &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, x_{k+l-1} \in E_{k+l-1}} M_{k+1}(x_k, x_{k+1}) \dots M_{k+l}(x_{k+l-1}, x_{k+l}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+l} = x_{k+l} \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

Vérifier que l'on a

$$\begin{aligned} \forall x_k \in E_k \quad \eta_k(x_k) &=_{\text{def.}} \mathbb{P}(X_k = x_k) \\ &= \eta_0(M_1 \dots M_k)(x_k) \\ &= (\eta_0 M_1)(M_2 \dots M_k)(x_k) \\ &= ((\eta_0 M_1)M_2)(M_3 \dots M_k)(x_k) \\ &= \dots \\ &= (((\dots ((\eta_0 M_1)M_2) \dots M_{k-1})M_k)(x_k) \end{aligned}$$

3. On associe à une fonction $f_{k+1} \in \mathbb{R}^{E_{k+1}}$, la fonction $M_k(f_{k+1}) \in \mathbb{R}^{E_k}$ définie par

$$\begin{aligned} M_k(f_{k+1})(x_k) &= \sum_{x_{k+1} \in E_{k+1}} M_k(x_k, x_{k+1}) f_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \mathbb{E}(f_{k+1}(X_{k+1}) \mid X_k = x_k) \end{aligned}$$

Montrer que pour toute fonction $f_{k+l} \in \mathbb{R}^{E_{k+l}}$, nous avons

$$\mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l}) \mid X_k = x_k) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})(x_k)$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \eta_{k+l}(f_{k+l}) &=_{\text{def.}} \mathbb{E}(f_{k+l}(X_{k+l})) \\ &= [\eta_k(M_{k+1} \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_k[(M_{k+1} \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \\ &= [\eta_0(M_1 \dots M_{k+l})](f_{k+l}) = \eta_0[(M_1 \dots M_{k+l})(f_{k+l})] \end{aligned}$$

Exercice 2.5.9 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans un espace homogène et fini $E = \{x_1, \dots, x_d\}$, de probabilités de transitions $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale μ_0 . Dans ce contexte, les probabilités de transitions sont données par les matrices

$$M_k = \begin{pmatrix} M_k(x_1, x_1) & \dots & M_k(x_1, x_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_k(x_d, x_1) & \dots & M_k(x_d, x_d) \end{pmatrix}$$

On identifie les mesures de probabilités μ , et les fonctions f sur E aux vecteurs lignes et colonnes suivants

$$\mu = [\mu(x_1), \dots, \mu(x_d)] \quad \text{et} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_d) \end{bmatrix}$$

1. Vérifier les formules matricielles suivantes

$$\forall x_i, x_j \in E \quad \mathbb{P}(X_{k+l} = x_j \mid X_k = x_i) = (M_{k+1} \dots M_{k+l})(x_i, x_j)$$

et

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \forall x_i \in E \quad \mathbb{E}(f(X_{k+l}) \mid X_k = x_i) = [M_{k+1} \dots M_{k+l}f](x_i)$$

et enfin

$$\forall f \in \mathbb{R}^E \quad \mathbb{E}(f(X_k)) = \eta_0 M_1 \dots M_k f$$

Exercice 2.5.10 On considère une chaîne de Markov homogène sur un espace à deux points $E = \{1, 2\}$, et associée à la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$. Les entrées $p_{i,j} \in [0, 1]$ sont telles que $p_{1,1} + p_{1,2} = 1 = p_{2,1} + p_{2,2}$. On conviendra que $c = p_{1,2} + p_{2,1} > 0$. Montrer (par récurrence sur le paramètre temporel) que les itérées M^n de la matrice M sont données par la formule

$$M^n = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{1,2} \end{pmatrix} + \frac{(1-c)^n}{c} \begin{pmatrix} p_{1,2} & -p_{1,2} \\ -p_{2,1} & p_{2,1} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Exercice 2.5.11 Soit $(X'_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus de Markov, à valeurs dans les espaces $(E'_k)_{0 \leq k \leq n}$, de probabilités de transitions $(M'_k)_{0 \leq k \leq n}$, et de loi initiale η'_0 . On note $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ le processus historique de $(X'_k)_{0 \leq k \leq n}$ défini par

$$X_k = (X'_0, \dots, X'_k)$$

1. Vérifier que $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans les espaces produits

$$E_k = (E'_0, \dots, E'_k)$$

2. Décrire les probabilités de transitions de $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Exercice 2.5.12 On considère une marche aléatoire $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie sur un espace de probabilités (Ω, \mathbb{P}) , d'origine $X_0 = 0$ et de probabilités de transitions homogènes

$$M(x, y) = \alpha 1_{x+1}(y) + (1-\alpha) 1_{x-1}(y) \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 1]$$

1. Décrire l'arbre des épreuves associé au processus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$.

2. Montrer que la position moyenne de la particule au temps n est donnée par la formule

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \mathbb{E}(X_k) = k \times (2\alpha - 1)$$

3. Vérifier que les transitions de la chaîne entre deux instants, l et $(l+m) \leq n$, sont données par la formule

$$\mathbb{P}(X_{l+m} = x + [k - (m - k)] \mid X_l = x) = C_m^k \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}$$

pour tous les $k \in \{0, \dots, m\}$, et

$$\mathbb{P}(X_{l+m} \notin \{2k - m : k = 0, \dots, m\} \mid X_l = x) = 0$$

4. En déduire que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) = \frac{(2k)!}{k!k!} (\alpha(1 - \alpha))^k$$

En utilisant la formule de Stirling ($k! \simeq \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$), montrer que

$$\mathbb{P}(X_{l+2k} = 0 \mid X_l = 0) \simeq \frac{(4\alpha(1 - \alpha))^k}{\sqrt{\pi k}} \quad (= 1/\sqrt{\pi k} \text{ si } \alpha = 1/2)$$

Exercice 2.5.13 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur \mathbb{R} , associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes

$$X_k = \sum_{p=0}^k \epsilon_p = X_{k-1} + \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

Exercice 2.5.14 Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$, une promenade aléatoire sur \mathbb{R} , associée à une suite de v.a. $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ indépendantes

$$X_k = \prod_{p=0}^k \epsilon_p = X_{k-1} \times \epsilon_k$$

Décrire la partie prévisible, et la partie martingale de ce processus.

