



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*  
Discipline : *Mathématiques Appliquées*

---

Présentée et soutenue par *Christophe Baehr*  
Le 23 septembre 2008

**Titre :** *Modélisation probabiliste des écoulements  
atmosphériques turbulents afin d'en filtrer la mesure par  
approche particulaire*

---

### JURY

*François le Gland INRIA Rennes Président*  
*Denis Talay INRIA Sophia-Antipolis Rapporteur*  
*Etienne Mémin Université de Rennes I Rapporteur*  
*Pierre Del Moral INRIA Bordeaux Directeur*  
*Dominique Bakry Université Toulouse III Directeur*  
*Jean-Louis Brenguier Météo-France Toulouse Directeur*  
*Jean Pailleux Météo-France Toulouse Examineur*  
*Komla Domelevo Université Toulouse III Examineur*

---

**Ecole doctorale :** *Mathématiques, Informatique, Télécommunications  
de Toulouse*

**Unité de recherche :** *Institut de Mathématiques de Toulouse*  
**Directeur(s) de Thèse :** *Pierre Del Moral, Dominique Bakry et  
Jean-Louis Brenguier*

# Avant-propos et remerciements

Cette thèse en Mathématiques Appliquées, même si elle s'inscrit dans mon travail de recherche au Centre National de Recherches Météorologiques (CNRM) de Météo-France à Toulouse, marque pour moi une étape importante dans un parcours universitaire commencé il y a bien longtemps. En nous attaquant à un problème réputé inabordable, nous avons pu défricher un domaine, le formaliser mathématiquement, au moins partiellement, donner des premières solutions et des pistes pour des développements futurs. La route est encore longue et pleine de chausse-trappe, avec des problèmes nouveaux qui s'imposeront à nous. Ce travail mathématique passionnant nous occupera encore pour un bon nombre d'année, cette thèse n'est en fait qu'un commencement.

Une recherche même quand elle est l'œuvre d'une personne et en fait celle de toute une équipe à qui il faut exprimer une reconnaissance et une réelle gratitude. Sans faire un échantillonnage d'importance, je commencerai tout de même par remercier chaleureusement Pierre Del Moral, Directeur de Recherche à l'INRIA de Bordeaux-Sud Ouest, qui a accepté la direction scientifique de ce travail de thèse et a su m'initier à la conduite d'une exploration autonome. J'ai beaucoup appris auprès de Pierre, je lui dois aussi une grande liberté de réflexion et de choix qui ont permis de m'affirmer dans cette recherche.

Je remercie de manière égale Dominique Bakry, Professeur de l'Université Toulouse III - Paul Sabatier et Responsable du Laboratoire de Statistique et Probabilités (IMT/LSP) qui a co-dirigé avec un rôle plus administratif, ce qui ne nous a pas empêché d'avoir de longues conversations où je pouvais progresser par son propre questionnement, et aussi Jean-Louis Brenguier, Directeur du Groupe de Météorologie Expérimentale et Instrumentale (GMEI) du CNRM, qui a été co-directeur pour Météo-France et m'a en permanence rappelé l'importance d'être audible des non-spécialistes.

Tout ceci a abouti à une soutenance, je tiens à signifier mon respect et ma gratitude à Denis Talay, Directeur de Recherche à l'INRIA de Nice-Sophia Antipolis et Etienne Mémin, Maître de Conférences Habilité à l'Université de Rennes I pour leur rapport d'évaluation encourageant, ainsi qu'à François Le Gland, Directeur de Recherche à l'IRISA de Rennes, qui a accepté d'être président du Jury, assisté de Jean Pailleux Directeur Adjoint du CNRM à Toulouse et de Komla Domelevo, Maître de Conférence Habilité à l'Université Toulouse III - Paul Sabatier qui ensemble ont formé un jury devant lequel il a été agréable de présenter. Je voudrais ici exprimer ma reconnaissance à Jean Pailleux qui a fait une lecture scrupuleuse et précieuse du manuscrit.

Il m'est aussi agréablement de remercier les diverses personnes avec qui j'ai pu avoir des discussions pleines d'enseignements, Mireille Bossy de l'INRIA de Sophia, François Bolley de l'Université Paris-Dauphine, Serge Cohen de l'Université Paul Sabatier, Anne Cuzol de l'Université de Bretagne Sud, et surtout, et de nouveau François Le Gland avec qui j'ai démarré l'étude des processus à champ moyen. De leurs propos sont nées quelques-unes des idées présentes dans ce mémoire.

Il est essentiellement de confronter ses idées au jugement des autres, mais aussi d'être attentif aux conceptions d'autrui. Je remercie pour cela le groupe de travail sur la mécanique des fluides conjoint à l'IMT/MIP et à l'INSA de Toulouse et essentiellement à Violaine Rousset-Michon, à Philippe Villedieu et de nouveau à Komla Domelevo. Dans ces rencontres, l'IMT/LSP n'est pas en reste avec son groupe de travail modélisation probabiliste et son séminaire de probabilités et je remercie particulièrement Franck Barthe, Fabrice Baudoin et Thierry Delmotte.

J'ai pour le moment beaucoup parlé du monde universitaire mais il est convenant que j'adresse maintenant un hommage appuyé à Météo-France, à son Centre de Recherches, de m'avoir permis, dans le cadre de mes fonctions et pour répondre à une problématique de recherche, de repartir sur les bancs de l'Université, d'abord pour le DEA de Mathématiques Appliquées puis pour cette thèse de doctorat. Je remercie en premier lieu Joël Poitevin, Directeur Adjoint du CNRM de m'avoir encouragé dans cette démarche et à Jean-Louis Brenguier et Bruno Piguet, responsable de l'équipe de traitement du signal pour le GMEI, d'avoir accepté cet axe de travail que j'avais proposé et l'obligation de formation qui allait avec. Bruno est un spécialiste du traitement des données expérimentales en météorologie, le

dialogue permanent qui s'est instauré entre nous a été un atout majeur dans l'aboutissement de cette thèse.

J'adresse un remerciement chaleureux à Olivier Pannekoucke du groupe de modélisation du CNRM qui m'a passé son code de generation d'un champ turbulent 2D sous Scilab qui illustre la fin du chapitre 7, et pour les discussions enthousiastes que j'ai pu avoir avec lui.

Je remercie sans retenue 4M, l'équipe de GMEI qui opère les capteurs dont les mesures ont servis dans ce mémoire, et nommément Dominique Legain, Joël Barrié, Eric Moulin, Gilles Bouhours, David Suquia qui allient compétence, efficacité et bonne humeur. Je n'oublie pas de saluer l'équipe de support informatique du Centre de Recherche, CTI, qui se dévouent pour ses usagers et nous permet de travailler dans des conditions optimales.

Je n'oublie pas de saluer et remercier Nobert Krief dont le phrasé, le génie et les créations ont ponctué tous les moments de mon existence depuis 30 ans.

Je terminerai par un témoignage emprunt d'estime, d'affection et d'admiration à Valérie, ma compagne, Gaëtan et Yann, mes garçons, qui plus que les autres m'ont autorisé, encouragé, assisté et ont conditionné un moment de leur vie afin que je réussisse cette thèse dont vous allez lire le mémoire.

*A mes Garçons, Gaëtan et Yann  
A ma Valérie*

*Qu'il me soit permis ici  
d'exprimer ma reconnaissance  
au Professeur Gilles Fourtanier  
et au Docteur Jacques Moreau  
qui m'ont donné une seconde vie  
durant laquelle ce travail a été  
possible.*

# Table des matières

Avant-propos et remerciements	<b>i</b>
Table des matières	<b>viii</b>
Liste des tableaux	<b>x</b>
Table des figures	<b>xvi</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte et apport du filtrage non-linéaire en mécanique des fluides	4
1.2 Objectifs et Innovations . . . . .	5
1.3 Filtrage d'observations bruitées . . . . .	6
1.3.1 Filtrage linéaire des mesures atmosphériques . . . . .	6
1.3.2 Filtrage non-linéaire d'un signal perturbé . . . . .	7
1.4 Les applications nouvelles obtenues dans ce travail . . . . .	10
1.4.1 Filtrage de mesures unidimensionnelles . . . . .	10
1.4.2 Cas de mesures atmosphériques 3D réelles . . . . .	13
1.5 Les nouveaux outils théoriques développés . . . . .	14
1.5.1 Filtrages non-linéaires de processus à champ moyen et leur convergence . . . . .	17
1.5.2 Processus d'acquisition d'un champ aléatoire multidimen- sionnel . . . . .	20
1.6 Organisation du mémoire . . . . .	23
<b>I Présentation probabiliste de la mécanique des fluides</b>	<b>24</b>
<b>2 Introduction à l'étude de la turbulence</b>	<b>25</b>
2.1 Présentation de la turbulence . . . . .	26
2.2 Description statistique de la turbulence . . . . .	33
2.3 Simulations numériques déterministes d'écoulements turbulents . .	38
2.4 Modélisations probabilistes de la turbulence . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Modèles Lagrangiens stochastiques de Pope</b>	<b>44</b>
3.1	Formulation du modèle Lagrangien . . . . .	46
3.2	Techniques Lagrangiennes en simulation des flots turbulents . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Mesures et traitement du signal en Micro-Météorologie</b>	<b>55</b>
4.1	Mesures expérimentales des vitesses d'un fluide turbulent . . . . .	59
4.2	Les spécificités de l'atmosphère relatives aux mesures expérimentales . . . . .	61
4.3	Etat des lieux en mesures atmosphériques . . . . .	63
4.4	Les techniques de filtrage actuelles . . . . .	69
4.4.1	Filtrage linéaire des mesures météorologiques . . . . .	70
4.4.2	Estimation des grandeurs Eulériennes en météorologie . . . . .	80
<b>II Techniques de Filtrage Stochastique des processus à champ moyen</b>		<b>83</b>
<b>5</b>	<b>Le Filtrage non linéaire</b>	<b>84</b>
5.1	Filtrage Stochastique pour les processus non-linéaires . . . . .	87
5.1.1	Le filtrage à temps continu . . . . .	87
5.1.2	Le filtrage trajectorien à temps discret . . . . .	94
5.2	Approximation particulière du filtrage non-linéaire . . . . .	99
5.3	Filtrage trajectorien et approximations particulières . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Filtrage de processus à champ moyen</b>	<b>111</b>
6.1	Cadre général du filtrage de processus à champ moyen . . . . .	113
6.1.1	Lemmes techniques . . . . .	117
6.2	Filtrage particulière pour des lois de champ moyen exactes $\vartheta_n$ . . . . .	119
6.2.1	Erreurs d'estimations dans la séquence de filtrage . . . . .	120
6.3	Filtrage particulière d'un processus de Markov à champ moyen du type $Loi(X_n)$ . . . . .	123
6.4	Filtrage particulière d'un processus de Markov à champ moyen conditionné aux observations . . . . .	126
6.4.1	Filtrage d'un champ moyen du type $Loi(X_n   Y_0 \dots Y_{n-1})$ . . . . .	127
6.4.2	Filtrage d'un champ moyen du type $Loi(X_n   Y_0 \dots Y_n)$ . . . . .	128
6.5	Filtrage d'un processus avec commande aléatoire $X_n^1$ à champ moyen $Loi(X_n^2   X_0^1 \dots X_n^1)$ . . . . .	130
6.5.1	Cas de la commande avec modèle Markovien . . . . .	133
6.5.2	Cas de la commande sans modèle Markovien . . . . .	134
6.6	Filtrage d'un processus commandé et conditionné de champ moyen $Loi(X_n^2   X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$ . . . . .	138

<b>III Applications au filtrage des mesures de vitesses du fluide atmosphérique</b>	<b>145</b>
<b>7 Acquisition d'un champ le long d'un chemin aléatoire</b>	<b>146</b>
7.1 Estimations de l'acquisition d'un champ vectoriel stochastique . . .	148
7.1.1 Définitions et premières applications . . . . .	149
7.1.2 Systèmes d'acquisitions d'observations . . . . .	154
7.1.3 Acquisition sur un milieu localement homogène en loi . . . .	155
7.2 Processus d'acquisition discret dans un milieu homogène en loi . .	156
7.2.1 Interprétation de l'acquisition discrète comme processus à champs moyens en interaction . . . . .	157
7.3 Approximation particulière pour l'estimation du processus d'acquisition discret . . . . .	162
7.4 Echantillonnage de l'acquisition d'un champ de vecteur . . . . .	164
7.4.1 Acquisition d'un champ à une résolution donnée . . . . .	164
7.4.2 Exemple d'acquisition sur une simulation de champ turbulent	167
<b>8 Filtre non-linéaire pour les mesures mobiles d'un fluide</b>	<b>174</b>
8.1 Discrétisation et fermeture du modèle Lagrangien pour les fluides turbulents . . . . .	175
8.1.1 Approximation des moyennes Eulériennes . . . . .	176
8.1.2 Discrétisation du système Lagrangien . . . . .	178
8.1.3 Couplage micro-macro pour le système Lagrangien discrétisé	180
8.1.4 Comportement du modèle de Pope adapté en régime laminaire	184
8.1.5 Simulations d'écoulements de fluides à l'aide du modèle de Pope discrétisé adapté . . . . .	186
8.2 Filtrage d'observations bruitées d'un fluide turbulent homogène .	188
8.2.1 Conditionnement aux observations du système Lagrangien	191
8.2.2 Comportement du signal-fluide conditionnel . . . . .	192
8.2.3 Localisation du processus de filtrage comme acquisition d'une dynamique Lagrangienne . . . . .	194
8.3 Résolution particulière du filtre adapté aux fluides turbulents . . .	196
8.4 Adaptation d'un modèle de turbulence stratifié pour les mesures atmosphériques . . . . .	199
8.4.1 Modèle Lagrangien de dispersion de Das et Durbin pour un régime de turbulence stratifiée . . . . .	200
8.4.2 Modèle Lagrangien de turbulence déduit pour l'atmosphère sèche . . . . .	202
8.4.3 Adaptation de l'algorithme particulière de filtrage pour les fluides atmosphériques . . . . .	204



<b>9 Applications aux mesures du vent atmosphérique</b>	<b>208</b>
9.1 Filtrage de vitesses unidimensionnelles simulées . . . . .	209
9.1.1 Simulation des vitesses d'un fluide en écoulement unidimensionnel . . . . .	209
9.1.2 Filtrage des vitesses d'un fluide 1D simulé . . . . .	213
9.2 Filtrage d'une composante de vent réel . . . . .	217
9.2.1 Les données anémométriques expérimentales en atmosphère réelle . . . . .	217
9.2.2 Filtrage de données unidimensionnelles réelles . . . . .	218
9.3 Filtrage d'un vent bidimensionnel réel . . . . .	221
9.3.1 Filtrage d'un vent horizontal dans un cas standard . . . . .	221
9.3.2 Variations sur le filtrage du vent en dimension 2 . . . . .	223
9.4 Filtrage de la température et d'un vent réel tridimensionnel . . . . .	229
9.5 Estimations numériques des erreurs du filtrage particulière unidimensionnel . . . . .	236
9.5.1 Ecart au vent de référence simulé ou réel . . . . .	240
9.5.2 Modifications du modèle et erreurs correspondantes . . . . .	243
9.5.3 Essais de filtrage utilisant le modèle sans champ moyen . . . . .	245
<b>10 Conclusions et Perspectives</b>	<b>249</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>255</b>
<b>A Filtrage Stochastique d'une dynamique linéaire Gaussienne</b>	<b>269</b>
A.1 Le filtre de Kalman-Bucy . . . . .	269
A.2 Filtres de Kalman en interaction . . . . .	272
A.3 Filtre de Kalman d'ensemble . . . . .	273
A.3.1 Le Filtre de Kalman d'ensemble d'Evensen . . . . .	273
A.3.2 Interprétation de l'EnKF par un filtrage de processus à champ moyen . . . . .	274
<b>B Tableaux des écarts entre les vents de référence et filtrés</b>	<b>277</b>
<b>C Code Scilab Filtrage d'un vent 1D Simulé</b>	<b>288</b>
<b>Abstract</b>	<b>294</b>
<b>Résumé</b>	<b>295</b>

# Liste des tableaux

6.1	Tableau des erreurs de l'approximation particulaire du filtrage d'un processus à champ moyen pour les diverses lois de champ moyen examinées dans ce chapitre . . . . .	143
B.1	Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	278
B.2	Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	279
B.3	Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	280
B.4	Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	281
B.5	Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	282
B.6	Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	283
B.7	Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	284
B.8	Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit . . . . .	285

B.9	Ecart entre le vent réel ou simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet ou sans champ moyen et 2 niveaux de bruit. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules . . . .	286
B.10	Ecart entre le vent réel ou simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet ou sans champ moyen et 2 niveaux de bruit. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules . . . . .	287

# Table des figures

1.1	Séries temporelles et densités spectrales de puissance, en noir d'une composante de vent, en bleu de la composante bruitée par un bruit blanc et en rouge du signal filtré par un filtre numérique à moyenne glissante . . . . .	7
1.2	Filtrage d'un vent 1D simulé filtré par algorithme particulaire conditionnel avec 100 particules. En cyan le signal bruité, en noir le signal de référence et en rouge le vent estimé. A gauche la série temporelle, à droite la densité spectrale de puissance . . . . .	12
1.3	Filtrage d'un vent réel 3D et de la température par algorithme particulaire conditionnel avec 500 particules. En pointillé bleu les signaux bruités, en noir ceux de référence et en rouge les valeurs estimées par l'algorithme. En haut les composantes horizontales du vent, en bas, la vitesse verticale et la température . . . . .	15
1.4	Série de taux de dissipation estimé en haut. Pseudo-trajectoire d'acquisition en bas . . . . .	16
1.5	Schéma d'évolution discrète du processus d'acquisition pour une dynamique Lagrangienne . . . . .	22
4.1	En haut série temporelle et spectre de puissance d'une composante du vent mesurée à la fréquence d'acquisition de 50 Hz sur le site de Toulouse-météo le 12/05/2006 de 09h00 à 09h30. En bas, série des incréments et histogramme empirique des incréments pour cette composante du vent, avec en rouge une courbe gaussienne théorique	64
4.2	Spéctres de puissance de vents atmosphériques 2D/3D . . . . .	65
4.3	Série de données et densité spectrale de puissance pour une mesure de température réalisée à Toulouse le 7 Avril 2006 entre 09h00 et 19h00 par un anémomètre sonique. Le signal de base doit respecter un spectre de type Kolmogorov, on note la présence de bruit structuré devenant prépondérant au-delà de 8 Hz avec présence de pics d'harmoniques après 5 Hz dues au système d'acquisition de la mesure expérimentale. . . . .	67

4.4	Spectres de puissance à 25 Hz calculés sur 1024 points pour les 3 composantes du vent déduits de mesures avion entre 12h07 et 12h10. On voit la prédominance des bruits dans les DSP qui devraient suivre la pente en $-5/3$ tracée en rouge. . . . .	68
4.5	Densités spectrales de puissance du signal brut, du bruit blanc et de signal bruité. . . . .	76
4.6	Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées et filtrées par moyenne glissante. . . . .	77
4.7	Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées et filtrées par méthode Fourier. . . . .	77
4.8	Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées et filtrées par un filtre de Butterworth du 2ème ordre. . . . .	78
4.9	Séries de données brutes, bruitées, filtrées par moyenne glissante et par méthode Fourier. . . . .	79
4.10	Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées, filtrées par un filtre particulière présenté dans la partie III de ce mémoire. . . . .	80
4.11	Détail sur les densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées, filtrées par un filtre particulière montrant le respect des structures présentes dans la donnée initiale. . . . .	81
7.1	Représentation de la trajectoire d'acquisition ponctuelle dans un champ multidimensionnel dont l'évolution est symbolisée par ses lignes de courant en supposant stationnaire l'évolution du champ d'intérêt . . . . .	148
7.2	Exemple sur une trajectoire d'acquisition de l'ensemble des boules d'homogénéité . . . . .	156
7.3	Couplage de systèmes d'acquisitions Lagrangiennes et d'une acquisition le long d'un chemin indépendant . . . . .	157
7.4	Schéma d'évolution discrète du processus d'acquisition pour une dynamique Lagrangienne . . . . .	159
7.5	Champ de turbulence 2D en représentation tourbillon et sa fonction de courant après 1 seconde de simulation . . . . .	169
7.6	Champ de turbulence 2D filtré des échelles fines en représentation tourbillon et sa fonction de courant après 1 seconde de simulation . . . . .	170
7.7	Acquisition d'un champ de turbulence bidimensionnel le long d'un chemin aléatoire. En haut à gauche le chemin d'acquisition avec pour fond le champ turbulent original après 4 secondes de simulation, à droite le même chemin avec pour fond le champ à 4 secondes filtré des petites échelles. En bas les acquisitions totale $A_n^T$ en cyan, filtré des échelles fines $A_n^f$ en rouge et échantillonnée $A_n^e$ en noir . . . . .	172

8.1	Couplage et Fermeture des échelles micro et macro dans le cas de la simulation et pour le filtrage des fluides turbulents . . . . .	182
8.2	En bas, simulation des trajectoires d'un écoulement avec des commandes particulières. En haut à gauche le champ de gradient de la pression moyenne utilisé et à droite celui du taux de dissipation turbulente. . . . .	187
8.3	On simule les trajectoires d'un écoulement fluide lors du contournement d'un obstacle avec une forme choisie du gradient de pression et du taux de dissipation turbulente. . . . .	189
9.1	Exemple de simulation d'un processus de Lévy $\alpha$ -stable de paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$ et du processus $\mathbb{E}(\alpha_n)$ . En haut la série temporelle du processus de Lévy croissant et au milieu celle de ses incréments $E_n$ et en bas une série pour la commande $A_n$ . . . . .	211
9.2	Exemple de simulation des vitesses d'un fluide en écoulement unidimensionnel. En haut la série temporelle complète et en bas un détail montrant des passages intermittents. . . . .	212
9.3	En haut le spectre de puissance des vitesses du fluide que l'on a simulé avec en bleu foncé la pente en $-5/3$ caractéristique de la turbulence homogène isotrope. En bas l'histogramme empirique des incréments des vitesses superposé en vert de la courbe d'une loi normale centrée. . . . .	214
9.4	En haut une série temporelle de vent simulé avec à droite le bruit d'observation rajouté en cyan. En bas, en rouge, le résultat du filtrage sur le dernier tiers de la série avec un détail montrant le bon suivi du filtre particulaire malgré les fortes perturbations. . .	215
9.5	Densité spectrale de puissance pour le signal bruité en cyan, le signal de référence à retrouver en noir et le signal filtré en rouge. La droite verte correspond à la pente en $-5/3$ de K41. . . . .	217
9.6	Filtrage d'un vent 1D réel à 20 Hz mesuré sur le site de Saint-Sardos le 10 janvier 2005 entre 12h00 et 12h03 UTC filtré par algorithme particulaire conditionnel avec 300 particules. En pointillé bleu le signal bruité, en noir le signal de référence et en rouge le vent estimé.	219
9.7	Densité spectrale de puissance pour le signal bruité en cyan, le signal réel à retrouver en noir et le signal filtré en rouge. La droite verte correspond à la pente en $-5/3$ de K41. . . . .	220
9.8	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un signal bidimensionnel. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Sur le diagramme des DSP est rajouté une droite de couleur verte de pente en $-5/3$ . Le filtrage utilise 300 particules. . . . .	222

9.9	Spectres de puissance des bruits autorégressifs pour chacune des composantes horizontales $U$ et $V$ . . . . .	224
9.10	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un signal bidimensionnel avec un bruit autorégressif. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 300 particules. . . . .	224
9.11	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un bruit dépendant du niveau de turbulence. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 300 particules. . . . .	225
9.12	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour des vitesses bidimensionnelles traitées par le filtre usant de mutation de loi a priori. Le filtrage utilise 70 systèmes de 300 particules. . . . .	226
9.13	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour des vitesses bidimensionnelles traitées par le filtre conditionnel. Le filtrage utilise 300 particules. . . . .	227
9.14	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un écoulement laminaire puis devenant turbulent. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 300 particules . . . . .	228
9.15	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour le vent horizontal dans un écoulement atmosphérique de dimension 3 (composante $U$ en haut, $V$ en bas). En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 800 particules . . . . .	231
9.16	Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour le vent vertical et la température dans un écoulement atmosphérique de dimension 3 (composante $W$ du vent en haut, température $\theta$ en bas). En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 800 particules . . . . .	232
9.17	Séries temporelles des paramètres estimés par le filtre conditionnel avec 800 particules. En haut le taux de dissipation turbulente total $\varepsilon_n$ et un extrait des vecteurs $\nabla_h \langle p \rangle dt$ le long de la trajectoire. En bas à gauche les gradients verticaux $\frac{dU_n}{dz}$ et $\frac{dV_n}{dz}$ et à droite le gradient $\frac{d\theta_n}{dz}$ et le coefficient de flottabilité $\beta_n$ . . . . .	234
9.18	Trajectoire d'acquisition du système couplé au capteur pour 1 particule entre les instants 840 et 1040. . . . .	235

- 9.19 Séries temporelles et DSP pour le filtrage des données du 30 Août 2006 à 03h00 UTC sur le site de Toulouse. Le filtrage utilise 800 particules. De haut en bas les 2 composantes horizontales du vent, la vitesse verticale  $W$  puis la température  $T$ . . . . . 237
- 9.20 Séries temporelles et DSP pour le filtrage des données du 30 Août 2006 à 12h00 UTC sur le site de Toulouse. Le filtrage utilise 800 particules. De haut en bas les 2 composantes horizontales du vent, la vitesse verticale  $W$  puis la température  $T$ . . . . . 238
- 9.21 Séries temporelles et DSP pour le filtrage des données du 30 Août 2006 à 16h00 UTC sur le site de Toulouse. Le filtrage utilise 800 particules. De haut en bas les 2 composantes horizontales du vent, la vitesse verticale  $W$  puis la température  $T$ . . . . . 239
- 9.22 Ecart entre le vent de référence simulé et le vent estimé. Moyenne et variance sur un échantillon de 5 réalisations en fonction du nombre de particules et du niveau de bruit. . . . . 241
- 9.23 Ecart entre le vent de référence réel et le vent estimé. Moyenne et variance sur un échantillon de 5 réalisations en fonction du nombre de particules et du niveau de bruit . . . . . 242
- 9.24 Ecart entre le vent estimé et le vent simulé avec les 3 sortes de modèles. A gauche les moyennes sur un jeu de 5 séries de simulation, à droite la variance. 1- Modèle exact,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 2- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 3- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 4- Modèle exact,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 5- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 6- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{1}{4}$  . . . . . 243
- 9.25 Ecart entre le vent estimé et le vent réel avec les 3 sortes de modèles. A gauche les moyennes sur un jeu de 5 séries de simulation, à droite la variance. 1- Modèle exact,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 2- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 3- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 4- Modèle exact,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 5- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 6- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{1}{4}$  . . . . . 244
- 9.26 Comparaison entre le modèle exact et le modèle sans champ moyen, pour les écarts entre le vent estimé et les vents réel ou simulé. A gauche les moyennes sur un jeu de 5 séries de simulation, à droite la variance. 1- Modèle exact vent réel,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 2- Modèle exact vent simulé,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 3- Modèle sans champ moyen vent réel,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 4- Modèle sans champ moyen vent simulé,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 5- Modèle exact vent réel,  $\sigma = \frac{1}{5}$ , 6- Modèle exact vent simulé,  $\sigma = \frac{1}{5}$ , 7- Modèle sans champ moyen vent réel,  $\sigma = \frac{1}{5}$ , 8- Modèle sans champ moyen vent simulé, bruit  $\frac{1}{5}$ , 9- Courbe de tendance de la série  $n^\circ 1$  . . . . . 245



9.27	Séries temporelles et DSP pour le filtrage de Saint-Sardos utilisant un filtre particulaire génétique avec 500 particules . . . . .	246
9.28	Séries temporelles et DSP pour le filtrage de Saint-Sardos utilisant 1000 filtres de Kalman en interaction . . . . .	248
10.1	Calculs effectués sur l'ensemble de la période pour estimer : $\mathbb{E}(w'T')$ $\sim$ $\langle w'T' \rangle$ et $\tau \sim \sqrt{\langle u'w' \rangle^2 + \langle v'w' \rangle^2}$ . . . . .	253

# Chapitre 1

## Introduction

Modéliser la turbulence pour filtrer des mesures réelles réalisées dans l'atmosphère en utilisant des estimations probabilistes des paramètres du milieu observé est un sujet à l'intersection de 3 domaines de la science. Les sciences de l'ingénieur pour le volet sur la mesure expérimentale et le filtrage des données, la physique pour l'étude et la modélisation de la turbulence et son application à l'atmosphère, les mathématiques appliquées pour le corps théorique probabiliste permettant de poser rigoureusement les problèmes, de fonder la résolution et donner des algorithmes consistants.

Dans ce mémoire nous allons tenter de nous adresser aux 3 communautés nourrissant notre texte des acquis de chacune d'elle et plus modestement de notre travail plus spécifique sur le filtrage non-linéaire des mesures bruitées d'un fluide turbulent.

La mécanique statistique initiée par Boltzmann et Gibbs permet de passer de l'analyse dynamique des molécules d'un fluide au comportement des volumes élémentaires régi par les équations de l'hydrodynamique. Le passage s'opère par un changement d'échelle et se trouve être une conséquence de résultats fondamentaux des probabilités, le théorème de la limite centrale et le principe des grandes déviations (voir [Ellis \(1985\)](#)).

Rappelons ces résultats de mécanique statistique. Sur l'espace des phases  $E \subset \mathbb{R}^7$  on considère le vecteur d'état  $(x, p, t)$  où les positions  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$  sont dans  $\mathbb{R}^3$  ainsi que les impulsions  $p = (p_i)_{1 \leq i \leq 3}$ , la dernière dimension est donnée par

le temps. Pour le système physique décrit par son Hamiltonien  $H$  on suppose l'existence d'une fonction de distribution de probabilité  $f$ , fonction de  $x$  de  $p$  et de  $t$  et solution de l'équation de Liouville

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0 \quad (1.1)$$

où  $[H, f]$  est le crochet de Poisson de  $H$  et de  $f$ . Cette équation avec un Hamiltonien particulier correspondant aux chocs entre 2 molécules mène à l'équation de Boltzmann (voir [Méléard \(1996\)](#)). En intégrant formellement en  $p$  l'équation de Boltzmann contre une fonction invariante par collision (comme la masse, la quantité de mouvement, l'énergie interne) on déduit les équations de conservation des fluides classiques, l'équation d'Euler pour les écoulements inviscides puis introduisant de la viscosité avec une approximation du premier ordre de  $f$ , on aboutit à l'équation bien connue de Navier-Stokes, valable pour le champ de vitesse  $u$  sur un domaine  $D \in \mathbb{R}^3$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \quad (1.2)$$

où  $p$  est cette fois la force de pression qui est solution de l'équation de Poisson, sur le même domaine  $D$ ,  $\Delta p = -\frac{\partial U^i}{\partial x_j} \frac{\partial U^j}{\partial x_i}$ , écris ici en notation Einstein. On se donne alors des conditions initiales et aux bords  $\partial D$  pour compléter le jeu d'équation.

Cette équation pose des problèmes de résolution, le terme de transport  $u \nabla u$  amène des non-linéarités, un nombre de degrés de liberté infini. Elle contient intrinsèquement les régimes laminaires déterministes et les régimes turbulents chaotiques d'allure aléatoires. Pour préciser les caractéristiques des écoulements turbulents, A.N. Kolmogorov a proposé une description statistique des incréments de vitesses basée sur une analyse heuristiques des transferts d'énergies dans les cascades tourbillonnaires en 1941 ([Kolmogorov \(1941\)](#)).

Du côté des mathématiques, la représentation probabiliste des équations aux dérivées partielles est arrivée bien plus tard et repose sur les travaux de K. Itô, A.N. Kolmogorov, M. Kac et H.P. McKean. On trouvera dans [Karatzas et Shreve \(1998\)](#) les démonstrations des résultats qui suivent.

Soient  $d > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t > 0$ ,  $a, b$  et  $c$  des fonctions de  $x$  Lipschitziennes bornées avec  $a = \sigma \sigma^*$  et  $L$  l'opérateur elliptique donné par

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.3)$$

Soit le problème de Cauchy défini par l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = Lu(t, x) + c(x)u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $u_0$  une fonction bornée  $\mathcal{C}^\infty$ . L'existence, l'unicité des solutions de cette EDP et leur calcul (numérique) peuvent être obtenus par des techniques d'analyse classique mais possèdent aussi des représentations en terme de processus aléatoires.

Soit maintenant le processus de diffusion défini par l'équation différentielle stochastique (EDS) sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$

$$\begin{cases} dX_t^{x_0} = b(X_t^{x_0})dt + \sigma(X_t^{x_0})dW_t \\ X_0^{x_0} = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $W_t$  un processus de Wiener standard par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_t$ .

On sait que  $(X_t^{x_0}, \mathbb{P})$  est un processus de Feller-Markov continu, et que  $T_t$  donné pour une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  bornée par

$$T_t f(x_0) = \mathbb{E}[f(X_t^{x_0}) \exp(\int_0^t c(X_s^{x_0})ds)] = \mathbb{E}_{x_0}[f(X_t) \exp(\int_0^t c(X_s)ds)] \quad (1.6)$$

est un semi-groupe de générateur infinitésimal  $L$ . Pour terminer, on peut montrer que la formule de Feynman-Kac

$$u(t, x) = T_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t) \exp(\int_0^t c(X_s)ds)] \quad (1.7)$$

donne la solution au problème de Cauchy.

La représentation des équations aux dérivées partielles en terme de processus stochastique que l'on vient de voir dans le cas d'une diffusion est un retour de l'échelle macroscopique, l'EDP, à l'échelle microscopique, l'EDS, et permet par la simulation de l'évolution de systèmes de particules en interaction, comme les a étudié [Sznitman \(1991\)](#), de donner des solutions numériques au problème de Cauchy [1.4](#) et de représenter le semi-groupe d'évolution  $T_t$ .

Notre travail va donc se placer dans cette interface, où les équations d'écoulement d'un fluide ou bien celles venant des problèmes de filtrage vont trouver des représentations probabilistes avec lesquelles on va pouvoir piloter des systèmes de particules en interaction donnant des solutions numériques approchées répondant ainsi à l'attente de la communauté scientifique.

## 1.1 Contexte et apport du filtrage non-linéaire en mécanique des fluides

L'atmosphère dans le domaine de la turbulence, notamment dans la couche limite de surface, pose des problèmes d'observation car les phénomènes y siégeant sont rapides, de l'ordre de quelques dixièmes de seconde, et d'échelle spatiale de l'ordre du mètre. Au sol il existe pour certains paramètres (vent, température, humidité, ...) des capteurs rapides. Mais les moyens de mesures pour les phénomènes en altitude sont en revanche limités, constitués de capteurs embarqués sur des plates-formes évoluant in-situ (avion, ballon sonde ou captif), ou d'instruments de télédétection comme les radars ou les sodars.

Quels que soient les systèmes de mesures, ils posent le problème de la représentativité de la mesure qui est généralement perturbée par l'écoulement du fluide atmosphérique autour du senseur ou par l'environnement électromagnétique du capteur et il est difficile d'établir une relation entre les variables observées et les variables d'état.

L'amélioration des observations de petite échelle dans l'atmosphère passe par trois voies : un axe instrumental pour développer des capteurs peu bruités, un axe météorologique permettant une meilleure modélisation fine de la dynamique du fluide géophysique et un axe mathématique par la conception d'algorithmes de filtrage non-linéaire adaptés au problème spécifique de la mesure dans l'atmosphère et permettant à terme une assimilation des observations filtrées et des paramètres turbulents appris dans les modèles de simulation météorologique.

Le Centre National de Recherche Météorologique de Météo-France a un rôle particulier dans la recherche atmosphérique en France puisqu'il doit conduire une recherche finalisée pour répondre, à moyen ou long terme, aux besoins du service météorologique et amener une prospective amont afin de comprendre plus profondément les mécanismes en jeu dans l'atmosphère, mieux représenter les interactions entre l'atmosphère et les autres composantes de la biosphère, de l'hydrosphère et de la lithosphère (au moins dans un sens). Le but de ces recherches fondamentales ou appliquées est de faire progresser constamment les modèles de prévision du temps et du climat, afin d'assurer la protection des personnes et des biens sur le court et le long terme.

Dans ce contexte la turbulence amenant des couplages non-linéaires avec la thermodynamique des écoulements et les phénomènes microphysiques de l'atmo-

sphère prend une part de plus en plus grande dans les préoccupations de la communauté météorologique qui a une demande forte sur la production de données rapides de haute qualité.

La mesure de la turbulence s'est faite jusqu'à présent sur des pas de temps de plusieurs minutes, voire dizaines de minutes. Toute amélioration technique ou théorique permettant de produire des données caractérisants la turbulence à haute cadence sera alors un apport conséquent à ce domaine de mesure. Le filtrage non-linéaire des observations proposé ici pourra à la fois fournir des mesures rapides nettoyées des perturbations et des estimations des paramètres caractéristiques du milieu turbulent.

## 1.2 Objectifs et Innovations

Le filtrage des mesures de la turbulence, qu'elles soient fixes ou mobiles, nécessite une estimation non-linéaire qu'un filtre de Kalman classique n'est pas en capacité de réaliser. En outre le filtrage non-linéaire se fait traditionnellement avec une modélisation du signal suivi par le filtre. Pour le problème de la mesure en atmosphère, surtout si le capteur se déplace dans celle-ci, nous n'avons pas accès à de tels modèles comportementaux.

Le travail de cette thèse commence alors par la formalisation du problème de filtrage d'une mesure exécutée sur un champ de vecteur stochastique le long d'un chemin aléatoire indépendant de la réalisation du milieu. Pour la modélisation stochastique, nous allons définir un nouvel objet, l'acquisition d'un champ le long d'un chemin, en donner les premières propriétés et il pourra être appliqué de manière plus large notamment pour décrire les flots stochastiques (Lagrangiens) des EDS.

Localement un fluide peut être vu comme un milieu aléatoire dépendant de la réalisation de grandeurs moyennes de large échelle. De manière naturelle les processus aléatoires décrivant le milieu auront des termes de champs moyens ramenant l'évolution sur les moyennes de grandes échelles.

Le filtrage non-linéaire aura une solution avec des systèmes de particules en interactions par leur champ moyen. On proposera et on étudiera l'asymptotique d'algorithme de filtrage pour les processus à champ moyen dont les lois corres-

pondent à des cas particuliers que l'on peut croiser en physique ou en mécanique des fluides. On proposera alors de nouvelles démonstrations de convergence du filtrage pour les processus à champ moyen.

Les modèles d'évolution du fluide que l'on utilisera pour conduire les estimations du filtrage, pour s'adapter au processus d'acquisition le long du chemin du capteur, seront locaux et on propose de considérer des modèles Lagrangiens plutôt que des représentations probabilistes de l'EDP de Navier-Stokes. On proposera alors des méthodes d'adaptation de ces modèles. De plus nous proposerons une nouvelle méthode de fermeture par l'observation du fluide, technique nouvelle en modélisation stochastique.

De ces analyses théoriques et appliquées, nous pourrons déduire des filtres valables pour les écoulements uni, bi ou tridimensionnels que nous appliquerons à des données simulées ou réelles. Ces applications innovantes permettent un filtrage non-linéaire de haute cadence des mesures turbulentes mobiles.

Arrivés à ce point, les premiers objectifs de cette étude, sur la modélisation de la turbulence afin d'en filtrer la mesure, seront réalisés.

## 1.3 Filtrage d'observations bruitées

### 1.3.1 Filtrage linéaire des mesures atmosphériques

Décrire même succinctement le phénomène de la turbulence doit se faire avec un esprit de grande humilité car les difficultés conceptuelles sont très nombreuses et nos connaissances bien minces, en témoigne l'absence de théorie unifiant l'ensemble des points de vue. Nous n'allons alors présenter aux chapitres 2 et 3 que les idées et modèles dont nous aurons besoin ainsi que les définitions qui nous seront utiles.

Les méthodes classiques de traitement de la mesure sont basées sur le filtrage linéaire et la décomposition de la série temporelle en coefficient de Fourier. Nous verrons au chapitre 4 les différents filtres numériques et les réponses qu'ils peuvent avoir notamment sur les densités spectrales de puissance. Quoiqu'il en soit, toutes suppriment les composantes rapides pour ne garder que les structures de grandes échelles avec comme inconvénient de garder les composantes basses fréquences

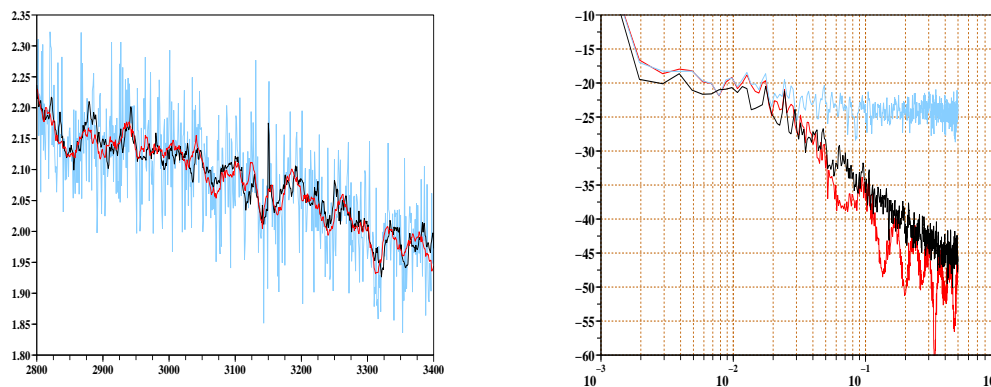


FIG. 1.1 – Séries temporelles et densités spectrales de puissance, en noir d'une composante de vent, en bleu de la composante bruitée par un bruit blanc et en rouge du signal filtré par un filtre numérique à moyenne glissante

des bruits de mesures. Ces filtres ont l'avantage d'être rapides et de se passer de toute modélisation du signal à traiter. C'est également de là que vient leur non-optimalité. L'absence de modèle ne permet pas de réaliser une séparation efficace du bruit et de l'état mesuré. Sur la figure 1.1 on trouve les séries temporelles et densités spectrales de puissance pour un exemple de vent unidimensionnel simulé et servant de référence en noir, en bleu ce vent bruité artificiellement avec un processus blanc Gaussien et en rouge le signal filtré par un filtre numérique à moyenne glissante centrée (ce filtre est alors un lisseur). On note que le signal filtré permet de suivre les grandes échelles du signal mais que les variations rapides sont gommées. Sur le spectre d'énergie, à droite de la figure 1.1, il est clair que les cascades énergétiques sont rompues au dessus de 0.05 Hz. Ce filtre ne permet pas de séparer proprement et complètement un vent turbulent d'un bruit blanc. Il faut procéder différemment avec un estimateur non-linéaire.

### 1.3.2 Filtrage non-linéaire d'un signal perturbé

On présente ici un résultat classique de filtrage pour une diffusion  $X_t$  déterminée par la solution d'une EDS observée par un processus bruité  $Y_t$ . Ce rapide survol sera complété largement au chapitre 5.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré. Pour résoudre le problème de filtrage cherchant à calculer la  $Loi(X_{[0,t]} | \mathcal{Y}_t)$ ,  $\mathcal{Y}_t$  étant la filtration engendrée par le processus d'observation, on suppose que le couple  $(X_t, Y_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  évolue



pour tout temps  $t \geq 0$  selon le système :

$$\begin{cases} dX_t &= B(t, X_t)dt + A(t, X_t)dW_t \\ dY_t &= H_t(X_t)dt + \sigma dV_t \end{cases} \quad (1.8)$$

où les  $V_t$  et  $W_t$  sont des processus de Wiener standard relativement à  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma$  est un paramètre positif. Les fonctions  $A$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ ,  $B$  et  $H$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Alors, le problème de filtrage revient à calculer pour toute  $f$  mesurable bornée,

$$\mathbb{E}(f_t((X_s)_{s \leq t})/\mathcal{Y}_t) = \frac{\mathbb{E}_0(f_t((X_s)_{s \leq t})Z_t(X, Y)/\mathcal{Y}_t)}{\mathbb{E}_0(Z_t(X, Y)/\mathcal{Y}_t)} \quad (1.9)$$

où le facteur de normalisation est

$$Z_t(X, Y) = \exp\left(\int_0^t H_s(X_s)dY_s - \int_0^t H_s^*(X_s)H_s(X_s)ds\right) \quad (1.10)$$

L'indice 0 de l'espérance indique que l'on parle du processus filtré issu de  $(X_0, Y_0)$  avec une loi de probabilité de référence, de plus  $Y_t$  est indépendant de  $X_t$  en tout temps  $t$  (voir le théorème 5.1.2).

Cette espérance est l'estimateur optimal  $\hat{\eta}_t(f) = \mathbb{E}(f(X_{[0,t]})/\mathcal{Y}_t)$  et l'égalité 1.9 est l'équation de Kallianpur-Striebel.

La mesure de probabilité  $\hat{\eta}_t$  est un semi-groupe et est solution de l'équation du filtrage non-linéaire de Kushner-Stratonovitch :

$$d\hat{\eta}_t(f) = \hat{\eta}_t(L_t(f))dt + \hat{\eta}_t((H - \hat{\eta}_t(H))^* f)(dY_t - \hat{\eta}_t(H)dt)$$

Il faut s'affranchir de ce point de départ par un changement de probabilité appliquant le théorème de Girsanov. On obtient les équations robustes du filtrage que nous présenterons au chapitre 5.

Les équations intégrales que l'on vient d'écrire ont une expression analytique dans le cas où les fonctions  $A$ ,  $B$  et  $H$  ont des formes linéaires ou localement linéarisables et les bruits de dynamique et d'observation sont Gaussiens. L'estimateur est optimal au sens du maximum de vraisemblance, et les estimées se calculent par le filtre de Kalman-Bucy. L'annexe A présente ce filtre ainsi que des extensions permettant d'étendre les résultats aux fonctions non-linéaires.

Hors de ce cas linéaire-Gaussien, l'estimateur optimal du filtrage non-linéaire est donné par une formule de Feynman-Kac, qui peut-être approchée par des systèmes de particules en interaction. Il y a alors des algorithmes permettant d'apprendre les lois du filtrage.

On va écrire rapidement ces équations, laissant au chapitre sur le filtrage la présentation complète. On se place dans le cadre de processus de dynamique et d'observation discret.

Il faut supposer que pour tout pas de temps  $n > 0$  l'équation d'observation  $Y_n = H(X_n) + \sigma V_n$  est telle que  $Y_n$  et  $H(X_n) + \sigma V_n$  ont une densité. On suppose que  $\mathbb{P}(H(x_n) + \sigma V_n \in dy_n \mid X_n = x_n) = g_n(x_n, y_n) \lambda_n(dy_n)$ . Par un abus de notation on pose  $G_n(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} g_n(x_n, y_n)$  oubliant  $y_n$ . On définit pour toute fonction  $f$  mesurable bornée, les 2 estimateurs, celui du filtrage et celui de la prédiction, de cette manière

$$\hat{\eta}_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] \quad (1.11)$$

$$\eta_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}] \quad (1.12)$$

qui s'écrivent

$$\eta_n(f_n) = \frac{\gamma_n(f_n)}{\gamma_n(1)} \quad (1.13)$$

$$\hat{\eta}_n(f_n) = \frac{\hat{\gamma}_n(f_n)}{\hat{\gamma}_n(1)} \quad (1.14)$$

avec

$$\hat{\gamma}_n(f_n) = \mathbb{E}_{\eta_0}(f_n(X_0, \dots, X_n) \prod_{p=0}^n G_p(X_0, \dots, X_p)) \quad (1.15)$$

$$\gamma_n(f_n) = \mathbb{E}_{\eta_0}(f_n(X_0, \dots, X_n) \prod_{p=0}^{n-1} G_p(X_0, \dots, X_p)) \quad (1.16)$$

L'algorithme de filtrage qui se déduit de cet ensemble d'équations utilise le noyau de Markov  $M_n$  associé à l'équation de dynamique

$$X_{n+1} = X_n + B_n(X_n)\Delta t + A_n(X_n)W_n$$

et le noyau de sélection génétique des états (qui est un choix non unique)

$$S_{n, \eta_n}(x_n, dx) = G_n(x_n) \delta_{x_n}(dx) + [1 - G_n(x_n)] \frac{G_n(x)}{\eta_n(G_n)} \eta_n(dx) \quad (1.17)$$

Ce qui donne l'algorithme du filtrage non-linéaire

$$\eta_n \xrightarrow{S_{n,\eta_n}} \hat{\eta}_n = \eta_n S_{n,\eta_n} \xrightarrow{M_{n+1}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n M_{n+1} \quad (1.18)$$

Cet algorithme a une interprétation particulière, pour un ensemble de  $N$  particules  $(X_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  ensemencé à l'étape initiale par  $X_0^i$  selon la loi  $\eta_0$ , qui possède comme les méthodes de Monte-Carlo une convergence asymptotique en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  quand le nombre de particules tend vers l'infini : pour tout instant  $n$  et  $p \geq 1$ , il existe des constantes  $C(p)$  telles que pour toute fonction mesurable bornée

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|\eta_n^N(f) - \eta_n(f)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C(p)}{\sqrt{N}} \|f\|$$

Ce sont ces techniques classiques de filtrage particulière que nous avons reprises dans notre travail, et nous avons étendu ces résultats aux filtrage des processus à champ moyen donnant alors des démonstrations de convergence nouvelles.

## 1.4 Les applications nouvelles obtenues dans ce travail

A l'instar des cas usuels, pour arriver à filtrer pleinement et sans dégrader l'énergie contenue dans les signaux à estimer, nous avons mis au point un algorithme de filtrage innovant basé sur la dynamique de particules stochastiques mises en interaction. Le filtre utilise des modèles de dynamique Lagrangienne développés par les turbulenciers pour simuler des écoulements turbulents. Notre traitement prend en compte également le processus d'acquisition pour suivre le capteur dans son déplacement aléatoire, et intègre la dynamique Lagrangienne sur des boules localisées autour du capteur. La sélection des particules est de type génétique, comme on vient de le voir, avec des branchements sur les processus historiques, ce qui correspond à un filtrage par arbres généalogiques ([Del Moral \(2003, 2004\)](#)). La présentation de ces filtres est l'objet des chapitres 8 et 9.

### 1.4.1 Filtrage de mesures unidimensionnelles

Le filtrage non-linéaire repose sur un modèle de comportement du signal à filtrer. Pour les fluides, il faut donc fournir un modèle pertinent. Dans le cas du

filtrage d'image 2D d'un champ de vitesses turbulents (voir [Cuzol \(2006\)](#)), on peut proposer comme modèle comportemental l'équation de Navier-Stokes. Dans notre cas, le fluide doit être modélisé localement autour du capteur, et nous avons avantage à prendre un modèle Lagrangien intégré autour de la position du capteur.

S.B. Pope a développé (voir [Pope \(2000\)](#)) une classe de modèles Lagrangiens utilisant les grandeurs Eulériennes du fluide afin de modéliser le comportement des suies dans les phénomènes de combustion. Ces modèles sont des équations de Langevin faites pour relâcher la vitesse Lagrangienne vers le champ moyen Eulérien. L'expression du temps Lagrangien  $T_L$  a été recherchée pour correspondre à la fois à l'équation de Navier-Stokes et aux lois statistiques de Kolmogorov pour la turbulence localement homogène. On obtient des EDS à champ moyen. Dans le cas de la turbulence isotrope en écoulement incompressible le modèle de Pope simplifié s'écrit en temps continu :

$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right)\frac{\varepsilon_t}{k_t}(V_t - \langle v \rangle) dt + \sqrt{C_0\varepsilon_t}dB_t$$

où les quantités  $\langle \cdot \rangle$  sont les moyennes Eulériennes du paramètre,  $V_t$  est la vitesse Lagrangienne,  $\nabla_x \langle p \rangle$  le gradient spatial de pression moyenne,  $k_t$  l'énergie cinétique turbulente moyenne,  $\varepsilon_t$  le taux moyen de dissipation turbulente,  $B_t$  est un processus de Wiener et enfin  $C_0$  la constante de Kolmogorov que nous expliciterons en détail aux chapitres [3](#) et [8](#).

Les modèles Lagrangiens de Pope sont des cas particuliers des équations de McKean-Vlasov qui ont largement été étudiées par exemple par S. [Méléard \(1996\)](#) et A.S. [Sznitman \(1991\)](#), mais ces EDS sont mal posées. Récemment M. Bossy, J.F. Jabir et D. Talay ( article en préparation [Bossy et al. \(2009\)](#) ) ont établi pour un modèle approché l'existence et l'unicité des solutions en trajectoire et la propriété de propagation du chaos qui permet d'affirmer qu'un système particulaire fini se comporte comme le système réel de taille infinie. On pourra aussi mettre à profit la lecture de la thèse de doctorat de J.F Jabir ([Jabir \(2008\)](#)) portant sur les modèles stochastiques Lagrangiens de type McKean-Vlasov conditionnels.

Notre algorithme d'estimation a d'abord été testé sur des mesures simulées en dimension 1. Pour bruite ce signal de référence nous avons pris un bruit blanc Gaussien de variance connue. Notons que l'aspect gaussien du bruit n'est pas nécessaire au fonctionnement du filtre, il pourrait avoir une loi de probabilité quelconque. Notre filtre utilise alors 100 particules pour ses estimations. Pour intégrer la dynamique Lagrangienne et suivre le processus d'acquisition une étape de

conditionnement à une boule centrée sur la position du capteur a été rajoutée. On verra le comportement de ce conditionnement au chapitre 7. L'étape d'exploration de l'espace des phases utilise pour la vitesse du fluide  $V_t$  le modèle de Pope, mais pour coupler le système d'acquisition à l'observation, le processus de Markov a été conditionné au processus d'observation. Des fermetures de l'équation de Pope par l'observation ont ainsi pu être réalisées.

On voit sur la figure (1.2) en noir le signal de référence à retrouver, en bleu clair le signal bruité, et en rouge les valeurs estimées. La différence avec le filtre numérique à moyenne mobile est flagrant, on peut remarquer que les structures de grandes échelles ont été parfaitement retrouvées, que le bruit artificiel a été éliminé et sur le spectre de puissance que la structure énergétique du signal original a été retrouvée, suivant la pente en  $-5/3$  de la loi de Kolmogorov pour la turbulence (voir chapitre 2)

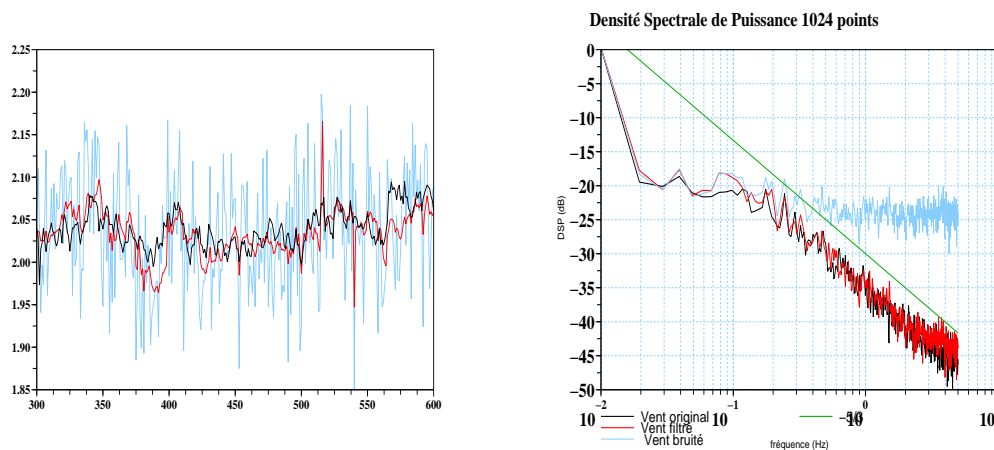


FIG. 1.2 – Filtrage d'un vent 1D simulé filtré par algorithme particulière conditionnel avec 100 particules. En cyan le signal bruité, en noir le signal de référence et en rouge le vent estimé. A gauche la série temporelle, à droite la densité spectrale de puissance

Les mêmes essais ont été réalisés sur des composantes de vent réellement mesurées puis bruités artificiellement. Ces résultats sont montrés dans le chapitre 9

### 1.4.2 Cas de mesures atmosphériques 3D réelles

L'étape suivante a été plus délicate et a mérité d'y consacrer plus de temps, en passant au filtrage du vent en dimension 3. L'atmosphère est un fluide pesant (les éléments fluides subissent l'attraction gravitationnelle de la terre) avec une certaine flottabilité (les éléments fluides sont en suspension et subissent la poussée d'Archimède), il faut alors changer de modèle de comportement, et nous avons choisi un modèle de turbulence stratifiée où l'échelle verticale est couplée par la flottaison au travers de terme de gradient verticaux de vitesse et surtout de température. On doit alors adjoindre au système une équation d'évolution sur cette température qui est alors mesurée. On verra que même en 3D, le filtre est opérationnel mais comporte une faiblesse sur cette température qui est moins bien perçue.

Pour un fluide pesant et stratifié comme dans l'atmosphère, il faut adapter le modèle de Pope et on s'inspira du modèle de dispersion turbulente de [Das et Durbin \(2005\)](#). Le modèle que l'on propose est couplé sur la verticale et utilise la température locale du fluide. Il a pour expression continue a priori :

$$\left\{ \begin{array}{l} dV_{h,t} = -\nabla_h \langle p \rangle .dt - \frac{C_1 \varepsilon_t}{2 k_t} (V_{h,t} - \langle V \rangle_{h,t}) .dt \\ \quad + (C_{2\theta} - 1) .(W_t - \langle W \rangle_t) . \frac{d\langle V \rangle_{h,t}}{dz} .dt + (C_0 . \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h} \\ \\ dW_t = d\langle W \rangle_t - \frac{C_1 \varepsilon_t}{2 k_t} (W_t - \langle W \rangle_t) .dt \\ \quad + (1 - C_{5\theta}) . \beta . g . (\theta_t - \langle \theta \rangle_t) .dt + (C_0 . \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W \\ \\ d\theta_t = d\langle \theta \rangle_t - (C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (\theta_t - \langle \theta \rangle_t) .dt \\ \quad - (W_t - \langle W \rangle_t) . \frac{d\langle \theta \rangle_t}{dz} .dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta \end{array} \right.$$

où  $V_{h,t}$  est la vitesse 2D horizontale,  $W$  la vitesse verticale,  $\theta$  la température, comme plus haut les autres paramètres locaux de la turbulence seront détaillés au chapitre 8.

Usant de la même technique, notamment avec les localisations et le conditionnement à l'observation, le signal est filtré et nous approchons les grandeurs cachées de l'observation, comme les gradients verticaux, ou le coefficient de flottabilité, par des estimées sur le système de particules. C'est au cours de l'étape de sélection en retenant les particules les mieux adaptées que l'on garde celles qui présentent les bonnes caractéristiques dynamiques. Alors l'estimé de ces grandeurs

Eulériennes cachées sur le système de particules prend un sens physique. L'application se fait sur des mesures réelles du vent tridimensionnel et de température en un point. Nous avons perturbé le signal de référence par un bruit gaussien dont la variance augmente avec le niveau de turbulence. Sur la figure 1.3 nous retrouvons les signaux de référence en noir, les signaux bruités en bleu ciel et filtrés en rouge.

Comme dans le cas 1D, il existe un bon accord entre les signaux de référence et les signaux filtrés. On peut alors considérer que l'algorithme est utilisable pour filtrer les mesures turbulentes. L'un des avantages de la technique est de permettre la restitution a posteriori des grandeurs cachées (gradients divers, taux de dissipation, coefficient de flottabilité, etc) qui ont été calculées pour ajuster le modèle de dynamique. Sur la figure 1.4 on peut examiner, par exemple, le taux de dissipation correspondant aux mesures filtrées précédemment ainsi que la pseudo-trajectoire d'acquisition du capteur dans le fluide considéré là comme stationnaire (turbulence figée).

Dans ces exemples que l'on confronte, qui à des données simulées, qui à des données réelles, nous pouvons expérimentalement effectuer des calculs d'erreurs en moyenne absolue ou en moyenne quadratique. Les résultats sont présentés et commentés dans le chapitre 9. Ces erreurs montrent un comportement attendu du filtre avec une décroissance par un nombre de particules qui augmente, ou un bruit d'observation qui diminue. Nous pouvons aussi voir l'importance d'une bonne modélisation de la dynamique en mesurant l'impact de modèles (volontairement) dégradés.

Ces erreurs fournies par les expériences numériques peuvent être également étudiées mathématiquement en analysant le filtrage de processus à champ moyen.

## 1.5 Les nouveaux outils théoriques développés

Dans cette introduction, pour comparer au filtrage linéaire actuellement en vigueur dans le traitement des signaux atmosphériques, nous avons affiché en premier lieu les résultats numériques et graphiques de nos filtres. Cela nous permet de motiver les outils mathématiques nouveaux à mettre en place pour arriver à ces productions. Dans ce mémoire l'exposé du cadre théorique ne se fera pas dans

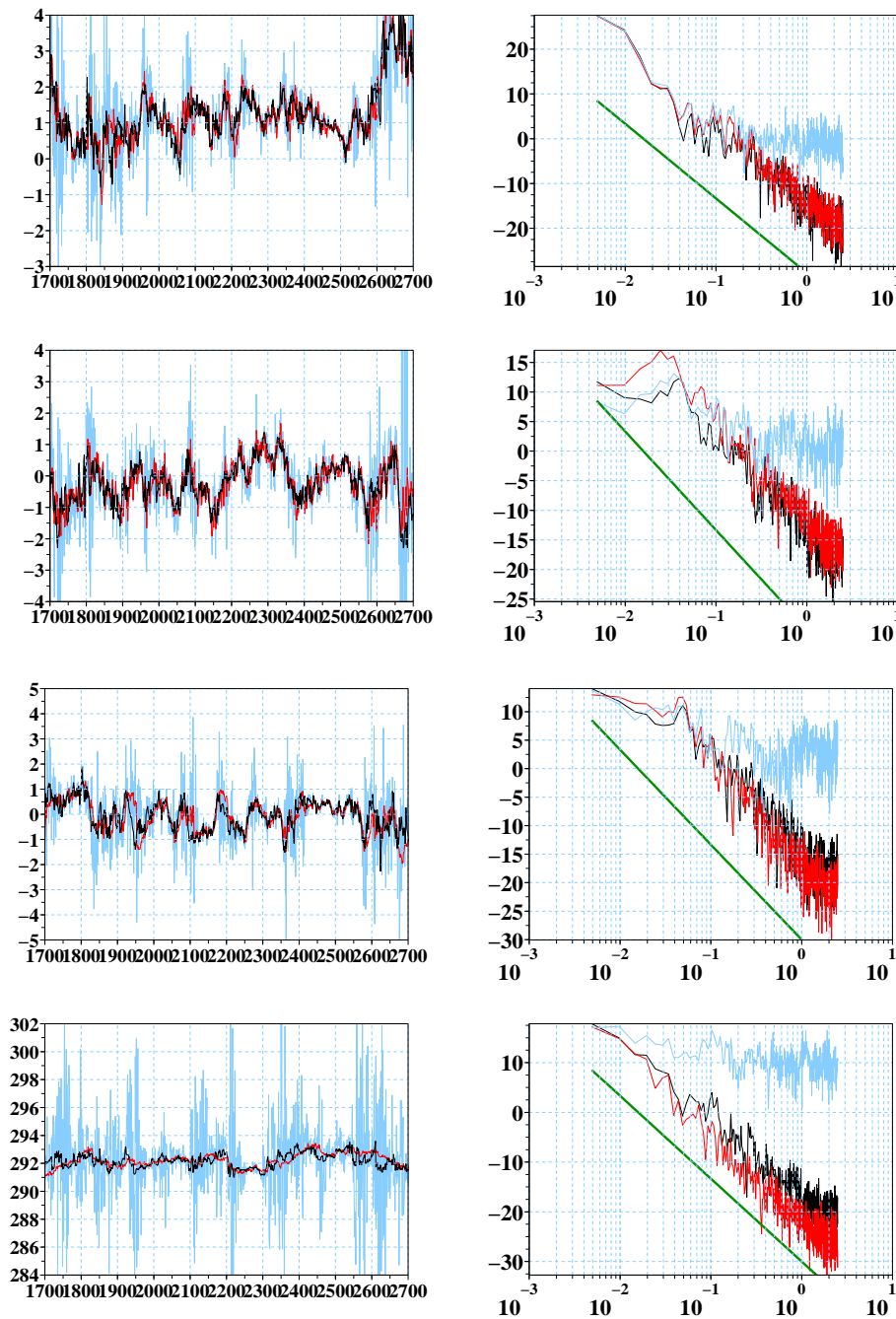


FIG. 1.3 – Filtrage d'un vent réel 3D et de la température par algorithme particulaire conditionnel avec 500 particules. En pointillé bleu les signaux bruités, en noir ceux de référence et en rouge les valeurs estimées par l'algorithme. En haut les composantes horizontales du vent, en bas, la vitesse verticale et la température



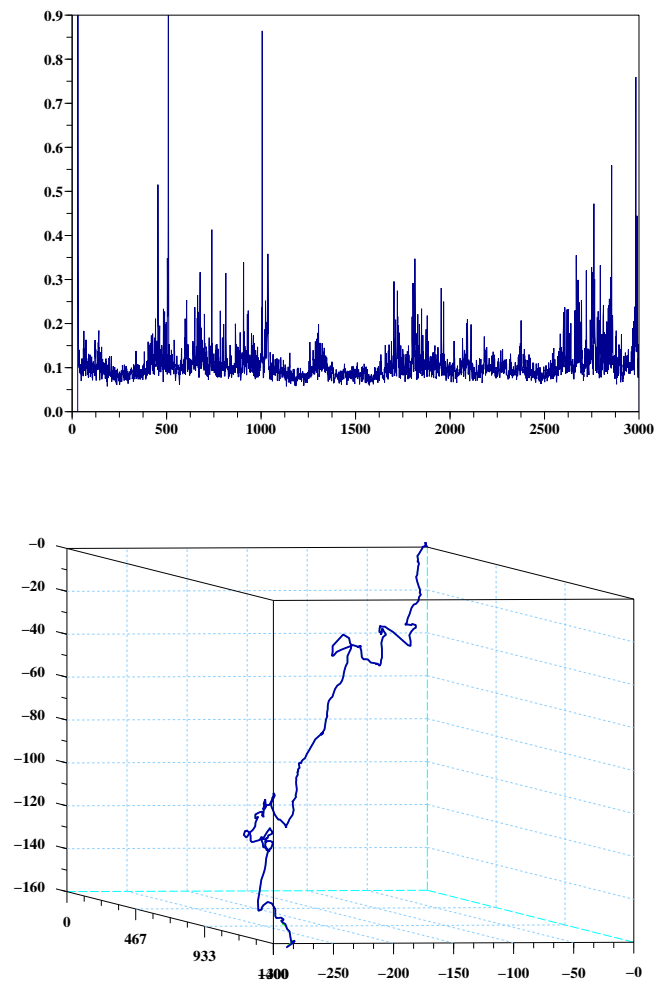


FIG. 1.4 – Série de taux de dissipation estimé en haut. Pseudo-trajectoire d’acquisition en bas

cet ordre avec :

1. au chapitre 6, les algorithmes de filtrage des processus à champ moyen avec des démonstrations de convergence.
2. au chapitre 7, la définition et l'étude des processus d'acquisition d'un champ de vecteurs le long d'un chemin aléatoire.

Le chapitre 8 donnera les algorithmes des filtres particulières pour les mesures d'un fluide turbulent qui ne seront que la combinaison de ces 2 techniques.

### 1.5.1 Filtrages non-linéaires de processus à champ moyen et leur convergence

On s'intéresse à chaque pas de temps  $n \geq 0$  au filtrage de processus dont la dynamique est dépendante d'une loi de probabilité  $\pi_n$ , connue ou non. L'algorithme de filtrage aura alors 2 fonctions, apprendre les lois du filtrage et apprendre la loi du champ moyen.

Le système d'équations servant au filtrage s'écrit :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + b(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \end{cases} \quad (1.19)$$

On montrera au chapitre 6 différents algorithmes selon que la loi  $\pi_n$  est connue ou pas et avec plusieurs méthodes pour apprendre cette mesure selon qu'elle est indépendante du filtrage (loi a priori), qu'elle est la loi du prédicteur  $\eta_n$  ou qu'elle est la loi du filtre  $\hat{\eta}_n$ . On s'intéressera également au cas où le champ moyen est conditionné à la réalisation d'un processus de commande.

On peut rapidement esquisser ces algorithmes dans trois cas typiques.

Tout d'abord plaçons-nous dans la situation d'une loi de champ moyen a priori et  $\pi_n$  est à apprendre. Pour se faire, il est nécessaire d'utiliser d'un système de particules auxiliaire indépendant du filtrage. La dynamique de ce système reproduit ainsi l'évolution de  $\pi_n$ .

Pour préciser les choses, on suppose que pour tout instant  $n \geq 0$ , le couple

dynamique/observation  $(X_n, Y_n)$  suit le système :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + b(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $\pi_n$  est la loi de  $X_n$ . On suppose que la fonction  $b$  est de la forme

$$b(X_n, \pi_n) = A(X_n) + \int B(X_n, x)\pi_n(dx)$$

où  $B$  est linéaire en sa seconde variable et  $K$ -Lipschitzienne bornée et  $A_n$  est mesurable bornée.

Pour apprendre  $\pi_n$ , on forme un second système de particules  $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq d}$ , avec  $d > 0$ . Chacune des particules  $Z_n^i$  évolue en interagissant avec les autres, sans subir de sélection par le filtre

$$Z_{n+1}^i = Z_n^i + b(Z_n^i, \pi_n^N)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X$$

où  $\pi_n^N$  est la loi empirique approchée par les  $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq d}$

Une fois la loi  $\pi_n$  approchée, le filtrage est classique et pour tout  $n \leq 0$  et tout  $p \leq 1$ , il existe des constantes  $C_n(p)$  et  $C'_n(p)$  telles que

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n(p)}{\sqrt{d}} \right] I(\mathcal{H})$$

où  $I(\mathcal{H})$  est l'entropie intégrale sur une sous-classe de fonctions que l'on précisera dans le chapitre 6. On rappelle que la semi-norme de Zolotarev sur la famille de fonctions  $\mathcal{H}$  pour 2 mesures  $\eta$  et  $\eta'$  est définie par

$$\|\eta - \eta'\|_{\mathcal{H}} = \sup\{|\eta(h) - \eta'(h)| \text{ tel que } h \in \mathcal{H}\}$$

Autre type d'algorithme, pour se rapprocher du filtre utilisé pour débruiter les mesures issues d'un champ turbulent, considérons la loi de champ moyen donnée par la loi du filtre lui-même  $\hat{\eta}_n = \text{Loi}(X_n | Y_0 \dots Y_n)$ .

Le système servant au filtrage n'est modifié que pour l'équation de dynamique qui s'écrit  $X_{n+1} = X_n + b(X_n, \hat{\eta}_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X$ .

Pour estimer le champ moyen et les lois du filtrage cette fois un seul système de  $N$  particules est nécessaire. L'algorithme de filtrage est simple et l'estimée

d'erreur pour tout instant  $n \geq 0$  est directe et assure pour tout  $p \leq 1$ , l'existence de constantes  $C_n(p)$  telles que

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H})$$

Le couplage des systèmes d'acquisition que l'on va présenter dans la section suivante nous ramènera dans cette situation. Si l'on n'avait pu l'effectuer on se serait trouvé dans le cas plus délicat qui vient, avec pour tout  $n \geq 0$ , un processus de dynamique  $X_n^2$  commandé par la réalisation du processus  $X_n^1$  notamment au travers du champ moyen. On définit alors la mesure de probabilité  $\theta_n = \text{Loi}(X_n^2 \mid X_0^1, \dots, X_n^1)$ .

L'équation de dynamique est pour tout instant  $n \geq 0$

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + b(X_n^1, X_n^2, \theta_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X$$

et on n'observe que le processus  $X_n^2$  par l'équation de transfert

$$Y_n = h(X_n^2) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y$$

Avec ce système le problème du filtrage consiste à trouver la  $\text{Loi}(X_n^2 \mid Y_0 \dots Y_n)$ .

Sans rien changer au problème, on va définir par  $B_n$  la variable aléatoire  $(X_n^1, \theta_n)$ , l'équation de dynamique est alors  $X_{n+1}^2 = X_n^2 + b(X_n^2, B_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X$

A la  $n$ -ième itération, l'algorithme que l'on propose démarre par le tirage au hasard selon une loi fixée  $\rho_n(dx)$  que l'on espère proche de  $\mathbb{P}^{X_n^1}$  de  $M$  commandes  $(X_n^{1,i})_{1 \leq i \leq M}$ .

Pour chaque  $1 \leq i \leq M$ , on fait évoluer a priori à chaque pas de temps  $M$  systèmes de particules auxiliaires  $Z^{i,k}$  avec  $1 \leq k \leq d$  :

$$Z_{n+1}^{i,k} = Z_n^{i,k} + b(X_n^{1,i}, Z_n^{i,k}, \theta_n^{i,d})\Delta t + \sigma_n^X \Delta W_{n+1}^X \quad (1.21)$$

Ces systèmes auxiliaires permettent d'approcher la loi de champ moyen conditionnée par la réalisation de  $X_n^{1,i}$ . On note cette loi empirique  $\theta_n^{i,d}$ . Le tirage de  $X_n^{1,i}$  et leur système de particules associés échantillonnent quant à eux la loi de  $B_n$  en  $(B_n^{i,d})_{1 \leq i \leq M}$ .

On tire alors parmi ces  $M$  échantillons,  $N$  milieux selon une loi uniforme pour retenir les échantillons notés  $B_n^{j,N}$ ,  $1 \leq j \leq N$

Utilisant  $N$  particules  $(X_n^{2,j})_{1 \leq j \leq N}$ , en supposant par hypothèse que la fonction  $b$  est Lipschitzienne bornée avec une forme que l'on explicitera au chapitre 6, on résout le problème de filtrage de manière standard maintenant en utilisant pour l'étape de mutation l'équation de dynamique approchée :

$$X_{n+1}^{2,j} = X_n^{2,j} + b(X_n^{2,j}, B_n^{j,N})\Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^{X,j}$$

Cet algorithme particulière permet d'avoir pour tout instant  $n \leq 0$  et pour tout  $p \leq 1$ , un contrôle des erreurs de l'approximation et l'existence de constantes  $C_n^N(p)$ ,  $C_n^d(p)$  et  $C_n^M(p)$  telles que

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \frac{C_n^N(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C_n^d(p)}{\sqrt{d}} + \frac{C_n^M(p)}{\sqrt{M}} \right] I(\mathcal{H})$$

Ces trois exemples montrent le type de résultats auxquels on doit s'attendre pour le filtrage de processus à champ moyen. Les algorithmes sont nouveaux et sont plus ou moins lourds en fonction du niveau d'information dont on dispose pour la loi du champ moyen et les démonstrations des résultats de convergence complètent notre apport.

### 1.5.2 Processus d'acquisition d'un champ aléatoire multidimensionnel

Le filtrage que l'on vient d'évoquer demande une modélisation stochastique du signal à poursuivre. Mais un tel modèle n'existe pas forcément en particulier pour un fluide présentant un écoulement bi ou tridimensionnel. Cependant on dispose de représentations des champs de vitesses Eulériens de grandes échelles ou de modèles Lagrangiens possédant une dynamique plus locale. En tous les cas, aucune ne propose de solution pour modéliser le signal que prendrait un capteur mobile dans l'écoulement. Pour y parvenir, nous devons d'abord définir une quantité nouvelle, l'acquisition d'un champ multidimensionnel le long d'un chemin aléatoire.

Cette acquisition est une notion assez générale pouvant servir en filtrage mais aussi en modélisation ponctuelle des champs aléatoires.

Soit  $E \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  un espace de points muni de la tribu  $\mathcal{E}$  et  $E' \subset \mathbb{R}^{d'}$ ,  $d' \in \mathbb{N}^*$  l'espace des phases muni de la tribu  $\mathcal{E}'$ . On se donne également  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un

espace de probabilité filtré complet. Soient  $T < \infty$  un réel,  $x \in E$ ,  $X_t$  un processus à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et  $X'_{t,x}$  un champ de vecteurs de  $(E', \mathcal{E}')$ . On appellera le couple d'applications  $\mathcal{F}_t$ -mesurables  $(X_t, X'_{t,x})$  un système d'acquisition du champ de vecteur aléatoire,  $X_t$  est appelé le chemin du processus d'acquisition, la famille  $X'_{t,x}$  est le champ d'acquisition et pour terminer le processus  $A_t \stackrel{\text{def}}{=} X'_{t,X_t}$  est appelé le processus d'acquisition de  $X'_{t,x}$  le long de  $X_t$ .

Nous pouvons donner un exemple touchant au fluide en prenant le champ  $U_{t,x}$  de vitesses Eulériennes du fluide aléatoire et en considérant  $X_t^{x_0}$  le flot stochastique partant au temps initial d'une position  $x_0 \in E$ . La vitesse Lagrangienne d'un élément de fluide  $V_t = U_{t,X_t^{x_0}}$  est alors une acquisition.

On s'intéressera à l'estimation de l'espérance

$$\mathbb{E}(f(X_t, A_t) | X_t) = \int_{E'} f(X_t, a) p^{A_t | X_t}(a | X_t) da$$

On peut noter que, voir le paragraphe 7.1.2, l'observation  $Y_t$  de la quantité  $X_t$  est un système d'acquisition du champ généré par la fonction d'observation  $H$ . Le problème de filtrage est alors symétrique à celui de l'acquisition.

Pour appliquer cette notion au problème de filtrage, on va coupler 2 systèmes d'acquisition, le premier correspond à une acquisition Lagrangienne partant du point  $x_0 : (X_n^{x_0}, X'_{n, X_n^{x_0}}) = (X_n, X'_n)$ , l'autre est le relevé de l'acquisition Lagrangienne le long d'un chemin indépendant du milieu  $Z_n : (Z_n, A_n = X'_{n, Z_n})$ . On se donne des boules suivant le chemin d'acquisition  $B_n^\varepsilon(Z_n) = \{x \in E : |x - Z_n| \leq \varepsilon_n\}$  et on demande d'estimer les 2 mesures de probabilités, telles que pour toute fonction test  $f$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_n(f) &= \mathbb{E}(f(X_n, X'_n) | X_0 \in B_0^\varepsilon(Z_0), \dots, X_n \in B_n^\varepsilon(Z_n)) \text{ et} \\ \chi_n(f) &= \mathbb{E}(f(X_n, X'_n) | X_0 \in B_0^\varepsilon(Z_0), \dots, X_{n-1} \in B_{n-1}^\varepsilon(Z_{n-1})) \end{aligned}$$

Ces 2 mesures ont une structure de semi-groupe de Feynman-Kac et

$$\hat{\chi}_n(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_n, X'_n) \prod_{p=0}^n \mathbb{1}_{B_p^\varepsilon(Z_p)}(X_p))}{\mathbb{E}(\prod_{p=0}^n \mathbb{1}_{B_p^\varepsilon(Z_p)}(X_p))} \quad (1.22)$$

$$\chi_n(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_n, X'_n) \prod_{p=0}^{n-1} \mathbb{1}_{B_p^\varepsilon(Z_p)}(X_p))}{\mathbb{E}(\prod_{p=0}^{n-1} \mathbb{1}_{B_p^\varepsilon(Z_p)}(X_p))} \quad (1.23)$$

La figure 1.5 résume ce que montre le chapitre 7, on dispose d'un algorithme

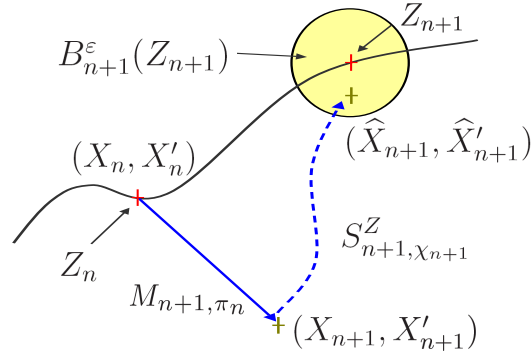


FIG. 1.5 – Schéma d'évolution discrète du processus d'acquisition pour une dynamique Lagrangienne

d'estimation itératif de  $\chi_n$  et  $\hat{\chi}_n$  avec le schéma

$$\hat{\chi}_n \xrightarrow{M_{n+1, \pi_n}} \chi_{n+1} \xrightarrow{S_{n+1, \chi_{n+1}}^Z} \hat{\chi}_{n+1}$$

qui correspond à des étapes de mutation-sélection des états où l'on a posé

$$M_{n+1, \pi_n}((x, x'), d(z, z')) = \mathbb{P}((X_{n+1}, X'_{n+1}) \in d(z, z') | (X_n, X'_n) = (x, x'))$$

et

$$\begin{aligned} & S_{n+1, \chi_{n+1}}^Z((x, x'), d(y, y')) \\ &= \mathbb{1}_{B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E'}(x, x') \delta_{(x, x')} (d(y, y')) \\ &+ \left[ 1 - \mathbb{1}_{B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E'}(x, x') \right] \frac{\mathbb{1}_{B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E'}(y, y') \chi_{n+1}(d(y, y'))}{\chi_{n+1}(B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E')} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ce processus de prédiction/correction du flot discret nous ouvre alors la possibilité de réaliser des estimations sur un fluide turbulent par un filtrage stochastique, mais il conviendra d'ajouter un couplage supplémentaire avec le système d'observation. Ce dernier couplage conditionne le modèle à l'observation et permettra les fermetures du modèle Lagrangien.

Le champ d'application du flot discret d'acquisition est plus large que le seul filtrage. En effet en modélisation d'écoulement sur grille de Gauss, en utilisant une modélisation sous-maille Lagrangienne et des chemins d'acquisition stationnaires, son utilisation rend possible la restitution sur ces points de grille de l'ensemble des moments de paramètres du fluide. L'évolution Lagrangienne se fait selon le modèle de transition et dans un second temps on conditionne au point de grille les particules permettant ainsi d'échantillonner les fonctions de distribution de probabilité.

## 1.6 Organisation du mémoire

Pour détailler ce que l'on vient de présenter dans l'introduction et compléter certains points, nous avons scindé ce manuscrit en 3 parties. La première composée de 3 chapitres est une revue (partielle, forcément) des connaissances sur l'étude de la turbulence et sa modélisation mathématique au chapitre 2, un exposé des modèles Lagrangiens au chapitre 3 et un état de l'art en mesures et traitement du signal en Micro-Météorologie donné chapitre 4. La seconde partie plus mathématique a trait au filtrage avec au chapitre 5 un rappel de la théorie du filtrage non-linéaire et au chapitre 6 le détail de nos travaux sur le filtrage de processus à champ moyen. La dernière partie est plus tournée vers l'ingénierie stochastique avec la présentation et l'étude des processus d'acquisition au chapitre 7, leur application au chapitre 8 dans le cadre du problème de filtrage de la mesure sur un champ aléatoire le long d'un chemin en prenant le cas spécifique des fluides. Le chapitre 9 concerne la partie numérique de notre travail avec le filtrage de données bruitées simulées ou réelles pour des écoulements uni, bi ou tridimensionnels. Ce chapitre se conclut par un premier travail sur les estimées d'erreur approchées numériquement. Dans la conclusion de ce mémoire, chapitre 10, on donnera les perspectives maintenant attendues de ce mémoire de thèse.



# Première partie

## Présentation probabiliste de la mécanique des fluides

# Chapitre 2

## Introduction à l'étude de la turbulence

Intuitivement la notion de turbulence est aisée à comprendre, mais difficile à présenter rigoureusement. En effet, pour un même écoulement on peut rencontrer un état ordonné, plutôt linéaire, reproductible, semblant être un système dynamique déterministe, on nomme cet état le régime laminaire, et par moment ou localement dans un fluide on peut avoir un système sans ordre apparent, très tourbillonnaire, d'allure aléatoire et d'un comportement énergétique tout différent, le régime turbulent. Comme le font remarquer de nombreux physiciens, le vrai problème posé par la turbulence ne tient pas dans sa description par telle ou telle méthode mais dans le sentiment que l'on n'arrive pas à poser la bonne question qui permettrait dans sa réponse de comprendre son émergence et de prévoir son évolution.

Les deux états dont on vient de parler sont régis par le même système d'équations, dit de Navier-Stokes, et pourtant toutes les caractéristiques dynamiques diffèrent entre le régime laminaire et le régime turbulent. Il est alors difficile de décrire 'proprement' le phénomène de turbulence avec une limite précise du domaine d'application et avec des équations spécifiques. Qui plus est, les lois de la mécanique semblent être rompues par la turbulence mais se trouvent être restaurées par les statistiques des mouvements du fluide. Cette remarque constitue la première hypothèse de Kolmogorov dans ces premiers travaux pour décrire le phénomène ([Frisch, 1995](#), p74). Nous en reparlerons ci-après.

Si les contours du domaine de la turbulence paraissent flous, on peut néanmoins en dresser des caractéristiques qui permettent de classer les écoulements turbulents en différentes familles (Chassaing, 2000, p7) :

- Existence d'échelles spatiales spécifiques.
- Comportement aléatoire.
- Spectres d'énergie caractéristiques.
- Structure bi ou tridimensionnelle des écoulements.
- Phénomènes intermittents.
- Cinématique Rotationnelle.
- Dynamique non-linéaire.
- Energétique Dissipative.

Ce sont ces différents aspects que l'on va balayer dans le paragraphe suivant consacré à la présentation de la turbulence.

## 2.1 Présentation de la turbulence

Parler de la turbulence de manière exhaustive nécessiterait un texte d'une longueur hors de propos ici. Nous allons juste exposer les idées-forces présentes dans une vision moderne de la turbulence en essayant de porter une ligne directrice qui tend à montrer l'intérêt des méthodes probabilistes dans l'étude de ce phénomène.

Evoquer ainsi l'intérêt de l'aléatoire touche de suite à un sujet sensible pour les physiciens. En effet la dynamique des fluides tout comme son équation phare, l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Navier-Stokes, sont tout à fait déterministes. Mais dans le phénomène de turbulence, qui est contenu dans l'EDP de Navier-Stokes, on peut voir, selon l'école à laquelle on appartient, soit la manifestation d'un nombre infini de degrés de liberté dans l'espace des phases, soit la présence d'un attracteur étrange d'un système dynamique non-linéaire dans son espace des phases. Dans les deux cas, cela expliquerait l'hypersensibilité aux conditions limites ou initiales et/ou structures de petites échelles dont font montre les fluides dans certains écoulements. C'est avec cette idée, que l'on gagne à utiliser une formulation probabiliste du problème d'écoulement d'un fluide. En effet on peut à loisir placer l'aléa soit dans les conditions initiales, soit dans l'EDP de

résolution en lui enjoignant un bruit simulant l'erreur due aux petites structures.

Commençons par dresser un panorama des concepts classiques. Toute introduction à la turbulence (par exemple lire [Falkovich \(2006\)](#)) commence par un rappel de cette grandeur caractéristique qu'est le nombre de Reynolds. Nous ne dérogeons pas à cette règle. Le nombre de Reynolds  $Re$  est défini par  $Re = \frac{L.V}{\mu}$  où  $L$  est la longueur caractéristique de l'écoulement (celle d'un objet présent dans le flot par exemple),  $V$  sa vitesse, et  $\mu$  le coefficient de viscosité cinématique. Ce nombre  $Re$  est important car de ses valeurs dépendent les caractéristiques de l'écoulement, laminaire ( $Re$  inférieur à une valeur critique) ou non, et niveau de turbulence (d'autant plus marquée que le nombre de Reynolds augmente) et avec l'intensité des intermittences (signaux transitoires rapides).

Ce nombre peut se lire comme le rapport entre le transport moyen du fluide et le frottement moyen dû à la viscosité. On considère que la turbulence apparaît au delà d'un seuil d'instabilité caractérisé par un nombre de Reynolds que l'on note  $Re_l$ . Pour des nombres de Reynolds inférieurs à  $Re_l$  les non-linéarités sont négligeables et l'écoulement est considéré comme laminaire. Au delà de ce Reynolds critique les symétries mathématiques de l'équation de Navier-Stokes sont rompues et l'on se place dans le domaine turbulent. En général ce nombre limite est autour de  $Re_l = 100$ .

Pour se fixer des ordres de grandeurs, dans les écoulements atmosphériques turbulents, les nombres de Reynolds peuvent atteindre  $10^9$  alors que dans des expériences numériques on peut se trouver limité à  $10^5$  et selon les capacités de calcul se contraindre à des Reynolds de quelques centaines. Dans les grandes souffleries, il est possible de produire des écoulements turbulents jusqu'à des nombres de Reynolds de  $10^6$ , ce qui permet de représenter finement les écoulements aérodynamiques.

Représenté par son nombre de Reynolds (voir [Favre et al. \(1976\)](#)), on qualifie l'écoulement en fonction de la taille des phénomènes prépondérants. Si ce sont les grandes structures qui apportent l'énergie, on dit que l'on est dans le domaine incrémental, a contrario si ce sont les effets de petites échelles qui dissipent l'énergie on parle de domaine dissipatif. Entre les deux, se place le domaine inertiel dans lequel se font les transferts d'énergie et autres cascades. C'est le domaine par excellence pour étudier la turbulence. Ce sera celui de notre travail.

On le sait, la vitesse d'un objet dépend du point de vue. En mécanique, les vitesses sont soit Eulériennes, soit Lagrangiennes. Au chapitre 7 nous allons lier ces 2 points de vue considérant la vitesse Lagrangienne comme l'acquisition du champ Eulérien le long du flot. L'acquisition d'un champ multidimensionnel est une notion que l'on introduira alors dans ce chapitre et pour laquelle on précisera le comportement dans le cas d'une acquisition discrète. Pour une description plus physique on peut lire Pope (2000). Disons simplement Eulérien quand l'observateur est fixe par rapport au fluide (vitesse du fluide en un point fixe), et Lagrangien quand il est porté par une particule fluide (vitesse du fluide en un point mobile).

De manière heuristique, le point de vue Lagrangien correspond pour chaque instant  $t$ , à la donnée du couple position/vitesse :  $(X_t, V_t)$  et on cherche des modèles d'évolution du type :

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = A_t(X_t, V_t, \eta_t) dt + B_t(X_t, V_t, \eta_t) dM_t \end{cases}$$

où  $M_t$  est un processus aléatoire,  $\eta_t$  une loi donnée,  $A_t$  et  $B_t$  sont des opérateurs supposés non-linéaires.

Le cas Eulérien est différent, il correspond à la donnée d'un champ de vitesse  $U_{t,x}$  pour chaque point  $x$  et pour chaque instant  $t$ . Les équations d'évolution correspondantes seront alors des EDP comme l'est l'équation de Navier-Stokes.

On peut dire que les vitesses Eulériennes sont plus souvent associées à des descriptions macroscopiques alors que les vitesses Lagrangiennes sont plutôt réservées aux descriptions microscopiques attachées à la dynamique particulaire.

Venons-en à l'équation de Navier-Stokes. Elle décrit, pour  $t \geq 0$ , l'évolution d'un champ de vitesses Eulériennes  $U_{t,x}$  d'un fluide dans un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d = 1..3$ , et des conditions initiales  $U_{0,x} = U_0(x)$  et des conditions aux bords que l'on suppose ici de Dirichlet  $U_{t,x} = f(t, x)$  sur  $\partial\mathcal{D}$ , où  $f$  est une fonction définie à chaque instant sur les points du bord :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \nabla_x \right) \cdot U_{t,x} = -\frac{1}{\rho} \nabla_x p_{t,x} + \mu \cdot \Delta U_{t,x} & \text{dans le domaine } \mathcal{D} \\ U_{t,x} = f(t, x) & \text{sur } \partial \mathcal{D} \\ U_{0,x} = U_0(x) & \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Pour un fluide incompressible, on rajoute la condition de divergence nulle du champ Eulérien  $\operatorname{div}(U_{t,x}) = 0$  dans  $\mathcal{D}$ .

Le terme de pression  $p_{t,x}$  est donné par une équation de Poisson en résolvant :

$$\Delta p_{t,x} = -\frac{\partial U_{t,x}^i}{\partial x_j} \frac{\partial U_{t,x}^j}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

où  $1 \leq i \leq d$  et  $1 \leq j \leq d$ , avec  $d$  la dimension de l'écoulement, équation que l'on complète de conditions aux bords.

Dès à présent et pour le reste de ce manuscrit, nous allons nous placer dans le cas d'une densité volumique  $\rho$  constante et égale à 1. S'il n'en était pas ainsi, il nous faudrait adjoindre à l'équation de Navier-Stokes une équation dite de continuité décrivant l'évolution de la masse et par là de la densité  $\rho$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U_{t,x}) = 0 \quad (2.3)$$

L'équation de Navier-Stokes (NSE) est d'allure simple, et permet une modélisation 'facile', mais elle recèle bien des difficultés mathématiques. En effet en dimension 3, il y a une compétition entre le terme de diffusion linéaire  $\mu \cdot \Delta U_{t,x}$ , et le terme de non-linéarité  $(U_{t,x} \nabla_x) U_{t,x}$ , qui rend délicat le choix d'un espace fonctionnel adapté, et de ce fait il n'y a aucun résultat d'existence de solutions fortes globales, d'unicité, de régularité et de comportement asymptotique. On dispose de résultats partiels d'existence locale de solutions fortes, d'unicité de solution avant un temps fini  $T$ , ou d'existence et d'unicité de solutions faibles dans le cas incompressible. On pourra mettre à profit la lecture de [Gibbon et Doering \(2005\)](#) sur la régularité des solutions et ou de [Caffarelli et al. \(1982\)](#) sur l'existence à temps fini de singularités. Les espaces fonctionnels sont alors du type ([Cannone \(1995\)](#))  $L^p(\mathbb{R}^3)$  avec  $p > 3$ , de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^3)$  avec  $s > \frac{1}{2}$  ou plus généralement des espaces de Besov  $\mathcal{B}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ .

En dimension 2 la situation est tout autre, en effet, on tire profit du noyau de Leray qui permet de régulariser NSE. Depuis les travaux de Jean Leray en 1933 on a obtenu peu de résultats sur l'existence et l'unicité de solutions de NSE incompressible. Présentons alors le théorème de Jean Leray ( pour un exposé complet des autres résultats, on peut lire [Cannone \(1995\)](#)) :

**Théorème 2.1.1** (Jean Leray 1933). *Soit  $U_0 \in L^2(\mathcal{D})$  un champ de vecteurs de divergence nulle.*

*Alors il existe une solution de NSE,  $U_{t,x} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\mathcal{D}))$  qui vérifie l'inégalité d'énergie*

$$\forall t \geq 0 \quad \|U_{t,x}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla U_{s,x}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 ds \leq \|U_0\|_{L^2(\mathcal{D})}^2$$

*Dans le cas où  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , alors  $U_{t,x}$  est unique,  $U_{t,x} \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathcal{D}))$  et l'inégalité d'énergie est une égalité.*

Pour la dimension 2, la formulation intégrale de la solution faible de NSE est :

$$U_{t,x} = e^{t\Delta} \cdot U_{0,x} - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \cdot [U_{s,x} \otimes U_{s,x}] ds \quad (2.4)$$

où  $\mathbb{P}$  est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle.

Nous n'irons pas plus loin dans la présentation de NSE qui requerrait bien plus, mais nous compléterons un peu plus loin par un exposé sur la version stochastique de NSE. Néanmoins, l'écoulement de fluides même en régime turbulent relève toujours de NSE.

La notion suivante abordée en mécanique des fluides est plus délicate, elle concerne la moyenne d'ensemble. Avec l'idée qu'un fluide est un système dynamique très chaotique, on définit la moyenne empirique d'un ensemble de réalisations de l'expérience avec des conditions initiales et aux bords de même nature (idéalement elles devraient être identiques). Cette moyenne empirique est qualifiée de moyenne d'ensemble.

La moyenne d'ensemble, limite infinie, est inaccessible à l'expérience mais l'espoir du mécanicien est de l'approcher par une moyenne sur un ensemble fini de mesures temporelles, conjecturant que son système est ergodique et que sa moyenne

empirique va converger vers la moyenne d'ensemble (cf Pope (2000)). On en reparlera un peu plus loin. Pour une quantité eulérienne liée au fluide  $Q_{t,x}$ , la moyenne d'ensemble est notée  $\langle Q \rangle_{t,x}$  ou plus simplement  $\langle Q \rangle$ .

On peut interpréter cette moyenne de manière probabiliste en considérant le système aléatoire et en définissant la moyenne d'ensemble  $\langle Q \rangle$  comme l'espérance du processus  $Q_{t,x}(\omega)$  :  $\langle Q \rangle_{t,x} \stackrel{def}{=} \int Q_{t,x}(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$ .

Dans les exemples d'utilisation des moyennes d'ensemble on peut citer la définition de l'énergie cinétique moyenne  $E = \langle \frac{1}{2} U^2 \rangle$  et s'intéresser, toujours en exemple, à son comportement, son transport par les tourbillons (vortex) présents dans la turbulence, on peut lire à ce sujet Favre *et al.* (1976). Dans la suite du travail on utilisera cette moyenne d'ensemble, pour définir par exemple l'énergie de dissipation turbulente :

$$\varepsilon_t \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \langle \varepsilon_t^{i,i} \rangle \stackrel{def}{=} \mu \cdot \sum_{i,j} \langle \frac{\partial(U_{t,x} - \langle U \rangle)^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial(U_{t,x} - \langle U \rangle)^i}{\partial x_j} \rangle \quad (2.5)$$

avec  $1 \leq i \leq d$  et  $1 \leq j \leq d$ , où  $d$  est la dimension de l'écoulement.

L'équation de Navier-Stokes possède une version simplifiée bien connue, l'équation de Burgers  $(\frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \nabla_x) \cdot U_{t,x} = \mu \cdot \Delta U_{t,x}$  que l'on munira de conditions initiales ou aux bords similaires à celle de NSE. Cela mène à une notion de turbulence spécifique qui a été décrite par Polyakov (1995) où il montre l'existence d'une intermittence associée à ces écoulements sans gradient de pression.

Cette équation de Burgers est utile, car c'est en quelque sorte un prototype de Navier-Stokes. U. Frisch (voir par exemple Frisch (1995)) nous fait d'ailleurs remarquer que d'expérience, les idées ou schémas numériques qui ne fonctionnent pas sur Burgers, ne fonctionneront pas sur Navier-Stokes. En quelque sorte, si on dispose d'une méthode pour traiter l'équation de Navier-Stokes, il peut être judicieux de la tester d'abord sur l'équation de Burgers qui est plus simple et si la méthode est en échec, point n'est la peine d'aller plus loin ...

Comme on vient de le dire avec l'étude de Polyakov, il existe une théorie de la turbulence associée à l'équation de Burgers. On pourra lire en détail le mémoire de thèse de Jérémie Bec (2002).



Pour le probabiliste, l'équation de Burgers est connue et a conduit à une interprétation particulière bien étudiée, [Sznitman \(1991\)](#) ou [Méléard \(1996\)](#), par exemple, ou [Funaki et Woyczynski \(1998\)](#) pour une version 1D avec un laplacien fractionnaire en bruit de dynamique. A la suite de ces travaux pionniers, a été formulée une interprétation particulière pour NSE d'abord en dimension 1 [Bossy et Talay \(1996b\)](#), [Bossy et Talay \(1996a\)](#) et [Bossy \*et al.\* \(1997\)](#), puis en dimension 2 voir [Méléard \(2001\)](#), puis plus récemment en dimension 3 avec [Fontbona \(2006\)](#).

Ces interprétations particulières reposent sur l'écriture en vortex de NSE. En définissant un vortex  $\zeta_{t,x}$  par le rotationnel de la vitesse, en prenant le rotationnel de NSE on obtient l'équation en tourbillon associée à l'écoulement du fluide incompressible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \zeta_{t,x}}{\partial t} + U_{t,x} \cdot \nabla_x \zeta_{t,x} = \zeta_{t,x} \cdot \nabla_x U_{t,x} + \mu \Delta \zeta_{t,x} \text{ dans le domaine } \mathcal{D} \\ \zeta_{0,x} = \zeta_0(x) \text{ sur } \partial \mathcal{D} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Cette formulation est importante pour caractériser un écoulement turbulent à composante fortement tourbillonnaire. On note qu'à présent le terme de pression a disparu. Néanmoins pour reconstituer le champ de vitesse il faut inverser le rotationnel et pour retrouver le terme de pression inverser l'équation de Poisson.

Nous avons volontairement omis de décrire l'état des connaissances et des interrogations sur l'équation d'Euler valable pour la limite des fluides inviscides. Cette absence de viscosité donne des écoulements extrêmement turbulents avec une analyse mathématiquement plus difficile par l'absence de régularisation que permet le terme de diffusion représenté dans l'équation de Navier-Stokes par le Laplacien de la vitesse. Pour plus de détails on pourra néanmoins se reporter aux travaux de L. Onsager ([Onsager \(1949\)](#)) ou plus récemment de J. Duchon et R. Robert ([Duchon et Robert \(2000\)](#)).

Quittant un peu l'analyse au travers des EDP, la turbulence peut être aussi décrite par des propriétés d'échelle, [Bensi \*et al.\* \(1996\)](#), de hiérarchie de structure [She \(1997\)](#) avec des interactions entre les incréments de vitesse et l'énergie, des cascades énergétiques [Renner \*et al.\* \(2002\)](#) .

Ces aspects mènent à une description multifractale de l'intermittence en turbulence pleinement développée dans [Frisch \(1980\)](#) ou [Frisch \(1995\)](#), [Balkovsky](#)

*et al.* (1997); Kolokolov (2000)

Mais les descriptions comportementales que l'on vient d'évoquer nécessitent en premier lieu une analyse statistique des écoulements fluides.

## 2.2 Description statistique de la turbulence

Pour étudier la turbulence, et au moins la décrire, soit il faut analyser un très grand nombre de réalisations du même écoulement pour dégager les modes propres dominants, soit on observe les structures formées sous l'effet de la dynamique turbulente. La première approche correspond à l'étude des moments, la seconde à la description des fonctions de structure et de leur apparence multifractale.

Les équations des moments de la turbulence passent par la commutation entre la moyenne d'ensemble et les opérateurs de dérivation. Si cette opération est l'évidence même pour le physicien, on va tout de même penser à considérer les quantités bornées pour assurer mathématiquement cette commutation. On sépare alors toute quantité eulérienne  $Q_{t,x}$  en terme moyen et fluctuation :

$$Q_{t,x} = \langle Q \rangle_{t,x} + q_{t,x}$$

Sir Reynolds dans les années 1880 propose de prendre la moyenne de l'équation de Navier-Stokes et d'utiliser une décomposition des paramètres en état moyen et fluctuation. L'équation de Navier-Stokes devient alors l'équation de Reynolds :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle U \rangle_{t,x} \nabla \right) \langle U \rangle_{t,x} = & - \nabla_x \langle P \rangle_{t,x} && \text{( Pression moyenne )} \\ & + \mu \Delta \langle U \rangle_{t,x} && \text{( Viscosité moyenne )} \\ & - \nabla_x \langle u \cdot u^T \rangle_{t,x} && \text{( Tensions de Reynolds )} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le nouveau terme,  $\langle u \cdot u \rangle_{t,x}$  se nomme la tension de Reynolds et est le moment d'ordre 2 des fluctuations, on peut réitérer le procédé avec une équation sur  $\langle u \cdot u^T \rangle$  mais elle fera apparaître des moments d'ordre 3, et ainsi de suite sans jamais fermer. On obtient ainsi une cascade d'équations portant sur les moments. Pour fermer le système il faut à une étape se donner un modèle phénoménologique

pour un de ces moments (voir [Degond et Lemou \(2002\)](#)). Ce sont les fermetures à l'ordre 2 ou 3 qui sont les plus fréquentes.

On peut formuler de nombreux jeux d'équation sur les moments, ou sur les tensions de Reynolds, notamment en utilisant les corrélations à 2 points (cf [Chassaing \(2000\)](#)). Ces ensembles d'équations aux moments sont spécifiques aux problèmes mis en valeur, comme les théories cinétiques (lire les travaux de Degond et Lemou sur l'application à des écoulements turbulents [Degond et Lemou \(2002\)](#)). Mais tous souffrent du même défaut, on ne les ferme pas sans hypothèses supplémentaires, en général d'ordre empirique.

L'autre façon de décrire statistiquement la turbulence a été initiée par le météorologue Richardson qui, en 1922, pense aux cascades d'énergie entre les échelles, en conjecturant des interactions entre les tourbillons de différentes tailles. En 1926, il découvre expérimentalement une loi qui stipule que le taux d'accroissement du carré de la distance entre 2 particules placées dans un écoulement turbulent varie comme la distance entre les particules élevée à la puissance  $\frac{4}{3}$  :  $\frac{\partial}{\partial t} \langle l^2 \rangle \sim \langle l^2 \rangle^{\frac{2}{3}}$ . Une dizaine d'années plus tard, Kolmogorov, inspiré par Richardson, travaille dans ce contexte.

- en 39 puis 41, Kolmogorov écrit 2 articles sur les spirales de Wiener, ancêtres des processus autosimilaires.
- en 41, il écrit un premier texte ( mathématique ) sur les processus localement homogènes.

Il rédige alors son célèbre article sur la turbulence : [Kolmogorov \(1941\)](#). La théorie phénoménologique qu'il énonce pour la turbulence est universellement cotée K41. Dans sa réflexion, il considère la turbulence localement homogène et insiste lourdement sur le rôle des incréments de vitesse (il préfère l'accroissement du processus aux fluctuations).

On nomme incrément spatial de vitesse la quantité :

$$\delta u_r(x) = U(x+r) - U(x) \tag{2.8}$$

où  $r$  est un vecteur auquel on donne une direction particulière, en général soit

tangent à l'écoulement orienté dans son sens, soit orthogonal à l'écoulement avec une direction que l'on précise.

On définit la fonction de structure spatiale longitudinale (resp. orthogonale) d'ordre  $p$  pour l'écoulement comme étant le moment d'ordre  $p$  de l'incrément de vitesse longitudinal (resp. orthogonal) :

$$S_p = \langle (\delta u_r^{\parallel})^p \rangle \quad (\text{ resp. } \langle (\delta u_r^{\perp})^p \rangle ) \quad (2.9)$$

Kolmogorov base sa réflexion sur une série d'hypothèses que voici ([Frisch \(1995\)](#)) :

- H1 : *Pour des nombres de Reynolds infinis, toutes les symétries des équations de Navier-Stokes, détruites par la turbulence, sont restaurées dans les statistiques de l'écoulement.*

- H2 : *Sous les hypothèses de H1, la turbulence est autosimilaire :*

$$\delta u(x, \lambda r) = \lambda^h \delta u(x, r) \text{ en loi.}$$

- H3 : *Sous les hypothèses de H1, la turbulence a un taux moyen de dissipation par unité de masse  $\varepsilon$  fini non nul*

Kolmogorov se place dans le domaine inertiel compris entre l'échelle où les dissipations thermiques prédominent et l'échelle intégrale où les grandes structures apportent les incréments d'énergie à la cascade. Dans ce domaine inertiel, pour Kolmogorov, l'énergie est transférée des échelles les plus grandes vers les plus petites sans perte avec un taux  $\varepsilon$  qu'il suppose constant dans tout le domaine.

### Loi des deux-tiers

*Dans un fluide turbulent localement homogène, à des nombres de Reynolds tendant à l'infini, la fonction de structure d'ordre 2,  $S_2(r)$ , entre deux points distants*

de la longueur  $r$  est une puissance deux-tiers de cette distance :  $\langle (\delta u_r^\parallel)^2 \rangle = C_0 \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$ , où  $C_0$  est une constante adimensionnelle universelle, et  $\varepsilon$  est le taux moyen de dissipation turbulente.

La démonstration de cette loi n'utilise pas explicitement l'équation de Navier-Stokes mais seulement ses invariances et se trouve par des considérations dimensionnelles.

#### Loi des quatre-cinquièmes .

Dans des écoulements turbulents localement homogènes, à très grands nombres de Reynolds, la fonction de structure d'ordre 3,  $S_3(r)$ , entre deux points distants de  $r$  est  $\langle (\delta u_r^\parallel)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r$  où  $r$  est comparable à la longueur d'échelle.

Des deux lois précédentes on tire une expression de l'énergie pour un nombre d'onde  $\kappa$  :  $E(\kappa) = C_0 \cdot \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ .

Cette dernière loi, conséquence des précédentes, est certainement celle qui est la plus utilisée lorsqu'on modélise la turbulence, et que l'on fait référence à un système avec un spectre de Kolmogorov. En effet on demandera au spectre des processus que l'on modélise d'avoir une pente en  $-\frac{5}{3}$  dans le domaine inertiel. Rappelons ici (Lumley (1970)) que le spectre de puissance est défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $S_{XX}(f) = \mathcal{F}(R_{XX}) = \int_{\mathbb{R}} R_{XX}(s) e^{-2i\pi \cdot f \cdot s} ds$  où  $R_{XX}$  est la fonction d'autocorrélation du processus  $X$  et  $f$  est une fréquence. Il faut alors se prémunir des problèmes d'existence en considérant des processus finis stationnaires et d'énergie finie et des fonctions de corrélation intégrables.

Les lois de Kolmogorov pour la turbulence homogène localement ont subi des critiques notamment de Landau (Frisch (1995)) mais elles sont très utiles et récemment Flandoli *et al.* (2008) ont montré leur pertinence sous certaines hypothèses en les déduisant de la version stochastique de NSE.

Mais dans notre description statistique, il faut aller plus avant en décrivant le concept d'intermittence. Les zones d'intermittences ont des comportements énergétiques très différents ( [Frisch \(1995\)](#), [Novikov \(1980\)](#), [Vincenzi \(2003\)](#), ou encore [Chertkov \*et al.\* \(1998a\)](#) ). On définira conceptuellement l'intermittence comme la présence d'évènements transitoires de forte intensité et désorganisés. Elles seront caractérisées par les fonctions de structures et par l'écart à la gaussienne de leur fonction de densité de probabilité.

Pour préciser cela il faut compléter le travail sur les fonctions de structure. On trouvera dans les travaux de [Polyakov \(1995\)](#) puis [Yakhot \(2001, 1998\)](#) la description des cascades entre les fonctions de structures de différents ordres  $(n, m)$ .

En définissant les incréments longitudinaux  $\delta u_r^{\parallel}$  et orthogonaux  $\delta u_r^{\perp}$ , on note

$$S_{n,m}(r) = \langle (\delta u_r^{\parallel})^n \cdot (\delta u_r^{\perp})^m \rangle \quad (2.10)$$

les fonctions de structure spatiales généralisées (lire [Frisch \(1995\)](#) ou [Chassaing \(2000\)](#) ).

A partir de NSE en dimension  $d$ , après quelques manipulations algébriques [Yakhot \(2001\)](#) obtient la relation :

$$\frac{\partial S_{2n,0}}{\partial r} + \frac{d-1}{r} S_{2n,0} - \frac{(d-1)(2n-1)}{r} S_{2n-2,2} = (2n-1) \cdot \langle \delta p_x (\delta u_r^{\parallel})^{2n-2} \rangle \quad (2.11)$$

où  $\delta p_x$  est l'incrément de pression. On note que les fonctions de structure dépendent des ordres inférieurs et des corrélations entre incréments de pression et incréments de vitesses. Là encore la cascade d'équations ne ferme pas.

D'autres équations sur ces moments sont possibles, Yakhot montre d'ailleurs dans son article de 98 ([Yakhot \(1998\)](#)) que

$$S_n(r) = A_n r^{\xi_n} + \gamma \cdot A_{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{n+B} \frac{r^{3+\xi_{n-3}}}{3+\xi_{n-3}-\xi_n} \quad (2.12)$$

où les  $A_n$ ,  $\gamma$ ,  $B$  sont des paramètres qui ne dépendent pas de  $r$ , et  $\xi_n$  est un exposant d'échelle.

Cette relation est intéressante pour deux choses. D'abord en prenant  $n = 3$ , on retrouve  $S_3(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r + O(r^3)$ , qui est la loi des quatre-cinquièmes qu'avait

énoncé Kolmogorov en 1941.

L'équation 2.12 fait apparaître des puissances de  $r$  dans les fonctions de structure d'exposant  $\xi_n$ . Les  $\xi_n$  sont eux mêmes des fonctions et signent un écoulement intermittent. De plus leur forme rationnelle suggère la présence de processus multifractaux par lequel des cascades d'énergie particulières apparaissent (voir Frisch (1995) ou pour les cascades multifractales Hunt *et al.* (1991) Chainais (2001) Chertkov *et al.* (1998b, 1997); Del Sole (1999), on peut aussi lire Schertzer *et al.* (2002) pour un exposé sur les champs multifractaux).

Cette idée de lois en puissance pour les fonctions de structure n'est pas mise en défaut par l'expérience, mais les exposants d'échelle mesurés ne varient pas linéairement avec l'ordre  $p$ . On parle de lois d'échelle anormales et l'écart à la loi de Kolmogorov  $\zeta_p = p/3$  marquent la présence d'intermittence et correspondent à des processus à queues lourdes avec des temps d'autocorrélation infinis.

On vient de présenter succinctement les différentes manières de modéliser statistiquement la turbulence, nous allons maintenant évoquer la modélisation du comportement du fluide turbulent à travers différentes méthodes.

## 2.3 Simulations numériques déterministes d'écoulements turbulents

Nous allons évoquer tout d'abord les modélisations déterministes de la turbulence à des fins de simulations. Il en existe de plusieurs sortes, chacune utilisant un aspect de nos connaissances sur la turbulence.

Nous démarrons avec la plus naturelle des méthodes, la Simulation Numérique Directe (DNS) (voir la description dans Pope (2000)). Cette technique est la manière la plus précise d'étudier numériquement un fluide turbulent. Dans ce cadre, le champ de vitesse Eulérienne est directement résolu par l'équation de Navier-Stokes, et il n'y a aucun moyennage d'effectué, ou de modélisation de la turbulence

d'utilisée. Seules les erreurs dues aux schémas numériques dégradent la solution. La DNS est l'approche la plus directe pour simuler les écoulements fluides, mais c'est de loin la plus coûteuse en temps de calcul et en complexité. Dans ce cas, le domaine de calcul doit être assez grand pour ne pas avoir d'effet de bord, et le maillage serré pour prendre en compte les phénomènes les plus fins. Utilisant la théorie de l'information, l'échelle la plus grande permise par le domaine (correspondant à la longueur d'onde de Rayleigh), et la taille du maillage fourni le nombre de Reynolds de l'écoulement (longueur d'onde de Shannon, lire [Shannon \(1948\)](#) ou les conséquences du théorème [4.4.1](#)). Par la lourdeur du procédé, la DNS est utile pour étudier certains écoulements académiques, mais n'est pas adaptée pour la simulation opérationnelle.

La seconde méthode est la LES (Large Eddy Simulation [Chassaing \(2000\)](#); [Pope \(2000\)](#)). C'est une méthode utilisant 2 techniques. Les échelles les plus grandes sont résolues par une équation de Navier-Stokes, et l'influence des plus petites structures est fournie par un modèle empirique forcé par l'écoulement principal. La séparation opère un filtrage. La LES est à rapprocher d'une troisième méthode dite RANS (Reynolds Average Navier-Stokes) mais la LES est plus proche de la DNS dans son esprit. Dans la méthode RANS les petites structures de la turbulence sont couplées sans tenir compte du maillage alors que dans la méthode LES, ce sont les résultats sur la grille qui paramètrent le modèle sous-grille. La méthode RANS a tendance à amortir les plus petites échelles du mouvement quelle que soit la taille du maillage, alors que dans la LES c'est la taille de la grille qui définit l'atténuation. Donc plus une grille est fine, moins il y a d'atténuation des petites structures et plus on se rapproche de la DNS.

Il existe un nombre important de modèles pour calculer des écoulements turbulents dans des environnements complexes, mais à la fois la DNS et la LES sont trop coûteuses dans les applications d'ingénierie. Du fait de ces problèmes de coûts numériques rédhibitoires, très souvent on utilise l'approche RANS avec un modèle de turbulence  $k - \epsilon$  avec des schémas de fermeture. Le modèle en  $k - \epsilon$  est composé de 2 équations qui fournissent l'énergie cinétique turbulente  $k$ , et le taux de dissipation turbulente  $\epsilon$  ([Chassaing \(2000\)](#); [Pope \(2000\)](#))

Pour établir le modèle en  $k - \epsilon$ , on utilise l'équation de Reynolds incompressible ([2.7](#)) sur les quantités moyennées, que l'on appelle aussi RANS, et on applique



une modélisation ( empirique ) particulière des tensions de Reynolds pour avoir

$$\begin{cases} \frac{\partial k_{t,x}}{\partial t} + \langle U \rangle_{t,x} \cdot \nabla_x k_{t,x} - \nabla_x \cdot (D_k \nabla_x k_{t,x}) + \gamma_k k_{t,x} = F_k \\ \frac{\partial \varepsilon_{t,x}}{\partial t} + \langle U \rangle_{t,x} \cdot \nabla_x \varepsilon_{t,x} - \nabla_x \cdot (D_\varepsilon \nabla_x \varepsilon_{t,x}) + \gamma_\varepsilon \varepsilon_{t,x} = F_\varepsilon \end{cases} \quad (2.13)$$

Les  $D_k$ ,  $D_\varepsilon$ ,  $\gamma_k$ ,  $\gamma_\varepsilon$ ,  $F_k$  et  $F_\varepsilon$  sont des fonctions de  $k$  et  $\varepsilon$ .

Dernière famille de méthodes présentée ici, les méthodes spectrales ([Chassaing \(2000\)](#); [Pope \(2000\)](#)) sont d'autres types de technique, où le passage en espace de Fourier permet certaines simplifications de calcul notamment lorsque le domaine est périodique comme un cylindre, un tore ou la sphère. Le travail dans l'espace de Fourier permet de mieux traiter les modes présents dans la simulation, notamment en respectant les cascades d'énergie, l'approche spectrale permet un traitement simple des corrélations (c'est une approche 2 points). Cette méthode permet alors d'accéder à toutes les échelles de la turbulence ainsi qu'à la géométrie des structures contribuant à l'écoulement. Qui plus est, en transformant les EDP par Fourier, on remplace les opérateurs de dérivation (numériquement approchés) par des opérations polynomiales (exactes). Comme pour la DNS, son problème essentiel tient dans un coût non négligeable de calculs.

Toutes les méthodes que l'on vient de présenter souffrent du même défaut, elles nécessitent des équations supplémentaires pour fermer les systèmes. Ce problème est intrinsèquement due aux non-linéarités présentes dans les équations d'évolution des fluides. Chacun des modèles fait apparaître plus d'inconnues que d'équations. Il faut alors trouver des équations additionnelles pour fermer algébriquement le système, ou bien il faut chercher des hypothèses physiques simplificatrices fondées sur l'expérience. Les équations complémentaires sont souvent empiriques et donnent de manière explicite le paramètre par lequel on veut faire la fermeture ( voir [Chassaing \(2000\)](#); [Frisch \(1995\)](#) ). Par exemple dans la méthode LES avec le modèle grande échelle résolvant le système  $k - \varepsilon$ , on adjoint un modèle bulle plus simple pour fermer. Pour ce qui est des modèles statistiques, en général la fermeture se fait pour le moment à l'ordre deux [Chassaing \(2000\)](#); [Pope \(2000\)](#).

## 2.4 Modélisations probabilistes de la turbulence

Depuis 10 ans des développements substantiels ont été réalisés dans l'étude probabiliste des fluides nous allons rapidement les passer en revue. Deux voies

ont été explorées : soit l'écriture et l'étude d'une version stochastique de NSE (voir [Debussche et Odasso \(2006\)](#)), soit la représentation des solutions de NSE en processus aléatoire ( voir [Fontbona \(2006\)](#) ). Ces travaux nous permettent maintenant de parler de modélisations stochastiques des champs Eulériens turbulents en dimension 2 et 3 [Mikulevicius et Rozovskii \(2004\)](#). L'étude des représentations de NSE ou de SNSE a profité des avancées faites sur l'étude des systèmes infini-dimensionnels (la littérature est nombreuse, on peut lire par exemple les travaux de DaPrato et de ses différents collaborateurs [Da Prato et Zabczyk \(1992, 2003\)](#) ou bien [Krylov et al. \(1999\)](#) ) et sur l'approche particulière des équations aux dérivées partielles stochastiques (SPDE) (comme par exemple, parmi tant d'autres, [Kurtz et Xiong \(1999\)](#)).

La représentation probabiliste des EDP est décrite dans [Revuz et Yor \(1990\)](#) ou [Ethier et Kurtz \(1986\)](#). Elle permet d'associer à une EDP un processus stochastique et/ou une équation différentielle stochastique (SDE) qui, lorsque la solution n'est pas explicite, permet de trouver une solution approchée de type particulière.

Pour revenir aux fluides, dans [Menaldi et Sritharan \(2002\)](#), les auteurs prouvent pour la dimension 2 l'existence et l'unicité de solutions fortes qui dépendent trajectoriellement du problème de martingale associé à l'équation de Navier-Stokes en l'écrivant au sens faible comme une équation de Itô :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(U_{t,x}, v) + (AU_{t,x} + B(U_{t,x}, v))dt = \sum_k (g_k(t, x), v)dw_{k,t} \\ (U_{0,x}, v) = (U_0(x), v) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathcal{D}$  et  $v \in \mathbb{V}$ , où  $\mathbb{V} = \{v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d, v \in H_0^1(\mathcal{D}) \text{div}(v) = 0\}$ , avec  $Av = -\mathbb{P}_{\mathbb{V}}\Delta v$ ,  $B(v) = \mathbb{P}_{\mathbb{V}}(v \cdot \nabla v)$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{V}}$  est le projecteur orthogonal de  $L^2(\mathcal{D})$  dans  $(V)$  (projecteur de Hodge-Leray) et pour terminer,  $w_{k,t}$  est un brownien cylindrique.

Pour NSE en dimension 3, dans [Busnello et al. \(2005\)](#) on trouvera une représentation stochastique pour NSE en formulation vorticité et l'auteur donne un théorème d'existence et d'unicité locale. Plus récemment [Fontbona \(2006\)](#) toujours pour une représentation stochastique en formulation vorticité donne l'approche particulière correspondante. En outre Busnello montre la convergence de la méthode stochastique du vortex en la considérant comme une extension des modèles de type McKean-Vlasov (voir [Bossy \(2005\)](#)) et prouve la convergence de son approche particulière. Il exprime la solution en terme de flot de vortex stochastique et s'approche de la modélisation Lagrangienne dont nous parlons au chapitre 3 dans une description plus physique ( on peut lire aussi [Mikulevicius et Rozovskii](#)

(2004) pour une description du flot stochastique de SNSE en dimension 2). Avant Fontbona et Busnello, LeJan et Sznitman ont exploré les cascades énergétiques de NSE-3D Le Jan et Sznitman (1997), Sylvie Méléard (Méléard (2001)) avait réalisé le même travail, mais en dimension 2, en étudiant la SDE

$$X_t = X_0 + \sqrt{2\mu}B_t + \int_0^t K * \tilde{\mathbb{P}}_s(X_s)ds \quad (2.15)$$

où  $X_0$  est une variable aléatoire de loi  $\mathbb{P}_0$ ,  $X_t \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  pour  $t > 0$ ,  $K$  est le noyau de Biot-Savart  $K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|x\|}(-x_2, x_1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , et  $\mathbb{P}_s$  est la loi de  $X_s$  et  $\tilde{\mathbb{P}}(X_s)ds = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{dX_s}(X_t)h(X_0)]$  et  $h$  est la densité de  $\mathbb{P}_0$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

On l'a évoqué au début de cette section, l'autre angle d'attaque est l'étude de l'équation de Navier-Stokes Stochastique (SNSE) qui correspond à l'ajout d'un bruit, souvent la dérivée en temps au sens de Malliavin d'un mouvement Brownien  $W_t$ , sur NSE classique :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \nabla_x\right) \cdot U_{t,x} = -\nabla_x p_{t,x} + \mu \cdot \Delta U_{t,x} + \dot{W}_t \quad (2.16)$$

En écrivant ce système on compte sur le bruit blanc additionnel, même en étant faible, pour régulariser l'équation de Navier-Stokes et ainsi prévenir l'irruption de singularités.

Pour la dimension 2, Mikulevicius et Rozovskii (2001) nous ont fourni un théorème de propagation du chaos pour le système de particules approchant SNSE. Hairer *et al.* (2004) ont exploré quant à eux le calcul de Malliavin sur les flots stochastiques du fluide bidimensionnel.

Depuis ces travaux précurseurs, les probabilistes ont obtenu un certain nombre de résultats comme l'existence de solutions Markov, Debussche et Odasso (2006), pour les écoulements tridimensionnels :

**Théorème 2.4.1** (Debussche et Odasso 2006). *Pour l'équation de Navier-Stokes incompressible dans un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$  avec des conditions de Dirichlet au bord  $\partial\mathcal{D}$  et une condition initiale fournie, écrite sous forme de l'EDS*

$$\begin{cases} dU_{t,x} = (AU_{t,x} + B(U_{t,x}))dt + \phi(U_{t,x})dW_t \\ U_{0,x} = U_0(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

*Il existe une famille de martingales  $(\Omega_x, \mathcal{F}_x, \mathbb{P}_x, U(\cdot, x))_{x \in \mathcal{D}}$  solutions Markoviennes de 2.17. De plus le semi-groupe de transition  $(P_t)_{t \leq 0}$  du processus de Markov solution est stochastiquement continu.*

Les auteurs donnent ensuite des propriétés ergodiques du processus solution.

Auparavant en dimension 3, [Flandoli et Romito \(2007\)](#) avaient étudié la régularité du semi-groupe des solutions par rapport aux conditions initiales, [Romito \(2006\)](#) avait montré l'existence du problème de martingale et de solution faible stationnaire pour NSE-3D, [Da Prato et Debussche \(2003\)](#) nous avaient donné des conditions d'ergodicité par une approximation de type Galerkin, [Flandoli et Romito \(2002\)](#) avaient analysé les singularités qui doivent être un ensemble vide avec une probabilité 1 pour les solutions statistiquement stationnaires. Plus récemment, [Basson \(2008\)](#) nous montre l'existence de solutions spatialement homogènes pour les écoulements dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire distribuées selon la loi invariante. Dans un autre registre, [Swiech \(2006\)](#) a étudié les grandes déviations pour les solutions de SNSE ou [Amirdjanova et Xiong \(2006\)](#) pour les grandes déviations en dimension 2 pour NSE en formulation vorticité.

On le constate ces dernières années, les progrès sur la connaissance des équations de Navier-Stokes en tant que processus stochastique ou sur les versions stochastiques de NSE ont été conséquents et ont permis d'avoir des résultats probants.

Néanmoins, pour restituer des champs de vitesses du fluide, il perdure le problème de fermeture inhérents aux équations non-linéaires.

Une nouvelle solution pour fermer le système va être proposée, elle utilise les données de l'observation d'un fluide. Cette solution que l'on va détailler au chapitre 8 a été utilisée en parallèle pour le suivi de vortex en 2d sur séquence d'image par Anne [Cuzol \(2006\)](#).

Comme l'a fait remarquer Richard Feynman en 1979, l'étude des écoulements turbulents est encore dans une phase de conceptualisation, et après 2 siècles nous n'avons pas de théorie complète permettant de prévoir l'évolution de tous les fluides. Des courants de pensée sont présents avec leurs points de vue et leur

recettes pertinentes, mais il n'y a pour le moment pas d'unité, d'où l'interrogation de ce début de chapitre, nous posons-nous la bonne question concernant la turbulence ?

C'est dans ce contexte que l'on va essayer de présenter des techniques de modélisation Lagrangiennes pour le mouvement de particules sans inertie placées dans la turbulence. Ces techniques reposent sur les travaux de S.B. Pope ( voir l'article de revue de [Pope \(1994a\)](#) ) pour la simulation des suies dans la combustion.

# Chapitre 3

## Modèles Lagrangiens stochastiques de Pope

Dans le chapitre précédent nous avons présenté succinctement les modélisations statistiques de la turbulence, amenant d'un coté les lois de Kolmogorov pour la turbulence homogène localement ou multifractales pour l'intermittence, et de l'autre les modèles Eulériens déterministes ou stochastiques. Nous allons décrire maintenant une autre forme de modélisation, celle qui prend le point de vue de l'élément fluide se faisant transporter par un flot. Ces modèles sont appelés Lagrangiens. La particule fluide peut se définir comme un volume (déformable) non vide de matière pour lequel les paramètres thermodynamiques (température, pression, densité, composés chimiques, ...) sont constants ou homogènes. Elle subit donc l'influence d'un milieu aléatoire qui conditionne son évolution. Il est donc naturel de penser que la description Lagrangienne de l'évolution de la vitesse d'un élément fluide va nécessiter la connaissance du champ Eulérien ou au minimum de paramètres aléatoires issus de ce champ. C'est cette combinaison d'Eulérien et de Lagrangien sous forme d'une marche aléatoire en milieu aléatoire ([Varadhan \(2004\)](#)) qui constitue un Modèle Lagrangien Stochastique (SLM) pour la turbulence.

Pour introduire les modèles Lagrangiens, dans un registre probabiliste, intéressons-nous rapidement à l'article de [Mikulevicius et Rozovskii \(2004\)](#) qui est plein d'enseignements. Les auteurs considèrent pour  $t > 0$  le flot Lagrangien  $X(t, X_0)$  (positions prises par une particule placée dans un fluide) partant du point  $X_0$  à l'instant initial  $t = 0$ . A la formulation classique et déterministe, où l'on peut écrire  $\partial_t X(t, X_0) = U_{t, X(t, X_0)}$ , avec  $X(0, X_0) = X_0$ , ils préfèrent un système dynamique

stochastique avec un terme de diffusion turbulente supplémentaire et écrivent son équation d'évolution dans  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , espace de probabilité complet :

$$\begin{cases} dX(t, X_0) &= U_{t,X(t,X_0)} dt + \sigma_{t,X(t,X_0)} \circ dW_t \\ X(0, X_0) &= X_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où la fonction  $(t, x) \rightarrow U_{t,x}$  est la solution d'une équation de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $\sigma_{t,x}$  est fourni par le champ de vitesse Eulérien et  $W_t$  est un mouvement Brownien cylindrique dans un Hilbert  $H$  ( $\circ$  symbolise l'intégration au sens de Stratonovitch) .

Partant de 3.1 par dérivation pour obtenir une équation sur l'accélération, puis en intégrant contre une fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  on obtient

$$\int \varphi(t) F(t, X(t, X_0)) dt = - \int \varphi'(t) \sigma_{t,X(t,X_0)} \circ dW_t + \int \varphi(t) dU_{t,X(t,X_0)} \quad (3.2)$$

où  $F(t, x)$  est la force totale appliquée à l'élément fluide, en se rappelant la loi de Newton qui exprime que

$$\frac{dU_{t,X(t,X_0)}}{dt} = F(t, X(t, X_0)) \quad (3.3)$$

Par une formule d'Itô et après quelques manipulations les auteurs obtiennent pour  $U_{t,x}$  l'équation :

$$\begin{aligned} dU_{t,x} &= [-U_{t,x}^j \cdot \partial_{x_j} U_{t,x} + f] \cdot dt + [g(t, x) - \sigma_{t,x}^p \cdot \partial_{x_p} U_{t,x}] \circ dW_t \\ U_{0,x} &= U_0(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $f : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $g : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow H^d$  sont des fonctions  $\mathcal{F}_t^W$ -adaptées.

En prenant des cas particuliers bien choisis pour  $f$  et  $g$ , ils déduisent de cette dernière équation 3.4 diverses formes de NSE, dont ils obtiennent, en dimension 2, un théorème d'existence globale de la solution (ainsi que son lot de problèmes de fermeture).

Leur approche est intéressante (pour ne pas dire naturelle pour un probabiliste) mais elle ne permet pas de donner un modèle pour la vitesse Lagrangienne  $V_t = U_{t,X(t,X_0)}$  sans avoir sous la main le champ Eulérien complètement résolu. La

modélisation Lagrangienne est le modèle le plus fin (celui de l'élément fluide) et a besoin de la connaissance du milieu à cette même échelle pour être pertinent.

Si les champs Eulériens sont connus à des échelles plus grossières (i-e sur les mailles d'un modèle résolvant le système de Navier-Stokes), alors la formulation donnée par Mikulevicius et Rozovskii (2004) dans l'équation 3.1 perd de sa pertinence, et il faut un modèle prenant en compte la structure grande échelle pour faire avancer des particules dans les plus petites structures. C'est ce que se proposent de donner les modèles stochastiques Lagrangiens de S.B. Pope, que la prochaine section détaille. On éclate alors le champs en composantes de grandes échelles lentes et déterministes fournis par les moyennes d'ensemble de l'équation de Navier-Stokes ( équation de Reynolds ) et en composantes de petites échelles rapides et aléatoires données par la marche aléatoire.

### 3.1 Formulation du modèle Lagrangien

Nous allons dans cette section montrer comment le physicien conçoit ses modèles Lagrangiens en nous attachant à ceux élaborés par S.B. Pope, avant tout conçus pour des problèmes de modélisations du mouvement de particules fines lors de combustions.

S.B. Pope est sans conteste celui qui a exploré le plus ce domaine. On peut lire la première description complète de ces techniques dans Pope (1985), une revue rapide dans Pope (1994a) ou son livre Pope (2000) fruit d'un travail de 2 décennies, ou pour terminer son article de 2002 avec une description plus moderne en terme d'opérateur Pope (2002b).

Néanmoins il existe de nombreuses formulations Lagrangiennes pour les fluides. On vient de parler de Mikulevicius et Rozovskii (2004), mais on peut mettre à profit la lecture Heppe (1998) ou E et Vanden Eijnden (2000) ou Olla et Paradisi (2004) et toutes reposent sur l'analyse des forces agissant sur les volumes élémentaires et sur le bilan de ces forces qui forme une équation dite de Langevin (ajout d'une force aléatoire à la loi de Newton visée au dessus).

On a évoqué la décomposition en structures Lagrangiennes aléatoires rapides et en phénomènes Eulériens de grandes échelles déterministes lents. On définit alors un temps caractéristique Lagrangien  $T_L$ . L'équation de Langevin pour un



élément fluide porte sur la vitesse Lagrangienne et s'écrit alors

$$dV_t = -V_t \frac{dt}{T_L} + \left(\frac{2\sigma^2}{T_L}\right)^{\frac{1}{2}} dW_t \quad (3.5)$$

où  $\sigma$  est une constante,  $W_t$  est le mouvement Brownien standard. Le temps Lagrangien  $T_L$  peut être également vu comme le temps d'autocorrélation de la vitesse Lagrangienne : pour  $s > 0$ , la fonction d'autocorrélation s'écrit  $\Gamma(s) = \mathbb{E}(V_t \cdot V_{t+s}) = \sigma^2 \exp(-s/T_L)$  et nous avons  $\int_0^\infty \exp(-s/T_L) ds = T_L$ .

Le processus stochastique associé à l'équation de Langevin 3.5 est bien connu et décrit sous toutes ses coutures, il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont nous ne rappelons pas les propriétés (voir par exemple Karatzas et Shreve (1998)).

Pour élaborer notre modèle Lagrangien pour la turbulence, il nous faut alors :

- Trouver le temps caractéristique  $T_L$  pour un fluide turbulent avec les propriétés requises.
- Ecrire le modèle pour qu'il soit compatible avec l'équation de Navier-Stokes. Plus précisément, comme on l'a décrit au dessus, on veut un modèle qui respecte les grandes échelles données par NSE, donc ce sera l'équation de Reynolds qui nous servira à la construction.
- Etre consistant avec les lois de Kolmogorov K41 sur la turbulence que l'on a énoncé plus haut.

Cette construction se fait très formellement utilisant le sens physique pour simplifier certaines équations et usant de modèles empiriques quand il le faut. Il ne s'agit pas ici de prouver l'existence ou donner une démonstration des liens entre les équations, juste de rapporter la logique propre au physicien, en l'occurrence S.B. Pope, pour bâtir ses modèles (voir Pope (1994a, 2000)).

Néanmoins pour donner un sens à l'équation de Reynolds, nous allons supposer que toutes les quantités des équations à venir  $Q_{t,x}$  sont bornées.

Réécrivons l'équation de Reynolds pour le champ Eulérien  $U_{t,x}$  (Afin d'alléger les notations, nous omettons les indices  $(t, x)$  sur les variables Eulériennes et l'indice d'espace  $x$  sur les gradients  $\nabla$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle U \rangle_{t,x} + \langle U \rangle_{t,x} \nabla_x \langle U \rangle_{t,x} = \nabla_x \langle p \rangle - \mu \Delta \langle U \rangle_{t,x} - \text{div} R \quad (2.7)$$

où  $R$  est le tenseur de Reynolds,  $R = \langle u_{t,x} u_{t,x} \rangle_{t,x}$  avec  $u_{t,x} = U_{t,x} - \langle U \rangle_{t,x}$ . A l'échelle Lagrangienne la diffusion grande échelle est considérée comme négligeable donc on pose  $\mu \Delta \langle U \rangle_{t,x} = 0$ . On introduit la dérivée Lagrangienne en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \langle U \rangle_{t,x} &\stackrel{def}{=} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \cdot \nabla_x \right] \langle U \rangle_{t,x} \\ &= \underbrace{\left[ U_{t,x} - \langle U \rangle_{t,x} \right]}_{u'_{t,x}} \nabla_x \langle U \rangle_{t,x} - \nabla_x \langle p \rangle_{t,x} - \text{div}(R) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $u'_{t,x}$  est la fluctuation autour de la moyenne locale  $\langle U \rangle_{t,x}$  et  $u'_{t,x} \cdot \nabla \langle U \rangle_{t,x}$  est le transport de la moyenne locale par la fluctuation.

Par des manipulations élémentaires, formellement, on écrit alors une équation d'évolution 'symétrique' pour la fluctuation  $u'_{t,x}$  :

$$\frac{D}{Dt} u'_{t,x} = -\nabla_x \langle p \rangle_{t,x} + \mu \Delta u'_{t,x} - u'_{t,x} \nabla_x \langle U \rangle_{t,x} + \text{div} R \quad (3.7)$$

Le terme  $-\nabla_x \langle p \rangle_{t,x} + \mu \Delta u'_{t,x}$  est de dynamique très rapide et est très difficile à appréhender. On lui donne alors un modèle aléatoire empirique :

$$(-\nabla_x \langle p \rangle_{t,x} + \mu \Delta u'_{t,x}) \cdot dt = \mathcal{G}_{ij} u'_{t,x} dt + \sigma dW_t \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{G}_{ij}$  et  $\sigma$  sont des tenseurs qu'il faudra décrire par la suite pour remplir le cahier des charges (compatibilité avec NSE et K41).

On peut alors sommer les équations 3.6 et 3.7 et former un modèle Lagrangien générique pour la vitesse  $U_{t,x}$ . Pour que cette description soit effectivement Lagrangienne il faut lui adjoindre une équation sur l'évolution de la position ( $dX_t = U_{t,X_t} \cdot dt$ ) et considérer  $V_t$  la vitesse en  $X_t$  partant du point  $X_0 = x_0$  et de la vitesse initiale  $V_0 = v_0$ . Dans les notations relatives aux équations Lagrangiennes nous allons omettre l'indice de temps et d'espace sur les moyennes Eulériennes, sous-entendant qu'elles sont prises au temps considéré au point où se trouve cette particule.

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \mathcal{G}_{ij} [V_t - \langle V \rangle] dt + \sigma dW_t \\ V_0 = v_0 \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

La première loi de Kolmogorov, loi des deux-tiers 2.2, peut s'exprimer en terme de fonction de structure temporelle. En écrivant le moment d'ordre 2 de l'incrément temporel de vitesse,  $D_2(s) = \langle [U_{t+s,x} - U_{t,x}]^2 \rangle$ , K41 stipule que  $D_2(s) = C_0 \cdot \varepsilon \cdot s$ , où  $C_0 > 0$  est la constante de Kolmogorov (Il s'agit là d'un abus que l'on commentera peu après). On utilise cette dernière expression pour donner une forme à  $\sigma$  qui satisfasse à la loi des deux-tiers et qui soit valable pour la turbulence homogène isotrope :

$$\sigma = \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} \quad (3.10)$$

Le taux de dissipation  $\varepsilon_t$  est pris comme la moyenne Eulérienne de la pseudo-dissipation (trace du tenseur de dissipation) prise au temps  $t$  au point  $X_t$  définie par  $\varepsilon_t = \frac{1}{2} \langle \varepsilon^{i,i} \rangle_{t,X_t}$

On cherche à donner une expression au temps Lagrangien  $T_L$ . Prenant le modèle de Langevin 3.5, on trouve  $\frac{1}{T_L} = \frac{C_0 \cdot \varepsilon_t}{2 \cdot u_t'^2}$ . Dans cette expression la valeur de  $u_t'^2$  nous fait défaut. Utilisant le modèle Lagrangien générique 3.9,  $dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \mathcal{G}_{ij}[V_t - \langle V \rangle] dt + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} dW_t$ , on se place à un instant  $t > 0$ , on note  $v_t = V_t - \langle V \rangle$  et on écrit, toujours de manière formelle, une équation générale d'évolution pour les tensions de Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \langle v_k v_l \rangle = \mathcal{P}_{kl} + \mathcal{G}_{ki} \langle v_i v_l \rangle + \mathcal{G}_{li} \langle v_i v_k \rangle + C_0 \cdot \varepsilon_t \cdot \delta_{kl} \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{P}_{kl}$  est le tenseur de production de la turbulence donné par

$$\mathcal{P}_{kl} = - \langle v_i v_k \rangle \frac{\partial \langle V_l \rangle}{\partial x_i} - \langle v_i v_l \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_i} \quad (3.12)$$

C'est l'équation générale pour les tensions de Reynolds 3.11 qui va être particularisée pour donner différents modèles de turbulence, par exemple dans les cas inhomogènes anisotropes, et déduire différents tenseur  $\mathcal{G}_{ij}$ . Pour le cas simple de la turbulence homogène isotrope, en définissant le tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  par

$$b_{ij} = \langle v_i v_j \rangle / \langle v_l v_l \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (3.13)$$

il existe un modèle comportementale empirique pour les tensions de Reynolds formulé par Rotta en 1951 :

$$\frac{d}{dt} \langle v_k v_l \rangle = \mathcal{P}_{kl} - (2 + 3 \cdot C_0) \varepsilon_t b_{kl} - \frac{2}{3} \varepsilon_t \cdot \delta_{kl} \quad (3.14)$$

Pour notre modèle Lagrangien donc, on utilise cette équation de Rotta (lire Pope (1994a)) avec son terme de rappel à l'isotropie (terme d'isotropisation) pour

déduire  $\mathcal{G} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0)\frac{\varepsilon_t}{k_t}$  où  $k_t = \frac{1}{2} \langle v_t^2 \rangle = \mathcal{G}_{i,i}$  pour tout  $i \in [1, d]$ .

Dans notre étude (nous justifierons ce choix au chapitre 8), nous ne considérerons que ce modèle Lagrangien simplifié (SLM) :

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0)\frac{\varepsilon_t}{k_t} [V_t - \langle V \rangle] dt + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} dW_t \\ V_0 = v_0 \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $\varepsilon_t$  et  $k_t$  ont été définis précédemment.

On notera que lorsque  $k_t = \frac{1}{2} \langle v_t^2 \rangle$  est nul, alors  $v_t$  disparaît et il n'y a pas de turbulence, on sort donc du domaine d'utilisation de ce modèle. Pour  $k_t \rightarrow 0^+$  alors le rapport  $\frac{\varepsilon_t}{k_t} \rightarrow \infty$ , le temps Lagrangien  $T_L \rightarrow 0$  et la turbulence est molle.

Le temps Lagrangien  $T_L$  pour le modèle Lagrangien simplifié s'exprime par :

$$T_L = \frac{4}{2 + 3 \cdot C_0} \frac{k_t}{\varepsilon_t} \quad (3.16)$$

Le paramètre  $\varepsilon_t$  note le taux de turbulence, quand ce terme grandit l'agitation turbulente augmente. Inversement si  $\varepsilon_t \rightarrow 0$  on devient laminaire et à l'annulation le modèle n'a plus de sens.

On reverra ces faits dans le chapitre 8 avec les limites naturelles du modèle Lagrangien discrétisé, conditionné et localisé que l'on utilisera dans le filtrage des mesures de vitesses d'un fluide turbulent.

Quoiqu'il en soit, nous avons effectivement déduit un modèle Lagrangien, utilisant la structure de grande échelle du fluide, mais de ce fait il n'est pas fermé. Les 2 termes  $-\nabla_x \langle p \rangle$  et  $\varepsilon_t$  sont extérieurs au modèle et traduisent l'influence du milieu aléatoire. On notera qu'il existe un modèle de diffusion pour les gradients de pression dans la turbulence [Girimaji et Pope \(1990\)](#) que l'on utilisera pas.

On peut porter quelques commentaires sur la constante de Kolmogorov  $C_0$ . Par simplification nous avons identifié la constante du modèle Lagrangien avec la

constante de Kolmogorov. En fait l'égalité entre ces 2 constantes est une question qui fait débat et n'est pas encore tranchée. Déjà dans l'esprit d'A.N. Kolmogorov il s'agit d'une constante, mais pour rendre compte de l'intermittence, notamment, cette constante ne peut être que locale. En fait elle doit dépendre de l'écoulement et la résolution à laquelle on le regarde. D'après des essais numériques réalisés par Pope, Yeung et Sawford (Pope (2002a)), par exemple, dans le cas du modèle simplifié SLM, on peut prendre  $C_0 = 2.1$ . On peut lire également l'article de Heinz (2002), qui décrit expérimentalement en utilisant des simulations DNS les variations de la constante de Kolmogorov en fonction de la modélisation choisie, et du nombre de Reynolds.

On notera que par construction les modèles de type SLM respectent les lois de Kolmogorov pour la turbulence homogène. Notamment, le spectre de puissance associé à  $V_t$  aura une pente en  $-5/3$  répondant ainsi à la seconde loi de K41. Ceci est particulièrement intéressant lorsqu'on cherche par la modélisation Lagrangienne à restituer des quantités énergétiques correspondant à cette gamme de turbulence, par exemple en modélisation LES ou RANS.

Les modèles dont on vient de parler sont valables localement, et sont dénommés modèles 1 point. On peut en déduire des modèles 2 points, qui vont décrire la dispersion d'élément fluide Pope (1983). Sensiblement, ils auront les mêmes caractéristiques dynamiques, et sont générés directement par l'équation sur les fluctuations ( voir Thomson (1986a,b, 1990), ou plus récemment Das et Durbin (2005) pour la turbulence stratifiée en 3D).

Pope (1981) ou Haworth et Pope (1987) entre-autres se sont intéressés à la modélisation de la pdf associée au flot des modèles Lagrangiens pour différents types de turbulence ou même dans le cas d'écoulements autosimilaires. Mais ils n'ont jamais abordé les problèmes de définition et d'existence de ces fonctions de distribution.

S.B. Pope a décrit en 1995 pour une intégration numérique l'utilisation de particules en interaction pour modéliser la dynamique Lagrangienne (nous reprendrons cela en détail au chapitre 8). Pope estime alors l'erreur de la modélisation particulaire avec une majoration en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  où  $N$  est le nombre de particules Pope (1995). L'estimation qu'il donne est indépendante du temps, ne tient pas compte

de la discrétisation de l'équation continue. Il conviendrait d'être un peu plus précis à ce sujet et nous évoquerons donc cela dans le chapitre 8.

Apportons pour le moment un complément pour les flots de turbulence inhomogènes. Il existe des modèles de Langevin généralisés décrit dans [Haworth et Pope \(1986\)](#), ou plus tard dans [Van Sooten et Pope \(1997\)](#). Ces modèles sont nécessaires dans certains écoulement et à certaines échelles lorsque se révèlent des structures dans la turbulence. On est alors amené à définir une quantité, la fréquence de turbulence  $\Omega = \frac{\varepsilon}{k}$  et pour fermer le système il est nécessaire d'ajouter une équation sur  $\Omega$  ou sur les spectres d'énergie (voir [Fox \(1997\)](#) ou [Fox \(1999\)](#)). Les méthodes dans ce cas doivent à la fois résoudre une équation portant sur la vitesse et sur le terme de dissipation d'énergie (voir [Pope et Chen \(1990\)](#) ou [Chevillard \*et al.\* \(2003\)](#), ou pour une application [Pope \(1991\)](#) ou [Van Sooten et Pope \(1997\)](#); [Sooten \*et al.\* \(1998\)](#)). Mais les équations sur  $\Omega$  sont compliquées et difficiles à manipuler, et les modèles empiriques présentés par les physiciens pas forcément convaincants.

Plus récemment Pope avec le modèle Lagrangien généralisé a déduit un modèle pour l'accélération ([Pope \(2002a\)](#)). Pour ces modèles comme pour ceux sur la vitesse, on a des problèmes de fermeture, notamment au second ordre [Pope \(1994b\)](#). On rentre alors dans le domaine des difficultés intrinsèques aux méthodes numériques de résolution d'écoulements fluides.

## 3.2 Techniques Lagrangiennes en simulation des flots turbulents

Les liens entre les modélisations Lagrangiennes et modélisations directes se font dans les deux sens ([Sawford et Yeung \(2001\)](#)) à la fois pour de la validation et pour de l'aide à la paramétrisation des petites échelles.

Il est nécessaire de valider les modèles Lagrangiens par des expériences numériques de « terrain ». Le plus pertinent est de les confronter à la réalité. Mais on se trouve face à des difficultés de 2 natures :

- les mesures faites lors d'expériences physiques n'ont pas la finesse requise

pour permettre d'obtenir des valeurs fiables des constantes, ou comportent des niveaux de bruits trop importants pour une exploitation à haute cadence. C'est le cas lorsqu'on cherche à estimer des constantes.

- il est crucial, pour pouvoir valider un modèle Lagrangien, de suivre des particules placées dans un flot turbulent et de leur mouvement déduire les caractéristiques de l'écoulement. Ce suivi physique dans un fluide turbulent voir fortement turbulent et de manière inhomogène est extrêmement délicat.

Pour palier ces difficultés expérimentales, on use alors de modélisations directes des écoulements de type DNS pour valider les modèles et/ou de confirmer des paramétrisations prises pour élaborer les modèles Lagrangiens (on peut lire [Sawford et Yeung \(2001\)](#), [Fox \(1999\)](#) ou [Malik et Vassilicos \(1999\)](#) ou plus récemment [Laval \*et al.\* \(2003\)](#)). Pour se faire, on est amené à utiliser un certain nombre de cas test pour lesquels la résolution numérique est portée à son maximum, avec une paramétrisation physique la plus fine, pour rendre compte des échelles les plus petites. C'est un travail lourd mais indispensable. Concernant le suivi de particules, on peut retourner le problème. En effet le sujet du suivi de particules reste délicat et les techniques Lagrangiennes peuvent être utilisées pour suivre des éléments fluides dans des simulations DNS [Yeung et Pope \(1988\)](#). On peut les voir aussi comme technique d'étude du transport de composants passifs dans un fluide turbulent (lire par exemple [Sawford et Yeung \(2003\)](#) ou [Fox \(1997\)](#)).

Nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, toutes les méthodes de simulation sont en butte à des problèmes de fermeture et de paramétrisation de la dynamique des petites échelles. C'est plus particulièrement le cas pour les méthodes LES qui peuvent tirer profit de l'utilisation des méthodes Lagrangiennes pour paramétrer l'apport énergétique ou dynamique des structures sous-maille sur les grandes échelles ( lire [Gicquel \*et al.\* \(2002\)](#) ou [Sheikhi \*et al.\* \(2003\)](#) ou encore [Wang \*et al.\* \(2004\)](#)). Dans ce cas la résolution particulière s'effectue dans une maille considérée comme une cellule contenant un certain nombre de particules qui bougent avec une dynamique de grande échelle donnée par le solveur pour cette maille (voir [Xu et Pope \(1997b\)](#)). Ce type de technique a été testé numériquement et montre que les erreurs décroissent linéairement avec le nombre de particules et avec le raffinement de la grille (dans une série de travaux sur ce thème [Xu et Pope \(1997b\)](#) ou [Xu et Pope \(1997a\)](#) et finalement [Xu et Pope \(1999\)](#)).

Dans le même registre de méthode numérique, on citera les travaux en cours conjointement à l'INRIA de Sophia-Antipolis et à l'ADEME pour la prévision

de vent atmosphériques locaux en utilisant des modèles de résolution différentes emboîtés avec pour les structures les plus fines des modèles Lagrangiens généralisés. Les premiers résultats de faisabilité et l'approche théorique qui en est faite semblent prometteurs, en attendant que sortent des résultats numériques sur lesquels on pourra juger définitivement de l'intérêt des modèles Lagrangiens en météorologie, on peut penser qu'il y aura là un fort potentiel à exploiter. La notion d'acquisition d'un champ multidimensionnel le long d'un chemin que l'on a développé au chapitre 7 va permettre d'amener une modélisation probabiliste du flot du système dynamique passant par un point de grille qui pourra être utile à ces techniques de modélisation utilisant des descriptions Lagrangiennes.

La turbulence étant décrite au moins dans ses grandes lignes nous examinerons le cas particulier de la turbulence atmosphériques et des méthodes de mesures et de traitement du signal actuellement en vigueur dans la communauté des météorologistes.



# Chapitre 4

## Mesures et traitement du signal en Micro-Météorologie

Après avoir parlé du phénomène de la turbulence dans son ensemble, ce chapitre va permettre de dégager les points importants qui caractérisent la turbulence atmosphérique.

Dans l'atmosphère, de manière plus aigüe que dans le laboratoire, la notion d'échelle est primordiale. Il faut d'abord s'entendre sur le sens que peut avoir le terme turbulence dans l'atmosphère. En effet les écoulements auxquels on peut s'intéresser peuvent être de la taille d'un nuage, d'une ville, d'une vallée, d'une région, d'un pays, d'un continent ou de la planète . . . L'atmosphère si elle est le siège d'écoulements tridimensionnels, est un milieu où la dimension verticale (au maximum 10km, on ne parle que de la troposphère) n'est pas du même ordre de grandeur que les dimensions horizontales (c'est là qu'il faut distinguer les domaines d'études). Si le domaine d'étude est petit (domaine local, la vallée par exemple, ou microlocale comme la structure de la marge d'un nuage) les caractéristiques des écoulements relèveront de la turbulence tridimensionnelle, alors qu'avec un domaine de grande taille (échelle synoptique de la taille d'un pays, ou planétaire) les mécanismes seront décrits par des écoulements en 2D. Intrinsèquement liée à l'échelle spatiale du système d'étude, l'échelle temporelle va constituer une autre caractéristique. En effet lorsque le modélisateur ou l'expérimentateur étudie la dynamique du bord d'un nuage, il se place à l'échelle de quelques secondes, alors qu'avec un système synoptique le temps caractéristique est de l'ordre de quelques dizaines d'heures. On décrit d'ailleurs ces échelles par un nombre dit de Rossby, similaire au nombre de Reynolds, défini par le rapport  $R_o = \frac{U}{fL}$  où  $f$  est l'ordre de

grandeur de la force de Coriolis. Ainsi pour les latitudes moyennes, l'échelle planétaire correspond à  $L = 10000$  km soit  $R_o = 0.01$ , l'échelle synoptique  $L = 1000$  km soit  $R_o = 0.1$ , la micro-échelle  $L = 0.1$  km soit  $R_o = 1000$ .

La dynamique des fluides atmosphériques n'a pas comme seule particularité les phénomènes liés à l'échelle. En fonction de la taille des systèmes, il devra aussi être nécessaire de prendre en compte des effets donnés par (sans ordre d'importance) :

- Le caractère ondulatoire du fluide.
- La force de Coriolis induite par la rotation terrestre.
- La présence d'eau sous diverses formes (fluides polyphasiques).
- Des apports énergétiques variés (Rayonnements solaires ou terrestres, changements d'états).
- La force de gravitation.
- Des structures thermiques sur l'horizontal ou la verticale.
- La flottabilité des éléments du fluide (qui est une conséquence des 3 points précédents).
- Des interactions avec les surfaces.

Pourtant les systèmes d'équations de base sont les mêmes quelle que soit l'échelle et reposent sur la conservation de grandeurs lors du transport Lagrangien :

- conservation de la masse (équation de continuité).
- conservation de la quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes avec présence de forces extérieures).
- conservation de l'énergie.

Si on ne prend pas en compte des contenus en eau sous forme de vapeur ou dans d'autres états, le système complet s'écrit pour un domaine  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}^3(R+h) \setminus \mathcal{S}^3(R)$  compris entre deux sphères l'une ayant le rayon terrestre  $R$  et l'autre augmentée de la hauteur de l'atmosphère modélisée. Ce sont des équations Eulériennes valables en des points  $x$  de  $\mathcal{D}$  et pour un temps  $t > 0$  (voir [De Moor \(1983\)](#)) et modélisant l'air sec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho U) & \text{Equation de Continuité} \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - U \cdot \nabla U + g + \mu \Delta U - 2 \cdot \Omega \wedge U & \text{Equation du mouvement} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -U \nabla \theta + \mu_\theta \Delta \theta + \frac{\theta}{T} \frac{dQ}{dt} & \text{Equation sur l'énergie interne (4.1)} \\ p = \rho R T & \text{Equation des gaz parfaits} \\ T = \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} & \text{Equation de la température} \end{array} \right.$$

où l'on a retrouvé la densité  $\rho$ ,  $g$  le paramètre de gravité,  $\Omega$  le paramètre de la force de Coriolis,  $\theta$  la température potentielle,  $\mu_\theta$  un coefficient scalaire,  $T$  la température cinétique,  $Q$  l'apport extérieur de Chaleur,  $R$  le paramètre d'état des gaz parfaits,  $C_p$  la capacité calorifique des gaz parfaits,  $p_0$  le champ de pression sur  $\mathcal{S}^3(R)$ .

La température potentielle  $\theta$  est définie comme la température normalisée, corrigée des effets de la pression (dilatation ou compression). Il manque à ce système des conditions aux bords ( $\mathcal{S}^3(R)$  et  $\mathcal{S}^3(R+h)$ ) et initiales ( $t=0$ ) pour les quantités modélisées  $U$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $p$  et  $T$  et la définition de leurs espaces pour que la solution du système existe. On notera que les 2 dernières équations sont phénoménologiques et servent à fermer le système. De même l'équation sur l'énergie interne n'est pas exacte mais utilise l'approximation de gaz parfait de l'atmosphère.

Ces équations correspondent à un fluide qui n'est plus incompressible, et nous ne connaissons pas de travaux sur l'existence et l'unicité de solutions faibles ou fortes pour ce système précis, ni de représentations probabilistes pour le système complet avec les fermetures que l'on y a adjoint. Nous ne nous étendrons pas plus sur ce sujet qui mériterait une étude complète. Il existe pour l'équation de Navier-Stokes compressible seule des résultats d'existence et de régularité en temps petits de solutions faibles pour des formes particulières des champs de température (comme des températures constantes) ou par exemple pour des écoulements isentropiques. Il existe une simplification du système 4.1, dénommé Système de Boussinesq, pour lequel on réintroduit un champ de vent à divergence nulle (fluide incompressible) et on se donne une forme particulière pour l'équation de l'énergie :  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -U \nabla \theta + \mu_\theta \Delta \theta + |\nabla U|^2$ . Pour le système de Boussinesq, dans le cas d'un fluide non géophysique (on fait disparaître de l'équation du mouvement le terme de Coriolis et l'équation des gaz parfaits), avec des conditions initiales et aux bords régulières (de type  $L^p$  ou  $L^2 \cap L^\infty$ ) sur un domaine borné, il existe des résultats sur l'existence des solutions dans  $L^2 \cap L^\infty$  mais on sait très peu de choses sur leur unicité en dehors de la dimension 2, en effet l'unicité pour un tel système est un sujet difficile par le couplage très non-linéaire entre les deux équations du mouvement et de l'énergie. On peut lire sur ce thème [Diaz et Galiano \(1997\)](#).

A chaque échelle, il nous faut faire une analyse en ordre de grandeur qui va permettre de mettre en valeur les termes importants dans chaque équation, transformer les quantités pour correspondre à la géométrie, négliger les termes de faibles

poids. Ces transformations sur les équations ont pour but de comprendre les phénomènes et rendre évidents les mécanismes, alors que dans le cas simulations, les modèles de prévisions utilisent des systèmes d'équations complets.

La météorologie à grande échelle nécessite des réseaux d'observations étendus sur l'ensemble de la planète, pour être assimilés ensuite par des modèles météorologiques, d'abord pour analyser le temps présent (techniques d'assimilation, qui relèvent d'un problème de contrôle optimal proche du filtrage non-linéaire) puis pour prévoir le temps à venir avec les conditions initiales assimilées. Ces prévisions peuvent être à des fins opérationnelles (pour l'information ou la protection des personnes et des biens) ou de recherche (pour comprendre des mécanismes hors de portée de l'analyse des équations). Ces modèles de prévision sont scindés en deux : un coeur dynamique qui structure les mouvements de grandes échelles, mais tous les processus physiques ne sont pas résolus, et une modélisation physique restituant l'effet moyen sur une maille des processus non résolus (échanges de chaleur avec l'extérieur, chaleurs latentes libérées, flux d'énergie dus à la turbulence à l'échelle de la maille ou sous maille ...).

Pour régler ces paramétrisations physiques, il faut étudier des cas réels, mesurer les quantités physiques dans l'atmosphère réelles et vérifier leur effet à l'initialisation ou leur restitution lors des prévisions. On le voit, les quantités d'intérêt correspondent aux échelles les plus petites, et c'est dans ce cadre que notre étude se place. Les mesures servant à décrire pour le mieux les structures et les transferts d'énergie dans ces échelles locales et microlocales.

Il va sans dire qu'à l'instant où l'on effectue une mesure expérimentale, on introduit une erreur aléatoire et un bruit tout aussi aléatoire, et que pour pouvoir exploiter cette mesure il faudra séparer le signal utile, pour ne pas dire utilisable, de la partie sans information sur la quantité physique espérée. C'est le but du filtrage des mesures.

Dans le domaine où l'on se place, celui de la turbulence tridimensionnelle de petite échelle, les quantités mesurées ont une nature où l'aléa prédomine. On est alors en face d'un problème de séparation d'un signal et d'un bruit qui sont tous deux aléatoires. Plus les lois de probabilités des deux phénomènes seront différentes, mieux on pourra séparer les deux parties. Nous reverrons cela dans le

chapitre 9, en attendant nous commençons par une sommaire mise en revue de l'état de l'art en mesures et traitement du signal en Micro-Météorologie.

## 4.1 Mesures expérimentales des vitesses d'un fluide turbulent

La mesure des vitesses d'un fluide turbulent est d'un ouvrage difficile si l'on cherche une certaine précision. En effet, il faut :

- Mesurer sans perturber l'écoulement.
- Rendre compte de structures fugaces et tridimensionnelles.
- Assurer que le système de mesures, d'enregistrement ou de traitement soit sans biais.
- Ne pas introduire de bruits comportant des cascades d'énergie comparables à la turbulence.
- Avoir une cadence de mesure la plus élevée possible (instrumentalement).

Le dernier point est la conséquence de la théorie de l'information de Shannon (théorème 4.4.1) : Pour pouvoir restituer un phénomène de fréquence  $f_p$  Hz il faut le mesurer au minimum à la fréquence  $f_s = 2.f_p$  Hz (fréquence de Shannon). Ainsi l'acquisition de mesures crée une discrétisation du signal qui opère un filtre passe-bas dans les données. Les phénomènes de fréquence plus élevés que la fréquence de Shannon sont à prendre comme des bruits sur la dynamique du signal. Nous reverrons les conséquences de ce fait au chapitre 7.

Si l'on s'intéresse à la mesure de la vitesse d'un écoulement, les premiers dispositifs étaient de simples fils chauffés électriquement (mesures à fils chauds Favre *et al.* (1976)) dont le maintien à température signalait le refroidissement du senseur par ventilation et donc donnait la vitesse du fluide. Plus récemment, l'effet Doppler a été utilisé avec des anémomètres à ultrason, la vitesse du fluide étant donnée par le décalage fréquentiel du signal émis. Ces anémomètres soniques sont ceux qui perturbent le moins le milieu (pas de transducteur dans l'écoulement), voir Wieser *et al.* (2001), mais ils nécessitent une grande cadence d'acquisition et un traitement statistique pour retrouver la vitesse à une cadence moindre. C'est ce type d'appareil de mesures que nous utiliserons dans les applications de la partie III

On citera deux types de systèmes de mesures, que l'on n'abordera pas dans ce travail et qui ont trait à la télédétection, l'un pour les mesures de vitesses en veine d'écoulement, l'autre pour le vent atmosphérique en altitude. Ces techniques ont en commun l'analyse du déplacement de traceur passif, c'est à dire de particules physiques sans inertie se déplaçant dans le milieu observé comme les éléments fluides eux-mêmes.

En laboratoire on peut citer la vélocimétrie par image de particules (PIV) qui estime la vitesse de particules solides entraînées par l'écoulement à partir de deux photos successives prises à un très court intervalle de temps. Cela nécessite d'ensemencer le milieu par des traceurs inertes (non réactant avec le milieu). Les techniques basées sur le suivi de structure sur image ne sont pas l'objet de ce travail mais ont été avantageusement traités par des méthodes particulières de même nature dans la thèse d'Anne Cuzol ([Cuzol \(2006\)](#)).

En mesures atmosphériques, les systèmes de télédétection utilisent la réflexion d'onde électromagnétique (profileur de vent Radar ou Lidar) ou acoustique (Sodar) soit sur des structures thermiques de petites échelles marquant la turbulence atmosphérique, soit sur des aérosols naturellement présents (qui peuvent être d'origine terrestre ou anthropique) dans l'atmosphère. La mesure du vent est alors dépendante de la présence des réflectants et peut notamment être un frein à l'utilisation des Lidars dans les couches supérieures de l'atmosphère où les concentrations en aérosols deviennent trop faibles. Ces sondeurs ont un intérêt certain en faisant des observations distantes et peuvent faire partie de la charge utile de satellites dédiés aux mesures environnementales.

Enfin il y a une dernière grande classe d'observations atmosphériques avec les mesures in-situ réalisées par des plateformes mobiles. Le vent n'est alors pas directement mesuré mais déduit d'autres observations en retranchant la vitesse de l'air par rapport à la plateforme de la vitesse du mobile par rapport au sol. Dans les mesures aéroportées, ce n'est pas le vent relatif qui est lui-même mesuré mais ces conséquences sur des senseurs divers comme des capteurs de pression, de température, d'humidité multipliant ainsi les sources d'erreur. Le calcul se fait au travers d'approximations thermodynamiques simples ([Lenschow \(1986\)](#)) qui permettent de déduire la vitesse relative du fluide par rapport à la plateforme. L'estimation des vitesses du fluide pour les plateformes mobiles est alors un problème d'estimation par fusion de données, qui pourra être le prolongement de l'étude menée dans ce mémoire.

In fine, quelle qu'en soit la méthode, les mesures doivent restituer les particularités des fluides atmosphériques que nous détaillons dans la section suivante.

## 4.2 Les spécificités de l'atmosphère relatives aux mesures expérimentales

Nous n'effleurons ici que les particularités qui vont servir à étayer les choix de modélisations que nous ferons dans la partie III. Les particularités de l'atmosphère par rapport au fluide de laboratoire tiennent dans les structures verticales ou horizontales des écoulements, dans leur nature polyphasique hétérogène, avec la présence de vapeur d'eau, d'eau liquide, de glace, de corps précipitants, d'aérosol, de composés chimiques. Qui plus est, l'ensemble des composés réagit selon des mécanismes non-linéaires où des ondes atmosphériques internes prennent part, notamment avec des comportements particuliers à proximité des surfaces.

Les tranches d'atmosphère près des surface, que l'on nomme Couches Limites Planétaires (CLP) ou de Surface (CLS), voir Favre *et al.* (1976) ou De Moor (1983) seront nos domaines de mesure (entre 10 m et quelques km de la surface). A proximité des limites inférieures du domaine, cette partie de l'atmosphère a une dynamique que l'on ne retrouve pas dans les parties supérieures, en particulier elles sont le siège des turbulences générées par les rugosités des sols ou les effets thermiques dus aux chauffages ou refroidissements de la surface (on trouvera une description des structures locales de l'atmosphère dans Hunt *et al.* (1991)).

Pour se donner une idée plus précise on peut faire appel à un modèle conceptuel de l'atmosphère. Si l'on considère l'atmosphère comme un domaine sphérique compris entre deux surfaces limites (la surface planétaire et la tropopause), on peut recouvrir le domaine global par des sous-domaines (aux limites variables et mobiles) constituants des zones possédant des caractéristiques physiques homogènes et relevant d'un même type de régime d'écoulement, chacun de ces éléments du recouvrement ayant des conditions aux bords et des circulations propres (modèles de bulles homogènes). On est alors en mesure de voir chacun des sous domaines comme un élément simplifié avec une dynamique descriptible soit par des conditions limites propres ou par un jeu de paramètres caractéristiques. Ce modèle conceptuel servira à justifier les méthodes de mesures classiques et les traitements

qui seront opérés sur les données. Nous l'utiliserons également lors de la conception du filtre non-linéaire proposé dans la dernière partie de ce mémoire.

Les signaux que l'on va alors étudier proviendront d'un fluide turbulent tridimensionnel. On y cherchera donc les caractéristiques que l'on a décrites au chapitre 2. En fonction de l'échelle et de la résolution dont on dispose, on pourra y voir une turbulence homogène, stratifiée ou plus rarement complètement inhomogène. Hormis dans ce dernier cas, un des critères de qualité des mesures de vent pourra être la forme du spectre de puissances des signaux où l'on aimera y retrouver un spectre dit de Kolmogorov suivant une loi en puissance en  $-5/3$ .

Correspondant aux travaux théoriques mentionnés au chapitre 2 et aux mesures faites en laboratoires, des études existent ([Schmitt \*et al.\* \(1994\)](#)) sur le caractère multifractal de la turbulence atmosphérique. De cette description statistique, nous retiendrons deux choses :

- La présence dans les signaux atmosphériques d'intermittence fortes (écarts importants aux lois de Kolmogorov).
- L'existence de densités spectrales à queues lourdes (événements rares de poids non négligeables).

Sur la figure 4.1, on examine une série temporelle, le spectre de puissance, la série des incréments et leur histogramme empirique. Les données sont issues de mesures réelles effectuées le 12 Mai 2006 sur le site de Météo-France à Toulouse entre 09h00 et 09h30. Elles ont été relevées par anémomètre à ultrason qui permet d'obtenir une grande fréquence de mesure et peu de perturbation de la mesure par le capteur lui-même. Le vent est déduit de relevés de vitesses de propagation et déphasages d'onde sonore dans un espace libre d'obstacle. Pour cette série de mesures, la fréquence d'échantillonnage de l'instrument était de 50 Hz, une mesure toutes les 0.02 seconde ce qui représente dans ce cas précis, en terme d'échelle spatiale, un point de mesure tous les 8 cm. Ces graphiques illustrent l'allure de marche aléatoire que peuvent avoir les mesures dynamiques dans l'atmosphère. On y voit également un spectre de puissance aligné sur une pente en  $-\frac{5}{3}$  dans un diagramme en échelle logarithmique ce qui correspond à la loi de Kolmogorov sur l'énergie. En regardant plusieurs mesures, on pourrait noter qu'à cette échelle les structures horizontales sont homogènes. La dimension verticale a un comportement différent par l'existence des forces de pesanteur et de flottabilité, on le verra plus en détail dans la partie III. Les incréments montrent des histogrammes proches de lois gaussiennes, avec cependant des queues plus épaisses. C'est par définition la manifestation de l'intermittence et de l'existence de lois légèrement



différentes de celles proposées par Kolmogorov. La proximité avec les lois gaussiennes permet de justifier en traitement de la donnée météorologique standard l'utilisation de techniques propres à ces lois, soit dans le traitement statistique des phénomènes, soit dans leur modélisation mathématique.

Pour terminer cette courte présentation, nous n'y serons pas confrontés, mais les signaux atmosphériques couvrant une très large gamme d'échelle montrent un spectre de puissance avec deux signatures différentes et un trou spectral, comme l'illustre la figure 4.2. Dans les échelles les plus larges on y trouve un spectre caractéristique de la turbulence bidimensionnelle en  $-3$  avec une cascade d'énergie inverse (l'énergie va vers les structures de plus en plus grande), puis une zone intermédiaire avec un trou qui raccorde le spectre de la turbulence de micro-échelle tridimensionnelle Frisch (1980) en  $-5/3$  correspondant à la cascade directe des énergies de grandes structure vers les plus petites. Il s'agit de la manifestation de la césure grandes/petites échelles que l'on évoquait au début de ce chapitre où les plus grandes structures peuvent être considérées comme étant en 2D. En terme d'échelle spatiale le changement de pente spectrale se situe entre 600 et 800 km, bien au-delà du problème de la mesure expérimentale rapide qui nous concerne.

### 4.3 Etat des lieux en mesures atmosphériques

Nous nous intéressons aux mesures faites de manière systématique ou ponctuellement lors de campagnes expérimentales. Il existe également des données météorologiques recueillies quotidiennement dans le réseau d'observation mondial à des fins d'analyse et de prévisions des conditions atmosphériques de grandes échelles, mais appellent des problèmes de filtrage mais qui ne relèvent pas de notre présent travail.

En micro-météorologie ou météorologie de moyenne échelle, les moyens mis en œuvre pour effectuer ces mesures sont variés et fortement dépendants du but de la mesure. Elles peuvent être faites sur des tours terrestres, sur des plates-formes (plus ou moins mobiles) en mer comme les bouées ou les bateaux, à partir d'avions spécialement instrumentés, de ballons emportant des capteurs dédiés, voire par des satellites particuliers équipés de sondes.

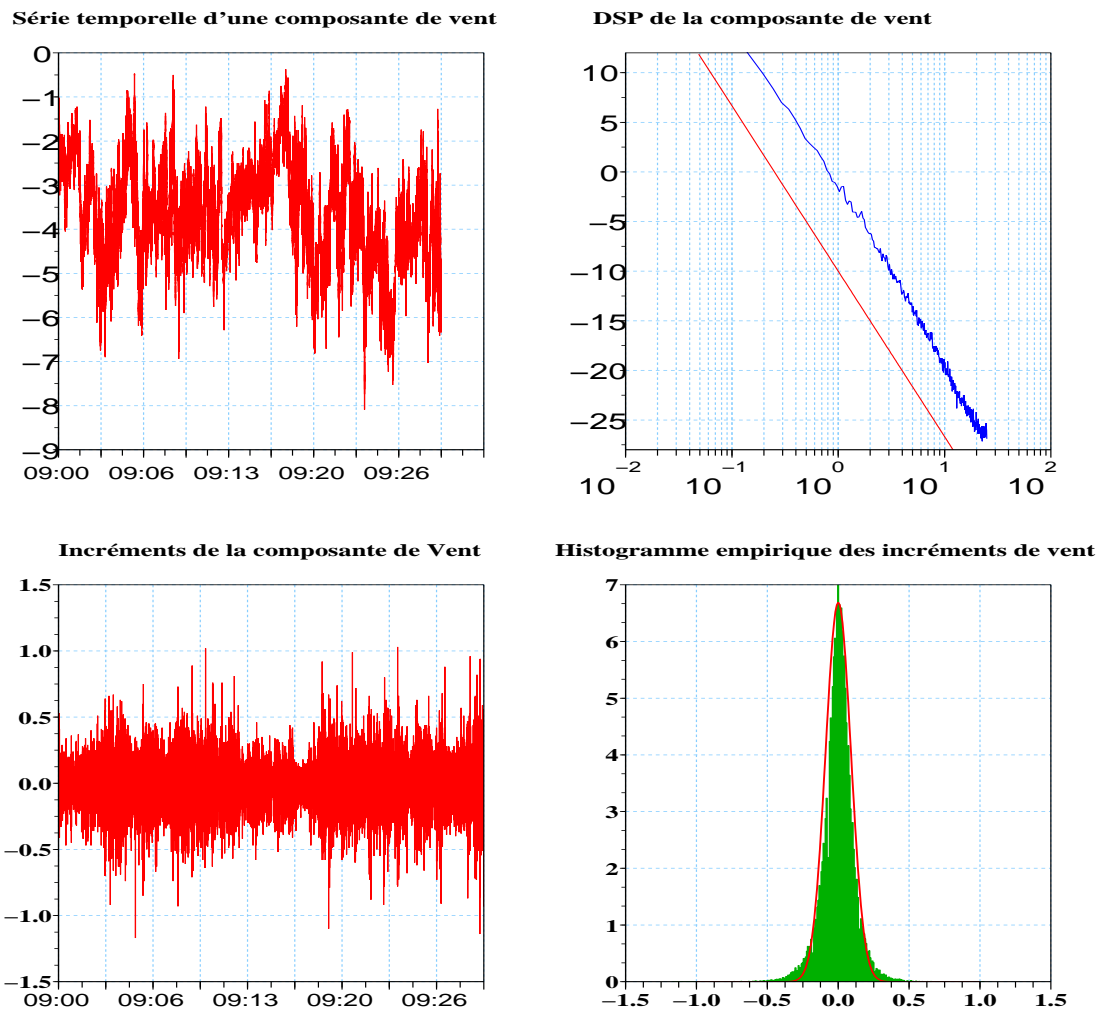


FIG. 4.1 – En haut série temporelle et spectre de puissance d'une composante du vent mesurée à la fréquence d'acquisition de 50 Hz sur le site de Toulouse-météo le 12/05/2006 de 09h00 à 09h30. En bas, série des incréments et histogramme empirique des incréments pour cette composante du vent, avec en rouge une courbe gaussienne théorique

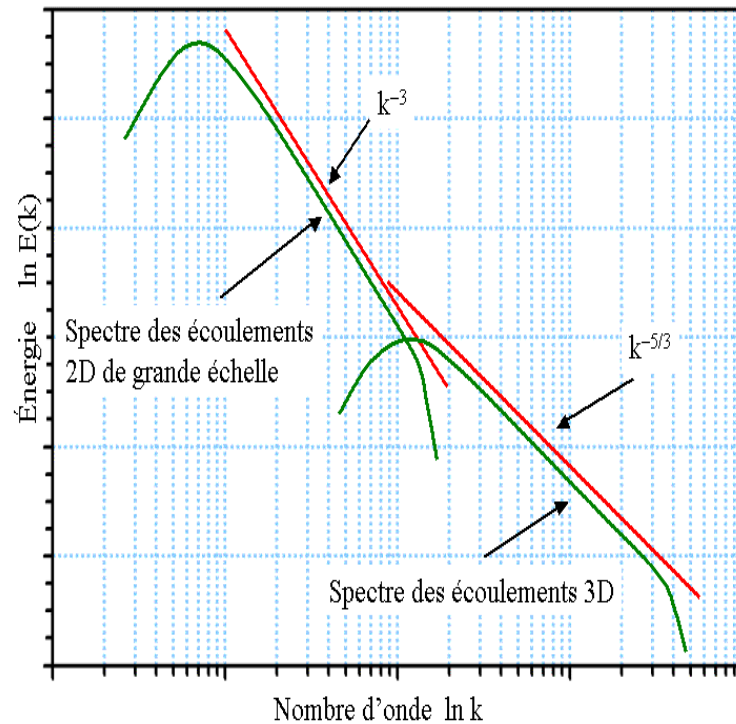


FIG. 4.2 – Spectres de puissance de vents atmosphériques 2D/3D

Il faut immédiatement noter, au travers des différents moyens que l'on vient d'énoncer et en dehors des satellites et de quelques imageurs aéroportés, que les mesures sont faites en un point alors que le fluide évolue en trois dimensions et selon un champ de vitesse que l'on ne peut atteindre par une mesure ponctuelle. Quand il s'agit de restituer des grandeurs nécessitant 2 points comme des corrélations spatiales (empirique), voire de reconstituer le champs multidimensionnel lui-même, on doit procéder à des estimations non forcément triviales. Pour compliquer encore le problème, bien souvent les grandeurs d'intérêt ne sont pas toujours directement mesurées, mais déduites de diverses mesures réalisées par différents instruments. Par exemple près des surfaces il est souvent nécessaire de quantifier les échanges d'énergie entre les milieux, ces flux ne sont pas directement accessibles mais calculés via d'autres grandeurs (vents, température, humidité ...) qui elles sont mesurables [Lee et al. \(2004\)](#).

Le fait de ne pouvoir accéder directement aux mesures souhaitées n'est pas propre aux grandeurs élaborées comme les flux de surface. Sur une plateforme mobile il faut souvent corriger les valeurs de base mesurées (la température, le vent, l'humidité, ...) des effets de la dynamique du mobile. En effet nombre de paramètres sont affectés par la vitesse de l'air relatif sur le capteur : pour la tem-

pérature, par exemple, le capteur subit l'effet du flot d'air incident. Pour d'autres paramètres comme le vent, le problème est différent : on mesure deux vitesses, celle de la plateforme (avion, bateau, ...) par rapport à la surface et celle de la plateforme par rapport à l'air. De la différence des deux mesures, on obtient la vitesse du vent qui est définie comme la vitesse de l'air par rapport au sol. Ces techniques de correction sont bien décrites, documentées et utilisées quotidiennement, ([Lenschow et Spyers-Duran, 1989](#)) ou bien [Lenschow \(1986\)](#), mais supposent que les mesures soient nettes et sans bruits. Dans certaines gammes de fréquence, on le verra à la section suivante, cette approximation est justifiée. En revanche dès que les cadences de mesures augmentent, les bruits deviennent prépondérants et perturbent fortement les calculs. Il faut alors filtrer sans réduire la résolution fréquentielle. Jusqu'à présent, ce travail d'estimation à partir de données bruitées n'a jamais été réalisé.

Notons qu'il est possible (mais la technique n'est pas aisée) d'effectuer des mesures Lagrangiennes à partir de ballons dérivants que l'on cale pour une certaine altitude [Johnson \(2000\)](#). Une fois la méthode de mesure opérationnelle, l'expérimentateur est confronté au manque de directivité du ballon qui peut dériver hors des zones d'intérêt pour le météorologiste.

En tout état de cause, après avoir recueilli un jeu de données lors d'une campagne expérimentale, il est indispensable de réaliser un contrôle de qualité, [Lee et al. \(2004\)](#), afin de s'assurer de la bonne tenue des mesures et de la présence ou non de bruits ou de perturbations aléatoires qui pourraient être néfastes aux calculs. Il existe à ce sujet une littérature conséquente pour chaque technique de mesures expérimentales ou pour des quantités particulières comme les flux d'énergie ([Liebethal et Foken \(2001\)](#)).

La présence de bruits dans les mesures est en général détecté à l'examen visuel des spectres de puissances, en espérant que les bruits soient bien signés, i-e avec des spectres différents des quantités mesurées. Les perturbations les plus simples dans ce registre reposent sur les bruits blancs ou colorés pour qui les spectres sont très différents de ceux de la turbulence dans le domaine inertiel. La figure [4.3](#) montre sur une mesure de température, réalisée à Toulouse le 7 Avril 2006 entre 09h00 et 19h00 par un anémomètre sonique, un exemple de présence de bruit s'étalant sur toute la partie haute fréquence du spectre de puissance. Le signal physique turbulent devrait respecter un spectre de Kolmogorov avec une pente en

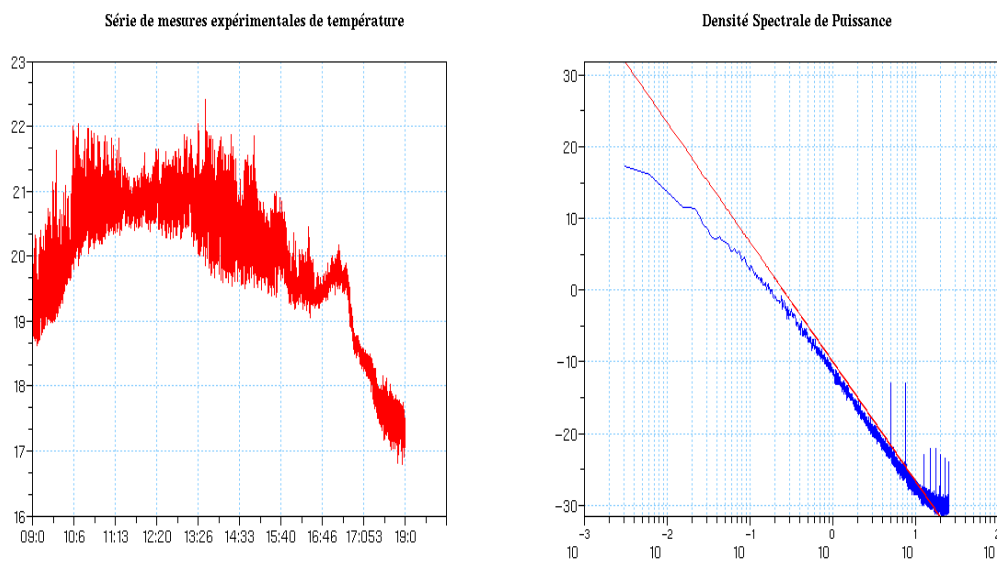
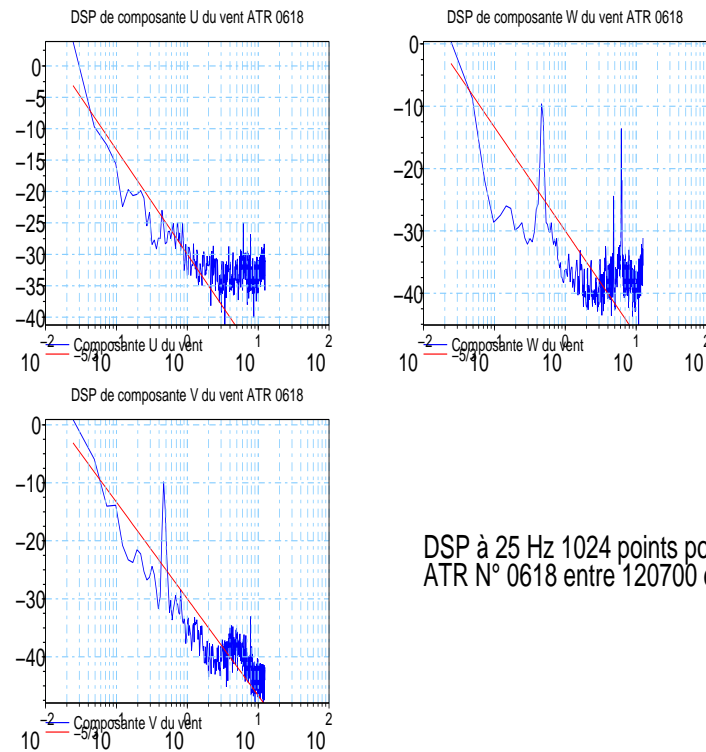


FIG. 4.3 – Série de données et densité spectrale de puissance pour une mesure de température réalisée à Toulouse le 7 Avril 2006 entre 09h00 et 19h00 par un anémomètre sonique. Le signal de base doit respecter un spectre de type Kolmogorov, on note la présence de bruit structuré devenant prépondérant au-delà de 8 Hz avec présence de pics d'harmoniques après 5 Hz dues au système d'acquisition de la mesure expérimentale.



DSP à 25 Hz 1024 points pour le Vent Calculé lors du vol ATR N° 0618 entre 120700 et 121000

FIG. 4.4 – Spectres de puissance à 25 Hz calculés sur 1024 points pour les 3 composantes du vent déduits de mesures avion entre 12h07 et 12h10. On voit la prédominance des bruits dans les DSP qui devraient suivre la pente en  $-5/3$  tracée en rouge.

$-5/3$ , mais on constate que le bruit devient le signal le plus important en terme de puissance au-delà de 8 Hz. On notera également la présence de pics d’harmoniques après 5 Hz dues au système d’acquisition de la mesure expérimentale. Dans un tel cas, après identification les différents bruits devraient être supprimés par des techniques de filtrage appropriées avant toute exploitation.

Pour ce qui est des mesures aéroportées, on peut examiner sur la figure 4.4 les spectres des 3 composantes du vent, non directement mesurées mais déduites des mesures dynamiques (vitesses, accélérations, attitudes de la plateforme, pression dynamique) et thermodynamiques (température, humidité, pression statique) effectivement relevées lors d’un vol. Les mesures viennent d’un vol de l’avion de recherche de Météo-France ATR42 effectué le 06 Juin 2006 lors de la campagne expérimentale AMMA au dessus du Niger. Les spectres de puissance présentés sont calculés sur des données échantillonnées à 25 Hz entre 12h07 et 12h10 UTC. On notera que les bruits sont alors les éléments prédominants, avec des spectres déviant largement de la pente en  $-5/3$ . Au delà de 5 Hz on constate pour le

spectre de puissance des pentes horizontales signant la présence de bruits blancs. Dans la pratique, ces données ont été corrigées en atténuant empiriquement certaines harmoniques dans les mesures venant d'un des instruments qui présentait une anomalie et perturbait la chaîne de calcul.

Si le débruitage des signaux aéroportés a motivé le démarrage de notre étude, nous ne l'évoquerons pas plus dans ce mémoire. En effet par la complexité des techniques d'évaluation du vent et la multiplicité des capteurs entrant dans le calcul, il nous paraît nécessaire de traiter différemment le cas de ces mesures indirectes, en utilisant une technique de fusion de capteurs par estimation particulière, qui relèvera d'un travail d'ingénierie stochastique à venir.

## 4.4 Les techniques de filtrage actuelles

Dans l'état actuel du savoir-faire, quelle que soit la plate-forme de mesures (fixe ou mobile), les méthodes de traitement du signal utilisées relèvent du filtrage linéaire. Ce post-traitement des données peut d'ailleurs avoir deux objectifs. En premier lieu la suppression des bruits indésirables pour ne garder que le signal utilisable. Le second objectif est différent, il vise à séparer le signal moyen (censé approcher la moyenne Eulérienne) de la fluctuation. Nous allons détailler ce point dans la sous-section 4.4.2. Dans les 2 cas, on procède aux estimations à l'aide d'un filtrage par des moyennes temporelles glissantes ou par bloc, ou par un filtrage en agissant les coefficients des transformées de Fourier ou des transformées par ondelettes.

Ces méthodes de filtrage empiriques habituellement mises en œuvre dans les traitements de la mesure en micro-météorologie reposent sur l'idée communément admise que le signal est aléatoire, de nature inaccessible, et que les composantes indésirables (bruits ou fluctuations) sont centrées et de dynamiques rapides, c'est à dire plus rapides que le signal support que l'on cherche à estimer. On n'utilise alors absolument pas l'information contenue dans la structure aléatoire des signaux, cherchant uniquement à exploiter la partie grande échelle du phénomène censée être plus régulière pour ne pas dire déterministe.

### 4.4.1 Filtrage linéaire des mesures météorologiques

En traitement du signal pour la micro-météorologie, les techniques de filtrage que nous appellerons classiques reposent sur une représentation fréquentielle des signaux et sur les conséquences de l'échantillonnage des quantités mesurées qui elles évoluent de manière continue. Nous allons présenter cela avant d'introduire les filtres linéaires communément utilisés.

Dans l'analyse des signaux, il faut distinguer 2 choses : le phénomène qui a généré la série de données avec le problème mathématique posé par sa représentation d'une part et le traitement et la mise en forme mathématique de la donnée discrète d'autre part.

Dans les sciences appliquées, les données ont toujours une longueur finie, on a donc tendance, pour les représenter, à ne considérer que des fonctions à support compact ; ces signaux sont en outre d'énergie finie, on prendra alors des fonctions  $\mathbb{L}^2$ . Muni de ces deux hypothèses par prolongation et en se plaçant sur le cylindre  $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ , on peut se restreindre à l'espace des fonctions périodiques de carré intégrable. Toujours, en ignorant tout caractère probabiliste, le signal physique peut alors être vu comme la superposition non-nécessairement finie d'ondes pures.

Chacune de ses harmoniques pures est représentée par une exponentielle complexe  $e^{int}$ , où  $n$  est le rang de l'harmonique. L'outil adapté à ce point de vue est la transformée de Fourier et on définit la série de Fourier pour  $x$  fonction périodique de  $\mathbb{L}^2$  (donc intégrable) :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{x}(n) e^{int} \quad (4.2)$$

$$\hat{x}(n) = \int_0^{2\pi} x(s) e^{-ins} ds \quad (4.3)$$

où  $\hat{x}(n)$  est la contribution au signal de chacune des harmoniques pures. Avec les hypothèses formulées, l'intégrale est bien définie et la série de Fourier est convergente.

On sait que l'ensemble des ondes pures forment une base orthonormée de  $\mathbb{L}^2$ , cette décomposition hilbertienne permet à la fois de représenter  $x$  une fonction  $\mathbb{L}^2$  par ses coefficients de Fourier  $c_n = \int_0^{2\pi} x(s) e^{-ins} ds$  mais aussi de la reconstruire à partir de la suite (infinie) de coefficients  $(c_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ ,  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{int}$ .



En pratique, cette représentation fréquentielle est utilisée, soit pour analyser un signal physique, soit pour développer des traitements sur le signal ou alors pour résoudre numériquement un système d'équation aux dérivées partielles. On pourra examiner au chapitre 7 une simulation d'écoulement turbulent utilisant une résolution numérique dans l'espace de Fourier. La base d'exponentielles complexes n'est pas la seule utilisable, en modélisation sur la sphère, l'analyse harmonique peut également se faire en utilisant des polynômes de Legendre ou des polynômes d'Hermite (fonctions propres du Laplacien) selon la nature de l'EDP support.

Revenons au traitement du signal et notamment au traitement numérique (et donc discret) du signal physique, l'ayant représenté de manière fréquentielle. Cette étape nécessite l'utilisation d'un outil supplémentaire : les distributions de Laurent Schwartz.

Le traitement numérique du signal et le filtrage que l'on appellera linéaire ne se font correctement qu'au travers du formalisme des distributions. La fonction test sera le signal à traiter et les opérateurs linéaires de traitement des distributions.

### Echantillonnage d'un signal continu périodique d'énergie finie

Le premier de ces opérateurs à examiner est le peigne de Dirac noté  $\text{III}$ , composé de la somme de distributions de Dirac décalées d'un pas de temps  $\Delta t$  :

$$\text{III}_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{n\Delta t} \quad (4.4)$$

Cet opérateur est utilisé pour définir l'échantillonnage d'un signal continu en temps  $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t)$  et fournit la collection de valeur  $(x_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ .

Claude [Shannon \(1948\)](#) a répondu aux deux questions que l'on peut se poser sur l'échantillonnage de données continues :

- Quelles sont les hypothèses permettant d'échantillonner correctement un signal ?
- Sous ces hypothèses peut-on revenir au signal continu partant de son échantillonnage ?

**Théorème 4.4.1** (Théorème de Shannon).

Soit  $x$  une fonction périodique  $\mathbb{L}^2$  telle que  $\text{Supp}(\hat{x}) \subset [-\lambda_s, \lambda_s]$  pour  $\lambda_s \in [0, +\infty]$  ( $x$  ne contient pas d'onde de fréquence supérieure à  $\lambda_s$ ). Alors

$$\forall \Delta t > 0 \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x(n.\Delta t)|^2 < +\infty \quad (4.5)$$

et, au sens des normes de  $\mathbb{L}^2$ , est vraie la formule d'interpolation de Shannon :

$$\forall \Delta t \leq \frac{1}{2.\lambda_s}, \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n.\Delta t) \frac{\sin[\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)]}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)} \quad (4.6)$$

On rajoutera que si  $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x(n.\Delta t)| < +\infty$  la formule de Shannon est vraie au sens de la convergence uniforme ce qui est le cas ici puisque  $x$  est supposée périodique.

*Démonstration.*

La preuve repose sur la transformée de Fourier de la fonction sinus cardinal *sinc* qui est le rectangle  $\mathbb{1}_{[-L,L]}$  pour  $L > 0$  dans l'espace de Fourier.

On considère pour tout temps  $t > 0$  une fonction continue  $x(t)$ ,  $\mathbb{L}^2$  périodique. On donne un pas de temps d'échantillonnage  $\Delta t > 0$  ce qui correspond à une fréquence d'échantillonnage  $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$ .

Pour tout  $n \geq 0$  on a

$$x_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \mathbb{III}_{\Delta t} \delta(s - n\Delta t) ds \quad (4.7)$$

Au sens des distributions, pour  $\mathbb{III}_{\Delta t}$  la convolution et la transformée de Fourier ont un sens puisque le peigne de Dirac est une distribution tempérée. Il est aisé de calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac  $\mathcal{F}(\mathbb{III}_{\Delta t})(\xi) = \frac{1}{\Delta t} \mathbb{III}_{\frac{1}{\Delta t}}(\xi)$ .

Les hypothèses sur  $x$  nous permettent de déduire :

$$\mathcal{F}(\mathbb{III}_{\Delta t} x)(\xi) = \frac{1}{\Delta t} \mathbb{III}_{\frac{1}{\Delta t}} * \hat{x}(\xi) \quad (4.8)$$

soit en exprimant la convolution avec le peigne de Dirac :

$$\mathcal{F}(\mathbb{III}_{\Delta t} x)(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\Delta t} \hat{x}\left(\xi - \frac{n}{\Delta t}\right) \quad (4.9)$$

Cette égalité a lieu dans  $\mathbb{L}^2(0, \frac{1}{\Delta t})$  d'où l'on tire :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x(n\Delta t)|^2 < +\infty \quad (4.10)$$

Ainsi le spectre du signal échantillonné est la somme infinie de translations du spectre (fini par hypothèse) de  $x$ , les translations étant des multiples de  $\frac{1}{\Delta t}$ .

On définit la fonction rectangle par  $\Pi_L$  comme l'indicatrice de l'intervalle  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , pour tout réel  $L > 0$ . Avec ce rectangle on va encadrer le spectre de  $x$  et annuler les répliques translatées.

La fonction  $\Pi_L$  est une distribution pour laquelle la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(\Pi_L)$  existe et se réduit à l'intégrale de l'exponentielle complexe sur l'intervalle  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  :

$$(\mathcal{F}(\Pi_L))(n) = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-ins} ds \quad (4.11)$$

qui par simple calcul donne :

$$(\mathcal{F}(\Pi_L))(n) = \frac{\sin \pi n L}{\pi n} \quad (4.12)$$

Il ne reste plus qu'à déduire la formule de Shannon.

■

La condition  $\Delta t \leq \frac{1}{2\lambda_s}$  est nécessaire pour fenêtrer le spectre de la fonction  $x$  sans perte. Si le spectre de Fourier de la fonction  $x$  est plus large que la fenêtre  $[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}]$  la reconstruction est inexacte.

En conséquence, le théorème de Shannon stipule qu'il faut échantillonner au moins à la fréquence de  $2n$  Hz un signal comportant des harmoniques oscillant au plus à  $n$  Hz. Si cette condition est valide *on obtient une information discrète équivalente à l'information continue reconstruite par la formule de Shannon.*

Inversement si le spectre du signal  $x$  est plus large, par l'échantillonnage on commet une erreur, et la valeur échantillonné est la somme du signal effectivement admissible ne comportant que des fréquences plus petites que la fréquence

de Shannon et d'un terme d'erreur de plus hautes fréquences agissant comme un bruit. Ce théorème est important dans notre travail, il amène un certain nombre de conclusions et permet de justifier certains points de notre modélisation Lagrangienne de la turbulence, nous verrons cela au chapitre 7.

### Filtrage linéaire d'un signal discret

On appelle signal discret au pas de temps  $\Delta t > 0$ , la distribution  $x$  telle qu'il existe une collection  $(x_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  d'éléments de  $\mathbb{R}$ , pour laquelle

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \delta_{n\Delta t} \quad (4.13)$$

On note  $\mathcal{E}'_{\Delta t}$  l'ensemble des signaux discrets tel que

$$\mathcal{E}'_{\Delta t} = \{x \in \mathcal{D}' \mid x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \delta_{n\Delta t}\}$$

Doté de la représentation des signaux discrets, on définit les filtres discrets :

**Définition 4.4.1.** *On appelle filtre discret tout opérateur  $A : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}'_{\Delta t}$  linéaire, continu et invariant par les translations temporelle  $\tau_{k\Delta t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . L'ensemble  $\mathcal{E}'$  est un sous espace de  $\mathcal{E}'_{\Delta t}$  contenant la distribution de Dirac  $\delta$  et  $\mathcal{E}'$  est muni de la topologie induite par  $\mathcal{D}'$ .*

En routine, pour le traitement du signal appliqué à la micro-météorologie, ne sont utilisés que des filtres discrets du type moyennes mobiles pondérées ou du type convolutif.

Les filtres discrets à moyennes (empiriques) mobiles sont, pour une longueur de moyenne  $L$ , de la forme :

$$y_n = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L w_k x_{n-k}$$

On peut aussi l'écrire sous la forme d'une moyenne centrée de longueur  $2L + 1$  :

$$y_n = \frac{1}{2L + 1} \sum_{k=-L/2}^{k=L/2} w_k x_{n-k}$$

Les filtres discrets de convolution sont définis par la donnée d'une distribution à support bornée  $h$  et on a :

$$\begin{aligned} A : \mathcal{E}'_{\Delta t} &\rightarrow \mathcal{E}'_{\Delta t} \\ x &\rightarrow h * x \end{aligned}$$

La distribution  $h = A.\delta$  est appelée réponse impulsionnelle du filtre  $A$ .

Si les coefficients  $h_n$  sont à décroissances rapides et  $x_n$  à croissances lentes, alors la transformée de Fourier de la convolution à un sens et on a

$$\widehat{h * x} = \hat{h}.\hat{x} \quad (4.14)$$

Dans les applications numériques, il est souvent utilisé cette propriété 4.14 pour filtrer les signaux discrets, la transformée de Fourier rapide permet d'obtenir des algorithmes efficaces et peu coûteux.

En guise de conclusion sur les techniques linéaires de filtrage, nous allons présenter les résultats de différents filtrages typiques sur une série de mesures synthétiques. Il s'agit de la simulation d'un écoulement turbulent homogène unidimensionnel utilisant le modèle de Pope simplifié. Le détail de cette simulation apparaît dans la partie III au chapitre 9. Il est alors demandé de séparer le signal utile du bruit (de loi normale centrée réduite) que l'on rajoute artificiellement. Le filtrage doit récupérer toutes les caractéristiques structurelles et énergétiques du signal turbulent. En terme de spectre d'énergie, la turbulence répartit sa puissance sur toutes les fréquences selon une puissance en  $-5/3$  comme le suggère la loi de Kolmogorov.

La figure 4.5 présente le spectre du signal original en bleu, ainsi que le spectre du bruit blanc que l'on a choisi en vert. La somme des 2 composantes détermine le signal bruité, en rouge, qui va être soumis à 3 filtres linéaires caractéristiques.

On le voit sur cet exemple, il existe une fréquence à laquelle le bruit devient prépondérant dans le signal bruité, ici vers 4 Hz, alors qu'en deçà l'influence de la partie bruitée est moindre. Cette fréquence limite détermine la coupure fréquentielle que l'on va chercher à obtenir en supprimant le signal de plus haute

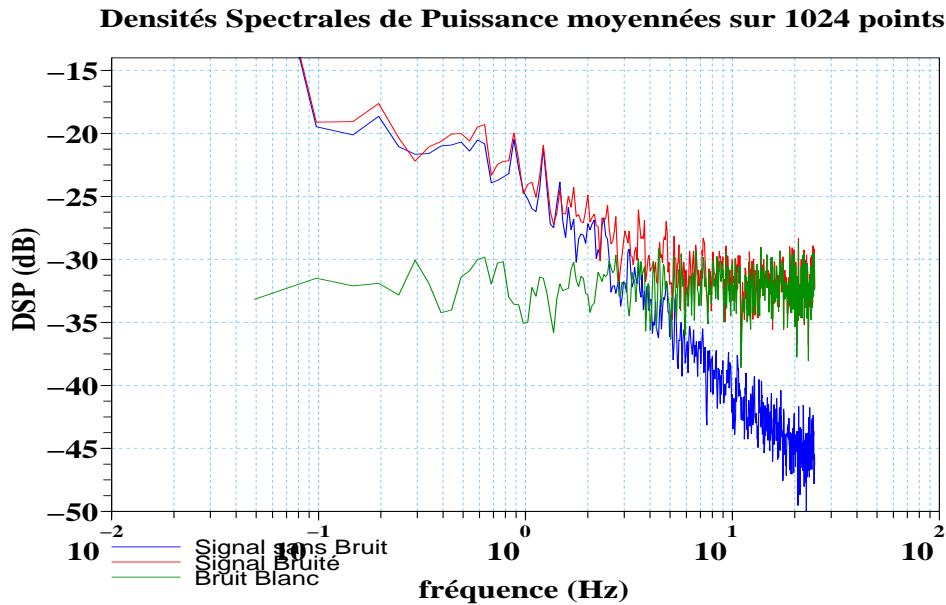


FIG. 4.5 – Densités spectrales de puissance du signal brut, du bruit blanc et de signal bruité.

fréquence. Dans ce filtrage on ne fait pas d'estimation au sens probabiliste mais un filtrage par atténuation ou suppression de la partie du signal inexploitable.

Le premier type de filtre discret est une moyenne mobile centrée simple sur une longueur de 25 pas de temps. On note sur la figure 4.6 que la coupure spectrale se fait effectivement à 4 Hz, et au dessus de cette fréquence on retrouve des lobes caractéristiques des fenêtres rectangulaires.

Le second type est une troncature des coefficients de la série de Fourier. Cette technique s'apparente à un système de convolution. En effet dans ce cas la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h$  est  $\hat{h} = \mathbb{1}_{[-L/2, +L/2]}$ , ce qui donne pour  $h$  une fonction sinus cardinal. Ce filtre est souvent considéré comme le filtre passe-bas idéal. Sur la figure 4.7 on note que les filtres de ce type ont une coupure du spectre franche éliminant dans notre cas toutes fréquences plus élevés que 4 Hz. Il faut aussi constater qu'avant la coupure aucun filtrage n'est réalisé (par construction d'ailleurs) et que le signal filtré contient les perturbations basses fréquences du bruit blanc.

Le dernier filtre linéaire présenté ici est le filtre de convolution de Butterworth où la transformée de Fourier de  $h$  est l'inverse d'un polynôme de degré  $n$ . Ici nous avons choisi un polynôme du 2nd ordre. On remarque sur la figure 4.8 que le

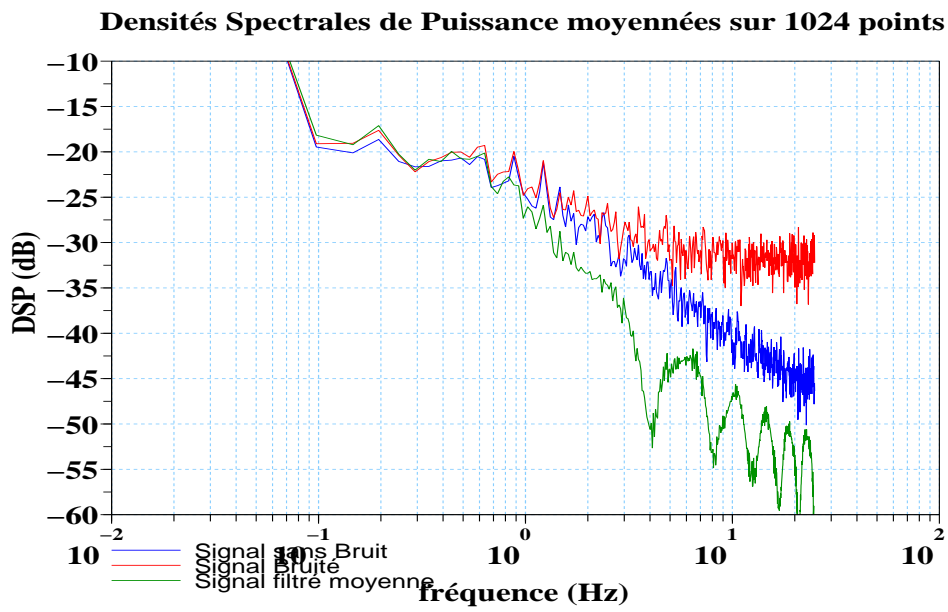


FIG. 4.6 – Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées et filtrées par moyenne glissante.

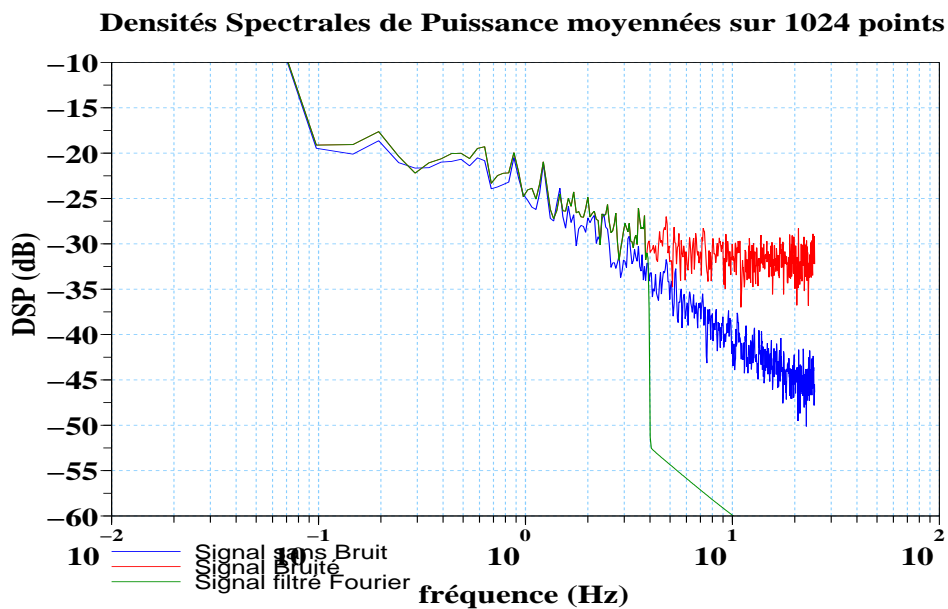


FIG. 4.7 – Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées et filtrées par méthode Fourier.

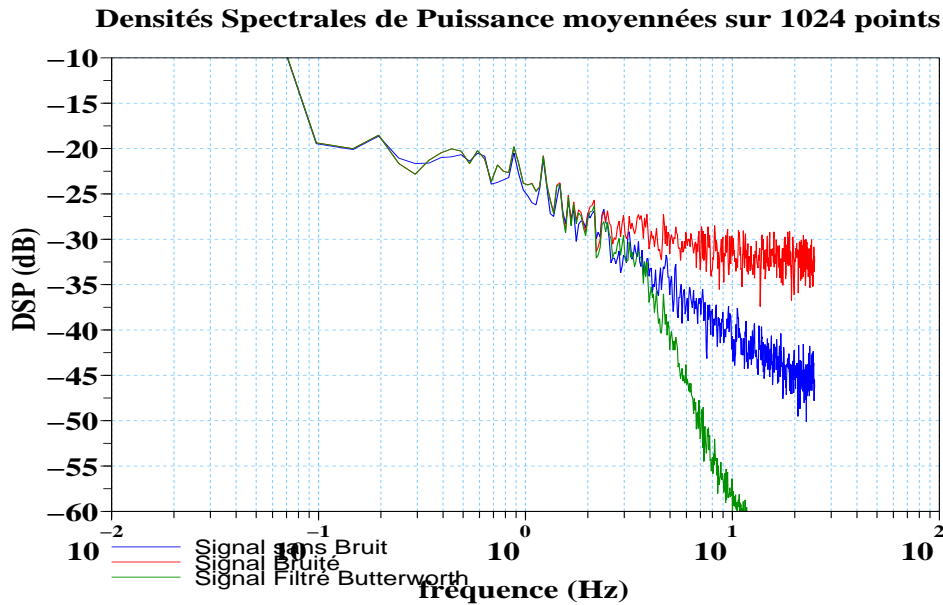


FIG. 4.8 – Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées et filtrées par un filtre de Butterworth du 2ème ordre.

spectre de puissance du signal filtré subit une atténuation au delà de 4 Hz sans couper complètement les harmoniques de hautes fréquences. En élevant le degré du polynôme, il est possible d'obtenir des coupures plus franches du spectre, mais se faisant on se rapproche du filtre obtenu par troncature des coefficients de Fourier. En deçà de la fréquence de coupure le spectre de puissance n'est pas épuré mais seulement atténué à l'approche de la fréquence critique.

La figure 4.9 montre les séries temporelles de ces exemples de filtrage avec en bleu clair le signal bruité à traiter, en bleu foncé le signal de référence à retrouver. La courbe rouge correspond au résultat du filtrage par moyenne mobile. On voit que les signaux transtoirs sont ignorés et que le signal filtré possède une variabilité trop lente par rapport au signal de référence. Pourtant avec la même coupure à 4 Hz, le filtre utilisant la troncature des coefficients de Fourier en vert est bien plus pertinent.

Quoi qu'il en soit, les méthodes de filtrages linéaires, temporelles ou fréquentielles, sont des filtres passe-bas : elles laissent passer la totalité du signal de fréquence inférieure à une certaine fréquence de coupure et atténuent jusqu'à l'éteindre toutes les fréquences supérieures. Ces techniques se traduisent donc par une perte d'information de hautes fréquences, et par l'absence de filtrage sous la fréquence de coupure. Bien que facile d'utilisation, efficace en temps de calcul, elles ne sont pas



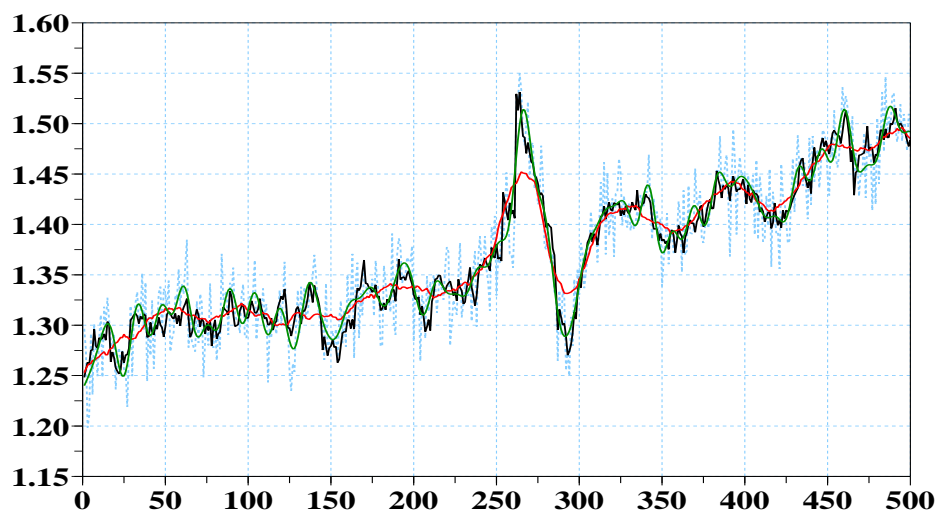


FIG. 4.9 – Séries de données brutes, bruitées, filtrées par moyenne glissante et par méthode Fourier.

adaptées à la suppression de bruits aléatoires qui répartissent leur puissance sur tout le spectre de mesure, qui plus est lorsque le signal utile en fait de même.

Nous pourrions citer également les méthodes de filtrage par ondelettes. Mais elles souffrent des mêmes genres de difficultés. Les bruits aléatoires répartissent également leur énergie sur toutes les gammes d'échelle. Il est possible d'isoler les échelles où le bruit est prédominant, mais supprimant ou atténuant ces échelles, on dégrade le signal utile dans la même proportion, ce qui se traduit, comme pour le traitement fréquentiel, par une perte de l'information .

Il faut alors proposer des méthodes de filtrage de processus stochastiques perturbés par des bruits aléatoires qui respectent la dynamique du processus aléatoire tout en écartant la partie indésirable du signal mesuré. En outre le filtrage stochastique doit permettre de traiter des processus non-linéaires tels que ceux exposés aux chapitres précédents pour décrire la turbulence.

Sur ce thème du filtrage stochastique des mesures issues d'un fluide turbulent, il n'existe aucun travail connu, et c'est dans ce cadre innovant et plein de perspec-

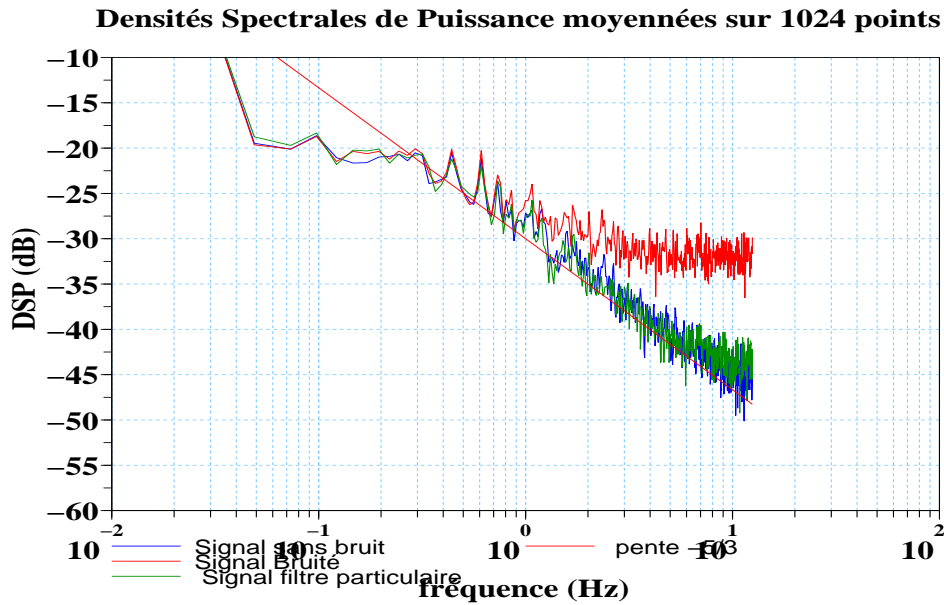


FIG. 4.10 – Densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées, filtrées par un filtre particulaire présenté dans la partie III de ce mémoire.

tive que s'est placée notre étude sur le filtrage des mesures issues de la turbulence atmosphérique.

Nous avons représenté à la figure 4.10 un exemple de résultat de filtrage particulaire pour des mesures turbulentes comme on le présente dans ce travail. Par rapport aux techniques classiques, sur la représentation spectrale du signal filtré on note une nette différence avec un spectre de signal estimé qui a la même allure que celui de référence. Sur la figure de détail 4.11, on peut voir que les structures centrales ont été parfaitement retrouvées et ont ainsi une cohérence physique que ne permettaient pas les méthodes linéaires.

#### 4.4.2 Estimation des grandeurs Eulériennes en météorologie

Les filtres linéaires sont également utilisés en pratique pour estimer les moyennes Eulériennes des grandeurs mesurées expérimentalement. Il n'est en général pas possible d'accéder à la moyenne locale (moyenne Eulérienne) à partir d'une moyenne temporelle (qui plus est empirique et de longueur finie) sauf si le processus mesuré

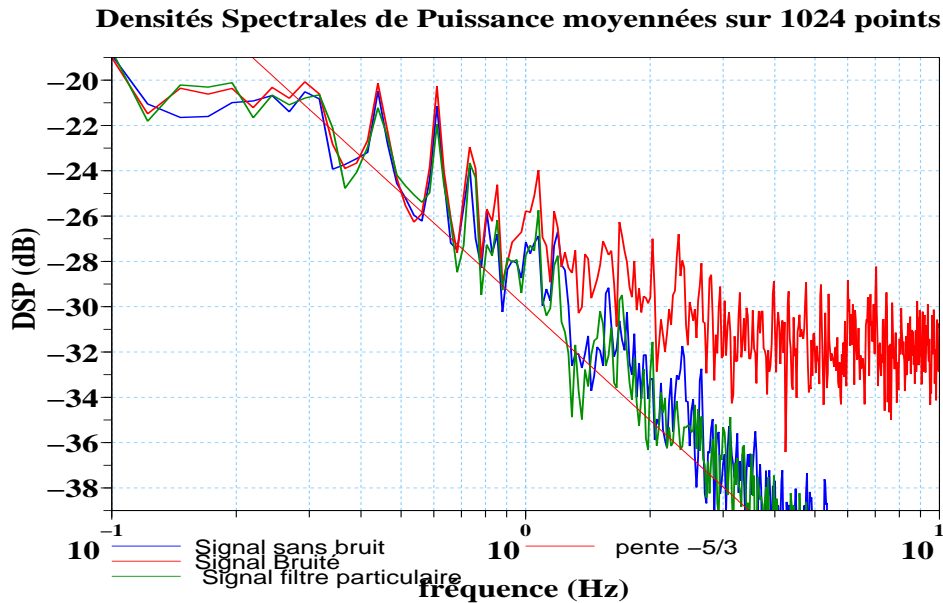


FIG. 4.11 – Détail sur les densités spectrales de puissance des données brutes, bruitées, filtrées par un filtre particulaire montrant le respect des structures présentes dans la donnée initiale.

est ergodique. Ce fait n'est en général pas vérifiable, et les experts de la mesure en turbulence atmosphérique (lire à ce sujet [Lee \*et al.\* \(2004\)](#)) proposent des séries de tests statistiques pour éprouver cette hypothèse.

Une fois les tests statistiques réalisés (stationnarité des mesures, homogénéité au besoin assurée par les conditions de l'expérience de terrain), les expérimentateurs considèrent la moyenne locale comme la partie basse fréquence du signal et séparent ce signal de base des fluctuations par des filtres linéaires comme on l'a présenté dans la section précédente. Le plus souvent dans les applications pratiques on retrouve des filtrages par moyennes mobiles ou des filtres RC (filtre de Butterworth d'ordre 1) plus rarement des traitements par ondelettes qui ont l'avantage de proposer une séparation d'échelle.

Dans tous les cas, pour utiliser les filtres linéaires, le « turbulencier » doit effectuer le choix de la longueur ou de la fréquence de coupure qui va déterminer la forme du signal dit de moyenne. Le choix de la troncature est empirique et en général basé sur des considérations physiques caractérisant le champ sur lequel les mesures ont été faites. La coupure est alors constante sur l'ensemble de la série de mesures ou au mieux l'est sur des intervalles où le contexte physique paraît ho-

mogène. En météorologie, les choix de coupure fréquentielle ou les vérifications de validité des hypothèses d'ergodicité se font situation par situation chacune ayant des critères dynamiques propres.

Comme pour le filtrage linéaire en vue de supprimer des bruits parasites, on perd en résolution dans ces techniques d'estimation linéaire pour la moyenne Eulérienne et une partie de l'information du signal effectivement mesuré est supprimé.

Les méthodes de traitement que l'on développe ici pourront également être une alternative aux filtres linéaires pour estimer les quantités Eulériennes d'un écoulement. On verra dans la partie III qu'afin de filtrer les bruits parasites, on estime à partir de modèles d'évolution Lagrangien du fluide les moments Eulériens que l'on peut restituer a posteriori. Au sens du filtrage réalisé par le modèle que l'on a choisi, les moyennes Eulériennes que l'on propose sont alors les meilleures estimées que l'on peut faire sur la série de données présentée.

## Deuxième partie

# Techniques de Filtrage Stochastique des processus à champ moyen

# Chapitre 5

## Le Filtrage non linéaire

Le filtrage de processus stochastique non linéaire correspond à un saut qualitatif important dans les techniques de filtrage des mesures expérimentales. L'histoire du filtrage optimal commence dès l'arrivée de mesures électroniques et le besoin d'estimation optimale, notamment à des fins militaires lors du dernier conflit mondial. Jusqu'alors, les filtres reposaient sur des techniques fréquentielles et sur la notion de coupure en détruisant à la fois bruit et signal utile. Les travaux de Wiener dans les années 40 ont été une première amélioration, suivis de la description par Kalman et Bucy en 1958 d'un algorithme permettant de traiter correctement les processus à dynamique linéaire de loi gaussienne entachés de bruits gaussiens. Outre l'existence de l'algorithme, l'étude théorique complète a pu être menée et a permis de voir que dans ce cas précis le filtre de Kalman-Bucy était exactement le filtre optimal. Dans un deuxième temps une extension (1962) a été faite de ce filtre pour les dynamiques seulement différentiables toujours dans le cas gaussien. Il manquait alors le cas des processus non-linéarisables et des bruits non-gaussiens. Stratonovich décrit en 1960 ([Stratonovich \(1960\)](#)) le générateur du filtrage non-linéaire qui sera complété par [Zakai \(1969\)](#) et [Kallianpur et Striebel \(1967\)](#), puis dans les années 70 ([Fujisaki \*et al.\* \(1972\)](#)). Le problème est alors entièrement décrit par les probabilistes en terme de calcul de Itô et d'application de la théorie des martingales stochastiques [Yor \(1977\)](#) ; on peut lire [Pardoux \(1991\)](#) pour une mise en revue complète du sujet. Si cette description théorique était terminée, il n'existait alors aucun algorithme de traitement en dehors du cas linéaire-gaussien. C'est à la fin des années 80 qu'arrive l'interprétation particulière des processus de filtrage. L'étude de ces approches par particules prendra toute la décennie dernière ([Crisan \*et al.\* \(1999a\)](#)) et le début de ce siècle pour déboucher sur une théorie et des algorithmes complets traitant les processus non-linéaires à bruits quelconques et s'articulant autour de la dynamique des formules et des mesures de Feynman-

Kac (lire [Del Moral \(2004\)](#)).

Dans ce chapitre consacré à la théorie du filtrage de processus non-linéaire, nous allons présenter le filtrage stochastique de processus aléatoires d'abord dans le cas continu puis dans le cas discret, pour ensuite traiter l'approximation particulière du filtrage dans le cas discret. Le chapitre suivant détaillera le filtrage particulier pour différents types de processus à champ moyen. Nous aurons une application de ces techniques de filtrage dans la partie **III** de ce mémoire.

Essayons de définir les contours de ce que l'on nomme Filtrage Stochastique.

C'est avant toute autre chose un problème d'estimation. En effet on considère pour un temps  $t \geq 0$  qu'un vecteur d'état  $X_t$  caractérise notre système d'étude et on suppose que  $X_t$  est un processus stochastique de l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dans l'espace mesuré  $(E, \mathcal{E})$  dont nous avons une description d'évolution par une EDS, par exemple  $dX_t = F(X_t, W_t^X)dt$  où  $W_t^X$  signe l'aléa sur  $X$ , par exemple, un mouvement Brownien standard.

$X_t$  est la quantité d'intérêt à estimer, mais cet état n'est aperçu qu'au travers d'un second processus stochastique  $Y_t$  lié à  $X_t$  par une autre équation comportant l'aléa  $W^V$  :  $Y_t = H(X_t, W_t^V)$ .

Cette liaison, nommée équation d'observation, peut également être sous forme différentielle, mais pour le moment omettons cette possibilité. Le cas d'un signal  $X_t$  observé par une quantité  $Y_t$  expérimentalement mesurée n'est qu'une particularisation du problème d'estimation plus général.

En l'absence d'aléas sur l'équation d'observation, avec les hypothèses qu'il faut sur  $H$ , pour tout  $t \geq 0$ , nous avons un accès direct à  $X_t$ . Non seulement  $Y_t$  nous permet d'avoir  $X_t$  mais l'observation contient aussi une information sur l'aléa  $W_t^X$  qui s'est réalisé. Nous pouvons alors reconstituer toute la trajectoire des  $(X_s)_{0 \leq s < t}$  mais aussi du mouvement Brownien  $(W_s^X)_{0 \leq s < t}$ . L'estimation de  $X_t$  s'est alors changée en estimation d'une trajectoire dont il est possible de donner la loi.

Hors de ce cas somme toute pathologique, en présence de bruit, le problème de filtrage sera résolu par :

- La reconstitution de la trajectoire de  $X_t$  sachant les observations recueillies.
- Le calcul de la loi de la trajectoire  $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$  sachant la trajectoire du processus d'observations depuis l'instant 0,  $\mathcal{Y}_t^0 = (Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ .

Le problème de filtrage stochastique ainsi énoncé requiert un certain nombre d'hypothèses, notamment d'adaptation des processus aux filtrations engendrées ainsi que de régularité des fonctions entrant dans les EDS de dynamique ou d'observation.

Une fois le filtrage de processus stochastique correctement décrit, il a une solution abstraite exacte, on détaille cette solution et son existence dans la première section 5.1 et nous verrons qu'il est possible par des approximations particulières d'en donner une résolution approchée. En effet, nous savons qu'en l'absence de bruit, le problème se résoud tout seul. En discrétisant la loi du bruit d'observation, c'est à dire en simulant tout un ensemble de  $N$  réalisations possibles de ce bruit (on appelle ces réalisations des particules),  $N$  devant être assez grand pour couvrir la gamme d'aléas possibles, on retombe pour chacune des particules sur un problème quasiment déterministe sans bruit. Dit brutalement, les particules ne sont pas bruitées. Si par un heureux miracle, il était possible de déterminer exactement la réalisation qui s'est produite, avec un nombre de particules immensément grand, on formulerait alors la solution exacte du processus de filtrage. Mais tout au plus pouvons-nous donner à chacune des particules une probabilité de s'être réalisée. En ce cas, il nous est permis de calculer l'espérance de  $X_t$  sachant les observations  $\mathcal{Y}_t^0$  et de reconstituer les lois du filtrage. Cette approximation par particules correspond à la résolution particulière du problème de filtrage que nous présenterons dans la deuxième section (5.2) de ce chapitre.

Pour les applications du filtrage aux processus linéaires gaussiens pour lesquels l'estimateur de Kalman est optimal, nous proposons dans l'annexe A une description de l'algorithme de Kalman-Bucy et ainsi que 2 extensions de ce filtre, les filtres de Kalman en interaction et les filtres de Kalman d'ensemble. Il en existe d'autres comme les Unscented Kalman Filter (Julier et Uhlmann. (1997)), les Kalman Filter Linear Mixing (Chuin-Mu *et al.* (2004)), les Kalman Filter Bank (Kobayashi et Simon (2005)), etc... que le lecteur pourra retrouver dans la littérature en ingénierie du signal vers laquelle nous renvoyons. Toutes ces extensions ont pour but d'approcher les non-linéarités du processus de dynamique. Chacune contient une particularité qui la rend intéressante dans les applications pratiques. Mais ce ne sont que des palliatifs d'ingénierie aux méthodes particulières que nous présen-



tons ici et qui permettent d'approcher au mieux l'estimateur non-linéaire optimal.

## 5.1 Filtrage Stochastique pour les processus non-linéaires

### 5.1.1 Le filtrage à temps continu

Nous commencerons par détailler le cas du filtrage non-linéaire en temps continu. Les problèmes de filtrage non-linéaires et le calcul stochastique sont très liés, et d'ailleurs ils se sont nourris mutuellement pour aboutir à des théories complètes. Nous ne présenterons pas le calcul stochastique pour lequel on se réfère au livre de [Revuz et Yor \(1990\)](#).

Commençons par une analyse du processus d'observation seul. On se donne pour se faire un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ , avec  $\mathcal{F}_t$  la filtration Brownienne associée au mouvement Brownien  $V_t$ ,  $V_t$  est une martingale de crochet  $\langle V_t, V_t \rangle = t$ , voir [Revuz et Yor \(1990\)](#). Dans le texte qui suit tous les processus sont scalaires, pour simplifier la lecture, mais la même démonstration est possible pour des processus  $d$ -dimensionnels.

Pour tout temps  $s \in [0, T]$ , soit  $H_s \in L^2_{loc}(V_t)_{[0, T]}$  un processus progressivement mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_t$  tel qu'on ait  $\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < +\infty$ .

On définit alors le processus  $Y_t$  par :  $Y_t = \int_0^t H_s ds + V_t$  et on note également pour un processus  $\xi_t$   $\mathcal{F}_t^Y$ -adapté  $\pi_t(\xi_t) = \mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{F}_t^Y)$  où  $\mathcal{F}_t^Y$  est la filtration naturelle de  $Y_t$ .

On appelle alors processus d'innovation le processus défini par :

$$I_t = Y_t - \int_0^t \pi_s(H_s) ds \quad (5.1)$$

**Proposition 5.1.1.** *Le processus  $Y_t$  admet la représentation*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \pi_s(H_s) ds + I_t \quad (5.2)$$

et  $I_t$  est un  $\mathcal{F}_t^Y$ -mouvement brownien.

*Démonstration.* La preuve, voir Fujisaki *et al.* (1972) ou Pardoux (1991), utilise le fait que  $I_t = Y_t - \int_0^t \pi_s(H_s) ds$  et que  $V_t$  est un vecteur gaussien, donc on a

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(I_t - I_s)} | \mathcal{F}_t^Y) = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} \quad (5.3)$$

où  $\lambda$  est un réel. En considérant la fonction  $e^{i\lambda I_t}$  et en lui appliquant la formule d'Itô on obtient

$$e^{i\lambda I_t} = e^{i\lambda I_s} + i\lambda \int_s^t e^{i\lambda I_u} dW_u + i\lambda \int_s^t e^{i\lambda I_u} [H_u - \pi_u(H_u)] du - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_s^t e^{i\lambda I_u} du \quad (5.4)$$

Or  $V_t$  est un mouvement Brownien par rapport à  $\mathcal{F}_t^V \vee \mathcal{F}_t^Y$  donc on obtient  $\mathbb{E}[\int_s^t e^{i\lambda I_u} dW_u | \mathcal{F}_s^Y] = 0$ . De même on a  $\mathbb{E}[\int_s^t e^{i\lambda I_u} [H_u - \pi_u(H_u)] du | \mathcal{F}_s^Y] = 0$ .

Alors  $\rho_t = \mathbb{E}(e^{i\lambda I_t} | \mathcal{F}_s^Y)$  s'écrit

$$\rho_t = \rho_s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_s^t \rho_u du \quad (5.5)$$

qui vérifie l'équation 5.3, donc l'innovation est un  $\mathcal{F}_t^Y$ -mouvement Brownien. ■

Il est important que le processus d'innovation soit un mouvement Brownien par rapport à la filtration engendrée par le processus  $Y_t$ . Ce qui revient à dire que dans  $\mathcal{F}_t^Y$  on dispose de toute l'information sur  $Y_t$ . Mais attention,  $I_t$  n'est pas forcément un mouvement Brownien par rapport au bruit  $V_t$ . On a ainsi décomposé  $Y_t$  comme une  $\mathcal{F}_t^Y$ -semimartingale.

On va particulariser ce qu'on vient de voir sur l'innovation en introduisant maintenant le processus de dynamique  $X_t$  de telle manière que le couple  $(X_t, Y_t) \in (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ . On se donne comme hypothèse supplémentaire que pour tout  $t > 0$  on ait une fonction  $F_t \in L_{loc}^2$  et une  $\mathcal{F}_t$ -martingale  $M_t$ , telles que

$$X_t = X_0 + \int_0^t F_s ds + M_t$$

où  $M_t$  pourrait être un processus de Poisson ou de Wiener. En dernier lieu on va supposer que pour tout  $t > 0$   $V_t \perp X_t$  avec  $Y_t = \int_0^t H_s ds + V_t$ .

**Théorème 5.1.1** (Fujisaki-Kallianpur-Kunita-1972). *Avec les hypothèses que l'on vient de mentionner, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbb{P}$ -ps on a :*

$$\pi_t(X) = \pi_0(X) + \int_0^t \pi_s(F) ds + \int_0^t [\pi_s(H.X) - \pi_s(H) \cdot \pi_s(X)] dI_t \quad (5.6)$$

*Démonstration.* Voir [Fujisaki et al. \(1972\)](#), Th. 4.1 p 29. ■

On notera que l'équation 5.6 (FKK) est à valeur mesure où l'inconnue est une mesure, ici  $\pi_t$ . Elle est très générale et demande peu de structure aux 2 processus, on peut améliorer la description en effectuant un couplage entre  $X_t$  et  $Y_t$ , mais elle est difficile d'application. Néanmoins on peut montrer que dans le cas de processus de diffusion bornés, s'il existe une fonction  $q_t$  vérifiant une certaine EDS, que l'on verra plus bas, alors  $q_t$  est une densité pour  $\pi_t$  pour la mesure de Lebesgue : pour toute fonction  $\varphi$  bornée de la v.a.r  $\xi_t$ ,  $\pi_t(\varphi)(\xi_t) = \mathbb{E}(\varphi(\xi_t) | \mathcal{F}_t^Y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) q_t(x) dx$ . Voyons ça en quelques lignes.

On suppose que le couple  $(X_t, Y_t)$  est solution forte du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = F(X_t) dt + G(X_t) dW_t \\ dY_t = H(X_t) dt + dV_t \\ X_0 = \xi \sim q_0(x) \\ Y_0 = 0 \\ W_t \perp\!\!\!\perp V_t \end{cases} \quad (5.7)$$

avec  $F, G, H$  des fonctions  $[0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz bornées.

En tant que solution forte de l'EDS,  $X_t$  est un processus de Markov. On note pour tout  $t \geq 0$   $P_t$  le semigroupe de transition associé à  $X_t$  et  $\mathcal{L}$  le générateur infinitésimal ( $\mathcal{L}\varphi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{P_t\varphi - \varphi\}$ ) et on a pour toute fonction  $\varphi$  deux fois différentiable,  $(\mathcal{L}\varphi)(x) = F(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \frac{1}{2} G^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)$ .  $\mathcal{L}$  est un opérateur du second ordre qui suit l'équation de Kolmogorov  $\partial_t P_t \varphi = P_t \mathcal{L} \varphi = \mathcal{L}^* P_t \varphi$  où  $\mathcal{L}^*$  est l'opérateur adjoint avec  $(\mathcal{L}^* \varphi)(x) = -\frac{\partial}{\partial x} [F(x) \varphi(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [G^2(x) \varphi(x)]$ .

On suppose alors qu'il existe pour tout temps  $t$  positif une fonction positive  $q_t$

qui vérifie pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$q_t(x) = q_0(x) + \int_0^t (\mathcal{L}^* q_s) ds + \int_0^t q_s(x) [H(x) - \pi_s(H)] dI_s \quad (5.8)$$

Cette équation sera appelée l'équation de Kushner-Stratonovich pour la densité conditionnelle.

Alors, on obtient immédiatement  $\pi_s((\mathcal{L}\varphi)(X)) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{L}^* q_s)(x) \varphi(x) dx$  et par calcul direct  $\pi_s(\varphi H) - \pi_s(\varphi)\pi_s(H) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) q_s(x) [H(x) - \pi_s(H)] dx$

En utilisant (FKK) et l'équation 5.8 pour  $q_t$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} \pi_t(\varphi) &= \pi_0(\varphi) + \int_0^t \pi_s(\mathcal{L}\varphi) ds + \int_0^t [\pi_s(\varphi H) - \pi_s(\varphi)\pi_s(H)] dI_s \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) [q_0(x) + \int_0^t (\mathcal{L}^* q_s) ds + \int_0^t q_s(x) [H(x) - \pi_s(H)] dI_s] ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) q_t(x) dx \end{aligned}$$

On a vérifié que si  $q_t$  satisfait 5.8, alors  $\pi_t$  avait  $q_t$  pour densité. ■

On voit la difficulté d'utilisation de ce résultat. Assurer l'existence d'une fonction pour 5.8 n'est pas aisé. Pour établir les équations du filtrage non-linéaire nous allons utiliser le changement de probabilité de référence comme application du théorème de Girsanov Karatzas et Shreve (1998) ou Revuz et Yor (1990).

On revient au cas général pour  $X_t$  qui n'est plus forcément une diffusion mais se conformera aux hypothèses que l'on avait énoncé dans le théorème connu sous le nom de Kallianpur-Striebel. On se référera soit à Pardoux (1991), soit à Zakai (1969) ou directement Kallianpur et Striebel (1967)

**Théorème 5.1.2** (Kallianpur et Striebel (1967)). *On suppose que  $\forall s \in [0, T]$   $Y_t = \int_0^t H_s(X_s) ds + V_t$  et  $H_s(X_s) ds \in L^2_{loc}$ . On pose*

$$Z_t = Z_t(X, Y) = \exp\left\{ \int_0^t H_s(X_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t |H_s(X_s)|^2 ds \right\} \quad (5.9)$$

On suppose pour l'instant que  $\mathbb{E}(Z_t^{-1}) = 1$ . On définit  $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$  telle que :

$$\left. \frac{d\mathbb{P}}{d\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.10)$$

Alors pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, X_t \mapsto \varphi(X_t)$  avec  $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  et  $\varphi Z_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  on a

$$\mathbb{E}(\varphi(X_t) | \mathcal{F}_t^Y) = \frac{\overset{\circ}{\mathbb{E}}(\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t^Y)}{\overset{\circ}{\mathbb{E}}(Z_t | \mathcal{F}_t^Y)} \quad \mathbb{P} - ps \quad (5.11)$$

Ce changement de probabilité de référence est fait pour que  $Y_t$  devienne sous la loi  $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$  un mouvement Brownien.

*Démonstration.* La plus directe se trouve dans [Pardoux \(1991\)](#) et la voici.

On a évidemment pour tout temps  $t \geq 0, Z_t > 0$   $\mathbb{P} - ps$ , donc également sous la probabilité  $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ , et de même  $\overset{\circ}{\mathbb{E}}(Z_t | \mathcal{F}_t^Y) > 0$   $\mathbb{P} - ps$  et  $\overset{\circ}{\mathbb{P}} - ps$ . Le théorème de Novikov nous assure aussi que  $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ .

Se faisant on se donne  $\forall t > 0 \xi_t$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t^Y$ -mesurable. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(X_t)\xi_t) &= \overset{\circ}{\mathbb{E}}(\varphi(X_t)\xi_t Z_t) \\ &= \overset{\circ}{\mathbb{E}}(\xi_t \overset{\circ}{\mathbb{E}}(\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t^Y)) \\ &= \overset{\circ}{\mathbb{E}}\left(\xi_t \frac{Z_t}{\overset{\circ}{\mathbb{E}}(Z_t | \mathcal{F}_t^Y)} \overset{\circ}{\mathbb{E}}(\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t^Y)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi_t \frac{\overset{\circ}{\mathbb{E}}(\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t^Y)}{\overset{\circ}{\mathbb{E}}(Z_t | \mathcal{F}_t^Y)}\right) \end{aligned}$$

Donc sous  $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ ,  $Y_t$  est un mouvement Brownien,  $X_t$  a la même distribution sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ , et pour tout  $t > 0, X_t \perp\!\!\!\perp Y_t$ . On notera aussi que la formule de Kallianpur-Striebel est une forme de la formule de Bayes et on a :

$$\mathbb{E}(\varphi(X_t) | \mathcal{F}_t^Y)(\omega) = \frac{\int \varphi(x) Z_t(x, Y_t(\omega)) \mathbb{P}^X(dx)}{\int Z_t(x, Y_t(\omega)) \mathbb{P}^X(dx)} \quad (5.12)$$

A ce stade, la seule hypothèse que l'on ait fait sur  $X_t$  est que pour tout  $t \geq 0$  on a  $H_t(X_t) \in L_{loc}^2$  et  $\mathbb{E}(Z_t^{-1})$  existe. Il n'y a aucune structure sous-jacente pour  $X_t$  lui même.

Dans le cas où  $X_t$  est une diffusion à coefficient uniformément borné, on notera que les hypothèses sur  $Z_t$  sont satisfaites.

Pour que  $\pi_t$  décrive une EDS d'évolution, on va justement se placer dans le cadre des diffusions et on définit la mesure de filtrage non-normalisée :

**Définition 5.1.1.** Soit  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans l'espace des mesures, telle que pour toute fonction  $\varphi$  bornée et tout  $t \geq 0$

$$\sigma_t(\varphi) = \overset{\circ}{\mathbb{E}}(\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t^Y) \quad (5.13)$$

avec  $X_t$  défini par la diffusion

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s) ds + \int_0^t G(X_s) dW_s \quad (5.14)$$

On rappelle que la probabilité de filtrage définie par  $\pi_t(\varphi) = \mathbb{E}(\varphi(X_t) | \mathcal{F}_t^Y)$ , pour tout fonction bornée  $\varphi$ , est une mesure normalisée. En effet d'après la formule de Kallianpur-Striebel 5.11 que l'on vient de voir  $\pi_t(\varphi) = \frac{\sigma_t(\varphi)}{\sigma_t(\mathbb{1})}$ .

Le problème de filtrage s'écrit alors par le système :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s) ds + \int_0^t G(X_s) dW_s \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t H(X_s) ds + V_t \\ X_0 = \xi_0 \sim q_0(x) \\ Y_0 = 0 \\ W_t \perp V_t \end{cases} \quad (5.15)$$

et  $F, G, H$  sont des fonctions  $[0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz bornées.

Partant de l'équation sur  $X_t$  dans ce système, pour une fonction bornée  $\varphi$  par la formule d'Itô on a :

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \mathcal{L}_s \varphi(X_s) ds + \int_0^t G(X_s) dW_s$$

et par sa définition  $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s H_s(X_s) dY_s$ . La quantité  $Z_t \varphi(X_t)$  peut être écrite comme

$$Z_t \varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t Z_s d(\varphi(X_s)) + \int_0^t \varphi(X_s) dZ_s \quad (5.16)$$

On peut alors évaluer la différentielle  $dZ_t$  :

$$dZ_t = Z_t H_t(X_t)dY_t$$

alors en intégrant contre la fonction test  $\varphi$

$$\begin{aligned} Z_t\varphi(X_t) &= \varphi(X_0) + \int_0^t Z_s \mathcal{L}_s \varphi(X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t Z_s G_s(X_s) dW_s \\ &\quad + \int_0^t Z_s H_s(X_s) \varphi(X_s) dY_s \end{aligned}$$

Le lemme 2.2.4 de [Pardoux \(1991\)](#) nous indique que

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbb{E}} \left( \int_0^t Z_s G_s(X_s) dW_s \mid \mathcal{F}_t^Y \right) &= 0 \\ \text{et que } \mathring{\mathbb{E}} \left( \int_0^t Z_s H_s \varphi(X_s) dY_s \mid \mathcal{F}_t^Y \right) &= \int_0^t \mathring{\mathbb{E}} (Z_s H_s \varphi(X_s) \mid \mathcal{F}_t^Y) dY_s \end{aligned}$$

Alors on a établi le

**Théorème 5.1.3** ([Zakai \(1969\)](#)). *Pour toute fonction  $\varphi$  bornée deux fois différentiable,*

$$\sigma_t(\varphi) = \sigma_0(\varphi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}(\varphi(X_s))) ds + \int_0^t \sigma_s(H_s \varphi(X_s)) dY_s \quad (5.17)$$

et

$$\pi_t(\varphi) = \frac{\sigma_t(\varphi)}{\sigma_t(\mathbb{1})} \quad (5.18)$$

Il est alors possible de donner une EDS pour la mesure de probabilité de filtrage normalisée  $\pi_t$ , en effet avec l'équation [5.16](#) et l'équation de Kallianpur-Striebel [5.11](#) on a pour  $\sigma_t(\mathbb{1})$  :

$$\begin{aligned} \sigma_t(\mathbb{1}) &= \mathring{\mathbb{E}} (Z_t \mid \mathcal{F}_t^Y) \\ &= 1 + \int_0^t \mathring{\mathbb{E}} (Z_s \mid \mathcal{F}_t^Y) \pi_s(H_s) dY_s \end{aligned}$$

Usant de la formule de Itô,  $\sigma_t(\mathbb{1})^{-1}$  s'évalue par :

$$\sigma_t(\mathbb{1})^{-1} = 1 - \int_0^t \sigma_s(\mathbb{1})^{-1} \pi_s(H_s) dY_s + \int_0^t \sigma_s(\mathbb{1})^{-1} |\pi_s(H_s)|^2 ds \quad (5.19)$$

ce qui nous permet de prouver le théorème de Kushner-Stratonovich

**Théorème 5.1.4** (Kushner-Stratonovich). *Pour toute fonction  $\varphi$  bornée deux fois différentiable,*

$$\begin{aligned} \pi_t(\varphi) = \pi_0(\varphi) &+ \int_0^t \pi_s((\mathcal{L}\varphi)(X_s))ds \\ &+ \int_0^t \pi_s(H_s\varphi(X_s)) - \pi_s(H_s)\pi_s(\varphi(X_s))dI_s \end{aligned} \quad (5.20)$$

*Démonstration.* On calcule  $\sigma_t(\mathbb{1})^{-1}\sigma_t(\varphi)$  avec pour l'expression de  $\sigma_t(\varphi)$  l'EDS de Zakai 5.17 et en utilisant la formule de Kallianpur-Striebel 5.11. ■

On remarque ici la présence du terme d'innovation  $dY_s - \pi_s(H_s)ds$  contre lequel on intègre  $\pi_s(H_s\varphi(X_s)) - \pi_s(H_s)\pi_s(\varphi(X_s))$  sorte de quantification de l'indépendance entre  $H_s(X_s)$  et  $\varphi(X_s)$ .

Le traitement de ces équations en temps continu est difficile. On a vu notamment que l'existence des densités pour les probabilités conditionnelles pouvait poser problème. Seul le cas linéaire gaussien se résout explicitement avec l'estimateur de filtre de Kalman-Bucy à temps continu, dans tous les autres cas, il n'y a pas d'expression analytique de ces solutions.

L'existence de solutions au problème du filtrage à temps continu est presque obtenu si le signal physique bouge moins vite que les observations d'où la nécessité des capteurs rapides. En cas d'existence de la solution, on peut développer des algorithmes particuliers à temps continu. Alors l'équation de Kushner-Stratonovitch n'est pas suffisante, et on passe à l'équation robuste (voir [Del Moral et Miclo \(2000\)](#) ou [Rousset \(2006\)](#)). Si cette existence n'est pas acquise, on peut s'intéresser au problème discret et la formule de Kushner-Stratonovitch est remplacée par la formule de Bayes (voir [Crisan et Lyons \(1997\)](#) ou [Crisan et al. \(1999b\)](#)) ou au problème continu à observations discrètes (voir [Del Moral et al. \(2001a\)](#)).

Nous avons choisi le parti-pris d'exprimer dès le départ le problème à temps discret en modélisant les conséquences de cette formulation notamment sur les équations d'évolution. Cette modélisation discrète sera vue dans le cas de la turbulence dans la partie [III](#) de ce mémoire, en attendant, nous présentons le filtrage



trajectoriel discret et les mesures de Feynman-Kac qui sont les outils nécessaires au filtrage non-linéaire.

### 5.1.2 Le filtrage trajectoriel à temps discret

Le filtrage d'un processus à temps discret observé peut se faire ponctuellement, mais on gagne à le considérer comme un processus trajectoriel. En effet [Miclo et Del Moral \(2001\)](#) ont montré que pour le filtrage d'un processus de Markov, la mesure empirique associée au processus historique converge vers la loi conditionnelle de la trajectoire du signal par rapport à une suite d'observations. De plus les lois de probabilités du filtrage dans l'espace des chemins correspondent à des mesures de Feynman-Kac ayant la même structure que pour le problème ponctuel. Pour le cas du filtrage trajectoriel, les auteurs montrent des résultats de convergence et aussi de propagation du chaos ( la propagation du chaos quantifie l'indépendance entre les trajectoires ). On peut aussi montrer dans le cas d'approximation particulière que les variances d'erreur sur les trajectoires sont moindres que dans le cas ponctuel. Avant de parler de l'approche particulière, c'est à la présentation des Feynman-Kac et du filtrage trajectoriel auxquels on va s'attacher maintenant.

Dans la suite du texte on va adopter pour toute mesure finie  $\mu$  définie sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ , tout noyau de transition  $Q$  de  $(E, \mathcal{E})$  dans  $(F, \mathcal{F})$  espace mesurable, toute fonction  $f$  bornée mesurable sur l'espace  $E$  et tout élément  $A$  de la tribu  $\mathcal{F}$ , les notations pour les moyennes suivantes :

$$\mu(f) = \int_E f(x) \mu(dx) \quad (5.21)$$

$$Q(f)(x) = \int_F Q(x, dy) f(y) \quad (5.22)$$

ce qui donne pour l'indicatrice

$$Q(\mathbb{1}_A)(x) = Q(x, A) \quad (5.23)$$

$$\mu(\mathbb{1}_A) = \mu(A) \quad (5.24)$$

et pour terminer

$$(\mu Q)(A) = \int_E \mu(dx) Q(x, A) \quad (5.25)$$

On suppose que pour tout  $n \geq 0$ ,  $X_n$  est un processus de Markov de loi de transition  $M_n$  et de loi initiale  $\eta_0$  dans un espace mesurable  $(E_n, \mathcal{E}_n)$  qui est

observé par un processus  $Y_n$  vivant dans un espace  $(F_n, \mathcal{F}_n)$ . On considère le processus historique  $(X_0, \dots, X_n) \in \otimes_{p=0}^n E_p$ . On suppose que pour tout  $n \geq 0$ ,  $Y_n$  est lié à la dynamique du processus historique  $(X_0, \dots, X_n)$  par la relation  $Y_n = H_n((X_0, \dots, X_n), V_n)$  où  $V_n$  est un bruit d'observation Markovien. De plus on supposera que le couple  $(X_n, Y_n) \in E_n \times F_n$  est Markovien pour chaque pas de temps  $n \geq 0$ . On va également considérer alors le processus historique de l'observation  $(Y_0, \dots, Y_n) \in \otimes_{p=0}^n F_p$ .

Le problème de filtrage non-linéaire se résout en trouvant la loi conditionnelle, pour toute fonction  $f$  mesurable bornée :

$$\hat{\eta}_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] \quad (5.26)$$

De la même manière on définit le prédicteur du filtre (la loi conditionnelle prédisant la position à venir sachant les observations disponibles) par

$$\eta_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0, \dots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}] \quad (5.27)$$

Bien que le processus soit non-linéaire, on montre que ce filtre correspond à l'estimateur optimal. Il n'a pas de solution analytique sauf dans des cas particuliers comme les processus de dynamique et d'observation linéaires gaussiens. Nous allons en étudier les caractéristiques, et il faudra dans le cas général l'approcher par des méthodes particulières qui seront l'objet de la section suivante.

On réduit un peu notre modèle d'observation qui est très général, en considérant que l'observation  $Y_n$  ne se fait que sur l'état courant  $X_n$  et pas sur la trajectoire, on a alors  $Y_n = H_n((X_0, \dots, X_n), V_n) = H_n(X_n, V_n)$  et on rajoute une hypothèse supplémentaire avec l'existence à chaque pas de temps d'une fonction  $g_n \in [0, 1]$  et d'une mesure  $q_n$  telles que  $\mathbb{P}(H_n(x_n, v_n) \in dy_n) = g_n(x_n, y_n) q_n(dy_n)$ , c'est-à-dire que  $H_n(X_n, V_n)$  et  $V_n$  sont absolument continues de densité  $g_n$ .

Les 2 mesures  $\hat{\eta}_n$  et  $\eta_n$  sont appelées des mesures de Feynman-Kac ([Del Moral \(1998, 2004\)](#)). Elles peuvent être définies dans un cadre plus large que celui du filtrage par la donnée d'une fonction de potentiel  $G_n$ , avec  $0 \leq G_n \leq 1$  et ici  $G_n(X_n) = g_n(X_n, Y_n)$ , et par la donnée d'un noyau de transition  $M_n$ , ici la dynamique du processus observé. On lira à profit le livre de P. [Del Moral \(2004\)](#) présentant un certain nombre de sujet de la physique, la biologie ou l'ingénierie

où ces mesures ont un intérêt d'application.

On va noter l'espace dans lequel vit le processus historique  $(X_0, \dots, X_n)_{n \geq 0}$ ,  $E_{[0,n]} = E_0 \times \dots \times E_n$ . On notera que le passage du processus du temps  $n$  au temps  $n + 1$ , se fait par augmentation d'état, et en utilisant le noyau de transition Markovienne  $M_{n+1} : (X_0, \dots, X_n, X_{n+1}) = ((X_0, \dots, X_n), X_{n+1})$  et  $X_n \xrightarrow{M_{n+1}} X_{n+1}$ .

Avec la dynamique Markovien de  $X_n$  on peut écrire la loi du processus historique de manière multiplicative

$$\mathbb{P}^{X_0, \dots, X_n}(d(x_0, \dots, x_n)) = \eta_0(dx_0) M_1(x_0, dx_1) \dots M_n(x_{n-1}, dx_n)$$

et pour une fonction bornée dans l'espace  $E_{[0,n]}$  on a l'espérance

$$\mathbb{E}(f_n(X_0, \dots, X_n)) = \int_{E_{[0,n]}} f_n(x_0, \dots, x_n) \mathbb{P}^{X_0, \dots, X_n}(d(x_0, \dots, x_n))$$

De même pour le processus d'observation :

$$\mathbb{P}^{Y_0, \dots, Y_n}(d(y_0, \dots, y_n)) = \left\{ \int_{E_{[0,n]}} \prod_{p=0}^n g_p(x_p, y_p) \mathbb{P}^{X_0, \dots, X_n}(d(x_0, \dots, x_n)) \right\} \prod_{p=0}^n q_p(dy_p) \quad (5.28)$$

alors la loi du filtre (que l'on appelle souvent mise à jour) s'écrit trajectoriellement :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(f_n(X_0, \dots, X_n) | (Y_0, \dots, Y_n) = (y_0, \dots, y_n)) \\ &= \frac{\int_{E_{[0,n]}} \mathbb{P}_n^X(d(x_0, \dots, x_n)) \prod_{p=0}^n g_p(x_p, Y_p) f_n(x_0, \dots, x_n)}{\int_{E_{[0,n]}} \mathbb{P}_n^X(d(x_0, \dots, x_n)) \prod_{p=0}^n g_p(x_p, Y_p)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$= \frac{\int_{E_{[0,n]}} \eta_0(dx_0) \prod_{p=1}^n M_p(x_{p-1}, dx_p) \prod_{p=0}^n g_p(x_p, Y_p) f_n(x_0, \dots, x_n)}{\int_{E_{[0,n]}} \eta_0(dx_0) \prod_{p=1}^n M_p(x_{p-1}, dx_p) \prod_{p=0}^n g_p(x_p, Y_p)} \quad (5.30)$$

On définit les mesures trajectorielles non-normalisées toujours pour des fonctions mesurables bornées :

$$\hat{\gamma}_n(f_n) = \mathbb{E}_{\eta_0}(f_n(X_0, \dots, X_n) \prod_{p=0}^n G_p(X_0, \dots, X_p)) \quad (5.31)$$

et

$$\gamma_n(f_n) = \mathbb{E}_{\eta_0}(f_n(X_0, \dots, X_n) \prod_{p=0}^{n-1} G_p(X_0, \dots, X_p)) \quad (5.32)$$

avec  $G_p(X_0, \dots, X_p) = g(X_p, Y_p) = G_p(X_p)$  puisque l'observateur ne voit que l'état courant.

Pour tout  $n \geq 0$  les mesures de Feynman-Kac du filtrage peuvent être formulées au moyen des mesures non-normalisées :

$$\eta_n(f_n) = \frac{\gamma_n(f_n)}{\gamma_n(1)} \quad (5.33)$$

et

$$\hat{\eta}_n(f_n) = \frac{\hat{\gamma}_n(f_n)}{\hat{\gamma}_n(1)} \quad (5.34)$$

De plus la formule de la mise à jour, qui est valable pour tout pas de temps,

$$\hat{\eta}_n(f_n) = \frac{\eta_n(G_n \cdot f_n)}{\eta_n(G_n)}$$

montre que la loi du filtre  $\hat{\eta}_n$  est une mesure de Boltzmann-Gibbs et qu'il existe un transformation de Boltzmann-Gibbs  $\Psi_n$  telle que  $\hat{\eta}_n = \Psi_n(\eta_n)$  et

$$\Psi_n(\eta_n)(d(x_0, \dots, x_n)) = \frac{G_n(x_n)\eta_n(d(x_0, \dots, x_n))}{\eta_n(G_n)} = \hat{\eta}_n(d(x_0, \dots, x_n)) \quad (5.35)$$

De ce fait on peut définir 2 transformations  $\Phi_{n+1}$  et  $\hat{\Phi}_n$  telles que

$$\Phi_{n+1}(\eta_n) \stackrel{def}{=} \Psi_n(\eta_n)M_{n+1} \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}_n(\hat{\eta}_{n-1}) \stackrel{def}{=} \Psi_n(\hat{\eta}_{n-1})M_n$$

Ces 2 transformations permettent d'écrire l'évolution des mesures de Feynman-Kac, la prédiction  $\eta_n$  et la mise à jour  $\hat{\eta}_n$  :

$$\eta_{n+1} = \Phi_{n+1}(\eta_n) \quad \text{et} \quad \hat{\eta}_{n+1} = \hat{\Phi}_{n+1}(\hat{\eta}_n)$$

On résume cela sur un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \eta_{n-1} & \xrightarrow{\Psi_n} & \hat{\eta}_n & \xrightarrow{M_n} & \eta_n \\ & & & \searrow & \\ & & & \Phi_n & \end{array}$$

On définit alors une dernière quantité, la transformation de Boltzmann-Gibbs pour la mesure de mise à jour.

En effet en notant  $\hat{G}_{n+1} = M_n(G_n)$  et  $\hat{M}_n(f_n) = \frac{M_n(G_n f_n)}{M_n(G_n)}$  on obtient

$$\Psi_n(\hat{\eta}_{n-1}M_n)(f_n) = \frac{\hat{\eta}_{n-1}M_n(G_n f_n)}{\hat{\eta}_{n-1}M_n(G_n)} = \frac{\hat{\eta}_{n-1}(\hat{G}_{n-1}\hat{M}_n(f_n))}{\hat{\eta}_{n-1}(\hat{G}_{n-1})} \quad (5.36)$$

Par la définition suivante

$$\hat{\Psi}_n(\hat{\eta}_n)(d(x_0, \dots, x_n)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{G}_n(x_n)\hat{\eta}_n(d(x_0, \dots, x_n))}{\hat{\eta}_n(\hat{G}_n)} \quad (5.37)$$

et exprimant  $\eta_n$  à partir des mises à jour,

$$\eta_n(f_n) = \frac{\mathbb{E}_{\hat{\eta}_0}[f_n(\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_n) \prod_{p=0}^{n-1} \hat{G}_p(\hat{X}_p)]}{\mathbb{E}_{\hat{\eta}_0}[\prod_{p=0}^{n-1} \hat{G}_p(\hat{X}_p)]} \quad (5.38)$$

où  $\hat{X}_p$  est la chaîne de Markov de loi initiale  $\hat{\eta}_0$  et de loi de transition élémentaire  $\hat{M}_n$ , on peut écrire l'évolution du flot des mises à jour comme le système dynamique

$$\hat{\eta}_{n+1} = \hat{\Phi}_{n+1}(\hat{\eta}_n) = \hat{\Psi}_n(\hat{\eta}_n)\hat{M}_{n+1} \quad (5.39)$$

On l'a déjà mentionné ces processus à valeurs mesures ne sont en général pas calculables sauf dans le cas déjà cité des processus linéaires à bruits de dynamique et d'observation gaussiens, pour lesquels une solution exacte explicite a été donnée par Kalman et Bucy dans leur estimateur qui porte maintenant leur nom (voir annexe A).

Hors de ce cas plein d'enseignements et qui a marqué une étape importante dans les techniques de filtrage optimal, il faut se donner les moyens de traiter les mesures de Feynman-Kac avec des algorithmes séquentiels qui vont généraliser le filtre de Kalman-Bucy. Les pionniers (voir la mise en revue de ces premiers travaux dans [Del Moral et al. \(1995\)](#)) se sont inspirés des méthodes de Monte-Carlo et ont eu l'idée d'approcher ces mesures par des lois empiriques en utilisant des particules en interaction. C'est ce que l'on nomme l'approximation particulaire que l'on va présenter maintenant.

## 5.2 Approximation particulaire du filtrage non-linéaire

Les approximations particulières de mesures de probabilité pour un système dynamique aléatoire sont des méthodes de Monte Carlo séquentielles. Les particules explorent l'espace d'état, en évoluant de manière indépendante obéissant à la dynamique du processus sous-jacent. Elles peuvent interagir sous l'action d'un processus de sélection ou par une évolution utilisant la loi du système dynamique (processus à champ moyen comme ceux étudiés au chapitre 6). La sélection a

pour effet de placer ou de garder les particules dans les régions d'intérêt de l'espace d'état.

Les méthodes particulières ont été développées pour de nombreux domaines de la physique. On citera notamment leur utilisation pour résoudre les équations de Boltzmann ([Sznitman \(1991\)](#); [Méléard \(1996\)](#)) ou pour les équations de Burgers ([Bossy et Talay \(1996a\)](#); [Sznitman \(1991\)](#)) ou plus récemment pour l'équation de Navier-Stokes en 2D dans [Méléard \(2001\)](#) ou 3D dans [Fontbona \(2006\)](#). D'une manière plus générale on trouvera des résultats d'existence et d'unicité pour certaines SPDE non-linéaires dans [Kurtz et Xiong \(1999\)](#).

S'inspirant des méthodes particulières utilisées en modélisation d'équations de la physique, on a pu développer à la fin des années 80 des techniques de filtrage d'un processus bruité par des particules stochastiques. La littérature est maintenant conséquente, on peut lire par exemple [Doucet \*et al.\* \(2001a\)](#).

A partir d'un processus physique évoluant à temps continu on peut construire une estimation particulière continue utilisant des observations discrètes, [Del Moral \*et al.\* \(2001a\)](#) ou [Del Moral et Miclo \(2000\)](#), mais dans ce travail on va privilégier une dynamique et des observations entièrement discrètes.

Pour mieux cerner l'approximation particulière du filtrage reposant sur la description du problème par les flots de mesures de Feynman-Kac, nous commencerons par présenter l'interprétation de McKean de ces flots qui est une particularisation de la dynamique des Feynman-Kac se prêtant bien au problème de filtrage.

Dans ce paragraphe, pour que les notations soient moins lourdes, et sans rien enlever à la généralité nous allons utiliser une dynamique ponctuelle de  $X_n$  en lieu et place du processus historique  $(X_0, \dots, X_n)$ . Rappelons que nous nous sommes placés dans le cas où la fonction potentiel ne considère que l'état courant. Nous reprendrons un peu plus bas, paragraphe 5.3, le problème de l'estimation trajectorielle.

Nous avons vu que les mesures de Feynman-Kac évoluaient selon  $\hat{\eta}_n = \Psi_n(\eta_n)$

et  $\eta_{n+1} = \hat{\eta}_n M_{n+1}$ , soit

$$\eta_{n+1} = \Psi_n(\eta_n) M_{n+1} \quad (5.40)$$

Cette équation intégrale peut également être vue comme une équation récursive de la forme

$$\eta_{n+1} = \eta_n K_{n+1, \eta_n}$$

où  $K_{n+1, \eta_n}$  serait un noyau défini par

$$K_{n+1, \eta_n} = S_{n, \eta_n} M_{n+1}$$

et il faut alors préciser ce qu'est  $S_{n, \eta_n}$ . Cette écriture est appelée l'interprétation de McKean de 5.40. Elle n'est pas unique et on peut définir le noyau  $S_{n, \eta_n}$  de multiples manières.

Par exemple,

$$S_{n, \eta_n}(x_n, \cdot) = \Psi_n(\eta_n)(\cdot)$$

est un choix possible ou bien

$$S_{n, \eta_n}(x_n, \cdot) = G_n(x_n) \delta_{x_n}(\cdot) + [1 - G_n(x_n)] \Psi_n(\eta_n)(\cdot)$$

en est un autre, avec  $\Psi_n(\eta_n)(dx) = \frac{G_n(x)}{\eta_n(G_n)} \eta_n(dx)$ .

Une fois le choix du noyau  $S_{n, \eta_n}$  effectué, par exemple le second, on a l'évolution récursive pour les mesures de probabilité du filtrage

$$\eta_n \xrightarrow{S_{n, \eta_n}} \hat{\eta}_n = \eta_n S_{n, \eta_n} \xrightarrow{M_{n+1}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n M_{n+1} \quad (5.41)$$

Il est possible de montrer (Del Moral *et al.* (2001c)) que pour le noyau  $S_{n, \eta_n}(x_n, \cdot) = G_n(x_n) \delta_{x_n}(\cdot) + [1 - G_n(x_n)] \Psi_n(\eta_n)(\cdot)$  la variance d'erreur est moindre et que l'algorithme est numériquement plus stable utilisant le premier noyau de sélection.

C'est ce type de noyaux que nous l'utiliserons dans la suite de cette étude. Il existe d'autres noyaux plus performant, par exemple en choisissant le noyau de sélection  $S_{n, \eta_n}(x_n, \cdot) = \frac{G_n(x_n)}{\eta_n - \text{ess sup}(G_n)} \delta_{x_n} + [1 - \frac{G_n(x_n)}{\eta_n - \text{ess sup}(G_n)}] \Psi_n(\eta_n)$  on peut montrer que les estimations sont plus précises, la meilleure des particules étant automatiquement conservée lors de la sélection, mais ce noyau a un coût de calcul nettement supérieur que nous bannissons ici.

Avec  $0 \leq G_n \leq 1$ , cette sélection correspond à une transition de marche aléatoire de type loi de Bernoulli où le marcheur reste où il est avec la probabilité  $G_n$  et se redistribue selon la probabilité complémentaire sur un nouveau site tiré aléatoirement en accord avec la loi  $\Psi_n(\eta_n)$ . Le noyau  $\mathcal{S}_{n,\eta_n}$  est appelé le noyau de sélection, il renforce ainsi les positions de l'espace d'état à fort potentiel.

Le modèle d'évolution pour les Feynman-Kac que l'on a décrit en 5.41 correspond à une dynamique dans l'espace des phases en deux étapes :

- Un temps de sélection qui adapte la dynamique pour favoriser les zones de forts potentiels. Elle favorise les zones de l'espace des phases les mieux adaptées au milieu aléatoire.
- Une fois la sélection opérée, un temps d'évolution Markovienne, que l'on va nommer mutation.

Ainsi parallèlement au schéma d'évolution des probabilités conditionnelles de filtrage, on peut donner pour tout  $n \geq 0$  un schéma d'évolution pour le vecteur d'état :

$$X_n \in E_n \xrightarrow{\text{Sélection}} \hat{X}_n \in E_n \xrightarrow{\text{Mutation}} X_{n+1} \in E_{n+1} \quad (5.42)$$

Les noms de sélection et mutation viennent de la biologie où ont été décrits pour la première fois les algorithmes génétiques. Dans ce cadre un groupe d'individus (pour nous l'ensemble des marcheurs de la marche aléatoire) subit des sélections, les individus les moins adaptés au milieu environnant disparaissent au profit des plus pertinents, et d'une génération à l'autre des mutations se produisent. Dans ce cadre l'utilisation des flots de Feynman-Kac est assez pertinente et permet une formalisation des algorithmes génétiques avec des estimations d'erreur des schémas d'approximation [Del Moral \*et al.\* \(2001b\)](#). Dans le filtrage particulière, c'est en quelque sorte ce type de dynamique que l'on reproduit, avec un renforcement des états les plus probables au détriment des autres, et une exploration aléatoire de l'espace des phases entre deux pas de temps. On va retenir le langage de la biologie qui est assez parlant, et qui plus est, on va pouvoir parler pour chaque marcheur, de descendant (au pas de temps après), d'ancêtres (pas de temps précédent), de lignes ancestrales et finalement d'arbres généalogiques. Autrement dit en filtrant sur une trajectoire à un instant  $n$ , ce que l'on cherche à optimiser c'est la ligne ancestrale qui a généré l'état courant  $X_n$  (lire le filtrage par arbres généalogique dans [Del Moral \(2003\)](#) ou [Del Moral \(2004\)](#)). Nous allons balayer ces idées en présentant l'interprétation particulière du filtrage non-linéaire.



On appelle particules des points test de l'espace d'état  $E_n$ ,  $n \geq 0$ , que l'on note  $(\xi_n^i)_{1 \leq i \leq N} \in E_n^N$  pour  $N > 0$ . Ces particules explorent l'espace  $E_n$  et avec la dynamique que l'on va donner échantillonnent empiriquement la loi  $\eta_n$ .

On appelle système de particules en interactions associé au noyau  $K_{n+1, \eta_n} = S_{n, \eta_n} M_{n+1}$  issu de la distribution initiale  $\eta_0$ , la suite de chaînes de Markov inhomogènes  $(\Omega^N = \prod_{n \geq 0} E_n^N, ((F)_n^N)_{n \geq 0}, (\xi_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P}_{\eta_0}^N)$  à valeurs dans l'espace produit  $E_n^N$  où  $\xi_n = (\xi_n^1 \dots \xi_n^N) \in E_n^N$ .

L'état initial  $\xi_0$  se compose de  $N$  copies iid selon  $\eta_0$ . La transition élémentaire du système de particules en interaction est donnée en notant  $m(\xi_{n-1}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\xi_{n-1}^j}$

$$\mathbb{P}_{\eta_0}^N(\xi_n \in dx_n \mid \xi_{n-1}) = \prod_{i=1}^N K_{n, m(\xi_{n-1})}(\xi_{n-1}^i, dx_n^i)$$

Le noyau de transition peut s'exprimer par

$$\mathbb{P}_{\eta_0}^N(\xi_n \in dx_n \mid \xi_{n-1}) = \int_{E_n^N} \mathcal{S}(\xi_n, dx_n) \mathcal{M}_{n+1}(x_n, dx_{n+1})$$

où  $\mathcal{S}(\xi_n, dx_n) = \prod_{i=1}^N S_{n, m(\xi_n)}(\xi_n^i, dx_n^i)$  et  $\mathcal{M}(x_n, dx_{n+1}) = \prod_{i=1}^N M_{n+1}(x_n^i, dx_{n+1}^i)$ .

Pour préciser l'évolution et les erreurs commises avec un système de particules en interaction, à l'instant initial,  $n = 0$ , on distribue aléatoirement, selon  $\eta_0$  qui est une loi de probabilité connue (fournit dans les données du problème),  $N$  points de l'espace d'état  $\xi_0^i$ . L'ensemble de ces points échantillonne la loi  $\eta_0$  et définit la distribution empirique

$$\eta_0^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_0^i}$$

La loi empirique  $\eta_0^N$  approche la loi exacte  $\eta_0$  et la loi faible des grands nombres nous donne pour toute fonction  $f$  bornée l'existence d'une constante  $C_0$  telle que :

$$\mathbb{E}|\eta_0^N(f) - \eta_0(f)| \leq \frac{C_0}{\sqrt{N}} \|f\| \quad (5.43)$$

Pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble des particules  $\xi_n = (\xi_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  va suivre le schéma d'évolution du vecteur d'état :

$$\xi_n \in E_n^N \xrightarrow{\text{Sélection}} \hat{\xi}_n \in E_n^N \xrightarrow{\text{Prédiction}} \xi_{n+1} \in E_{n+1}^N \quad (5.44)$$

avec pour chaque temps  $n > 0$ ,  $E_n^N = \otimes_{i=1}^N E_n$ . Le paquet de particules  $\xi_n$  échantillonne une loi empirique notée

$$\eta_n^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_n^i} \quad (5.45)$$

pour laquelle il faut vérifier qu'elle approche suffisamment la loi  $\eta_n$ , quelque soit le pas de temps.

De même pour l'étape de sélection on note :

$$\hat{\eta}_n^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_n^i} \quad (5.46)$$

la mesure empirique qui va correspondre à  $\hat{\eta}_n$ . On va préciser en quel sens cela est vrai plus bas.

Lors de l'étape de mutation chaque particule évolue selon le noyau de transition exacte  $M_{n+1}$ . Ce n'est pas toujours le cas, on verra au chapitre suivant (6) que pour une dynamique à champ moyen, l'évolution ne se fait qu'avec un noyau de Markov approché ce qui induit des erreurs de propagation que l'on va quantifier.

Au cours de l'étape de sélection, pour tout pas de temps  $n$ , le noyau  $S_{n,\eta_n}$  est approché. Il s'agit là pour chaque particule d'un mécanisme d'acceptation/rejet, où chaque particule interagit avec les autres par le calcul du potentiel relatif de chacune. Le noyau de sélection approché s'écrit :

$$S_{n,\eta_n^N}(\xi_n^i, \cdot) = G_n(\xi_n^i) \delta_{\xi_n^i}(\cdot) + [1 - G_n(\xi_n^i)] \Psi_n(\eta_n^N)(\cdot) \quad (5.47)$$

avec

$$\Psi_n(\eta_n^N)(dx) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^N \frac{G_n(\xi_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(\xi_n^k)} \delta_{\xi_n^j}(dx)$$

On peut rappeler que le potentiel  $G_n$  dans le cas du filtrage a été défini par la fonction de vraisemblance et donne le poids de chaque particule  $\xi_n^i$ ,  $1 \leq i \leq N$  relativement à l'observation courante  $Y_n$ .

Partant de l'approximation initiale on peut déduire par récurrence le comportement asymptotique des mesures empiriques  $\eta_n^N$  et  $\hat{\eta}_n^N$  avec des estimées d'erreur  $\mathbb{L}^p$  et on peut formuler le théorème :

**Théorème 5.2.1** (Del Moral *et al.* (2001c)). *Pour tout temps  $n \geq 0$  et  $p \geq 1$ , il existe des constantes finies  $C_n^{(p)} < \infty$  telle que*

$$\forall f \in \mathcal{B}_b(E) \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|\eta_n^N(f) - \eta_n(f)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C^{(p)}}{\sqrt{N}} \|f\| \quad (5.48)$$

*De plus pour tout fonction  $f \in \mathcal{B}_b(E)$  et  $n \geq 0$  la suite  $\{\eta_n^N f, N \geq 1\}$  converge presque sûrement quand  $N \rightarrow \infty$  vers  $\eta_n f$ .*

Nous passons pour le moment sur la démonstration de 5.48, on peut la trouver dans Del Moral et Guionnet (2001) ou dans le livre Del Moral (2004), et surtout nous allons l'étendre dans le chapitre suivant (6) au cas des processus à champs moyen. Pour la convergence de la suite  $\{\eta_n^N(f), N \geq 1\}$  c'est une conséquence directe du lemme de Borel-Cantelli.

Au cours de la dernière décennie, de nombreux résultats ont été démontrés sur les approximations particulières des distributions de Feynman-Kac. Donnons-en quelques références non-exhaustives.

Dans l'article de Del Moral et Ledoux (2000), les auteurs fournissent une démonstration de la convergence des processus empiriques qui nous sera utile au chapitre suivant. Del Moral et Guionnet (1999) formulent d'ailleurs un théorème centrale limite, avec la convergence du terme d'erreur vers une variable aléatoire gaussienne. On peut également citer des travaux sur la propagation du chaos dans les systèmes de particules approchant les Feynman-Kac Del Moral *et al.* (2006), sur les principes de grandes déviations Del Moral et Miclo (2000).

La description des algorithmes stochastiques par les flots de Feynman-Kac est porteuse d'enseignement, Del Moral et Guionnet (2001) ont montré la stabilité des algorithmes génétiques, puis plus tournés vers le filtrage particulière avec la première forme de noyau de sélection,  $S_{n,\eta_n}(x_n, \cdot) = \Psi_n(\eta_n)(\cdot)$ , Le Gland et Oudjane (2004) ont également réalisé une étude de la stabilité et donné des approximations uniformes.

Plus spécifiquement sur le filtrage particulière il existe une littérature conséquente et plusieurs ouvrages et on peut citer parmi d'autres : Doucet *et al.* (2001a), Del Moral (2004), Crisan *et al.* (1999a), Del Moral et Jacod (2001), Doucet *et al.* (2001b), Del Moral *et al.* (2001a)

### 5.3 Filtrage trajectorien et approximations particulières

Reprenons le cas des dynamiques trajectorielles et montrons que l'interprétation particulière des mesures de Feynman-Kac dans l'espace des chemins est un modèle d'arbres généalogiques (Del Moral (2004) ou Miclo et Del Moral (2001)). Les arbres généalogiques représentent l'évolution des lignes ancestrales d'un ensemble d'individus (voir également Del Moral *et al.* (2001c)).

On considère  $X'_n$  une chaîne de Markov évoluant pour tout  $n \geq 0$  dans un espace  $E'_n$  mesuré de tribu  $\mathcal{E}'_n$ , de distribution initiale  $\eta'_0 \in \mathcal{P}(E'_0)$  et de loi de transition  $M'_{n+1}$  de  $(E'_n, \mathcal{E}'_n)$  dans  $(E'_{n+1}, \mathcal{E}'_{n+1})$ .

On suppose que pour chaque  $n \geq 0$  il existe une fonction potentiel  $G'_n$  de la variable  $X'_n$  de  $E'_n$  dans  $[0, 1]$ .

Utilisant le couple  $(M'_n, G'_n)$ , on peut donc définir des flots de Feynman-Kac associés tels que pour toute fonction  $f_n$  bornée mesurable sur  $(E'_n, \mathcal{E}'_n)$  :

$$\eta_n^{X'}(f_n) = \frac{\gamma_n^{X'}(f_n)}{\gamma_n^{X'}(1)} \quad \text{et} \quad \hat{\eta}_n^{X'}(f_n) = \frac{\hat{\gamma}_n^{X'}(f_n)}{\hat{\gamma}_n^{X'}(1)}$$

avec

$$\gamma_n^{X'}(f_n) = \mathbb{E}_{\eta'_0}[f(X'_n) \prod_{p=1}^{n-1} G'_p(X'_p)] \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_n^{X'}(f_n) = \mathbb{E}_{\eta'_0}[f(X'_n) \prod_{p=1}^n G'_p(X'_p)]$$

A partir de la marche aléatoire  $X'_n$  on peut construire le processus de trajectoire :

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} (X'_0 \dots X'_n) \quad [ \in E_n \stackrel{\text{def}}{=} E'_0 \times \dots \times E'_n ]$$

L'espace  $E_n$  est muni de tribu produit  $\mathcal{E}_n = \prod_{p=0}^n \mathcal{E}'_p$ .

Alors  $X_n$  est également une chaîne de Markov sur  $(E_n, \mathcal{E}_n)$ , de loi initiale  $\eta_0 = \eta'_0 \in \mathcal{P}(X_0)$ , de point et d'espace de départ  $X_0 = X'_0$  et  $E_0 = E'_0$ , et enfin de loi de transition de  $E_n$  dans  $E_{n+1}$  :

$$M_{n+1}(x_n, dx_{n+1}) = \delta_{X_n}(dx_n) \cdot M'_{n+1}(x'_n, dx'_{n+1}) \quad (5.49)$$

avec  $x_n = (x'_0 \dots x'_n)$  et  $dx_{n+1} = (dx'_0, \dots, dx'_{n+1})$ .

On suppose que pour la trajectoire  $X_n$  le potentiel, toujours noté  $G_n$  est défini par  $G_n(X_n) = G'_n(X'_n)$ .

Le flot de Feynman-Kac est donné pour une fonction mesurable bornée  $f \in \mathcal{B}(E_n)$  par

$$\eta_n^X(f) = \mathbb{E}_{\eta_0}(f(X_n) \prod_{p=0}^{n-1} G'_p(X'_p)) / \mathbb{E}_{\eta_0}(\prod_{p=0}^{n-1} G'_p(X'_p)) \quad (5.50)$$

et ce que l'on a déjà écrit sur les Feynman-Kac dans le cas ponctuel pour la représentation de McKean ou pour l'approximation particulière reste toujours valable, la sélection ne se faisant que sur le point terminal.

Pour mettre en correspondance la chaîne de Markov  $X'_n$  et les marginales de son processus historique  $X_n$ , on va définir des projecteurs canoniques  $\pi_n$  :

$$\pi_n : X_n \in E_n \rightarrow \pi_n(X_n) = X'_n \in E'_n \quad (5.51)$$

A partir de ce projecteur on va définir pour une mesure  $\rho \in \mathcal{M}(E_n)$ , la mesure image  $\rho' = \rho \circ \pi_n^{-1} \in \mathcal{M}(E'_n)$  et vérifier que  $\eta_n^{X'} = \eta_n^X \circ \pi_n^{-1}$  et se trouve être la  $n$ -ième marginale de  $\eta_n^X$ .

Comme il sera nécessaire pour les particules trajectorielles, on note  $\pi_n^N$  le projecteur sur l'espace produit  $E_n^N = \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_{N \text{ fois}}$  défini par :

$$\begin{aligned} \pi_n^N : E_n^N &\longrightarrow (E'_n)^N \\ (X_n^1, \dots, X_n^N) &\longmapsto (\pi_n(X_n^1), \dots, \pi_n(X_n^N)) = (X_n^{1'}, \dots, X_n^{N'}) \end{aligned}$$

avec  $X_n^i = (X_n^{i'}, \dots, X_n^{i'})$  et  $0 \leq i \leq N$

On définit alors les particules trajectorielles  $\xi_n^i$  et  $\hat{\xi}_n^i$  par

$$\xi_n^i = (\zeta_{0,n}^i, \dots, \zeta_{n,n}^i) \quad \text{et} \quad \hat{\xi}_n^i = (\hat{\zeta}_{0,n}^i, \dots, \hat{\zeta}_{n,n}^i)$$

Usant de la structure des Feynman-Kac à la fois pour  $X'_n$  et  $X_n$  on peut définir la mesure de Boltzmann-Gibbs et les noyaux de sélection empiriques :

$$\Psi_n^X \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\xi_n^j} \right) (dx) = \sum_{j=1}^N \frac{G'_n(\zeta_{n,n}^j)}{\sum_{k=1}^N G'_n(\zeta_{n,n}^k)} \delta_{\xi_n^j} (dx) \quad (5.52)$$

$$S_{n, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\xi_n^j}}^X (\xi_n^i, \cdot) = G'_n(\zeta_{n,n}^i) \delta_{\xi_n^i}(\cdot) + [1 - G'_n(\zeta_{n,n}^i)] \Psi_n^X \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\xi_n^j} \right) (\cdot) \quad (5.53)$$

La définition de la sélection trajectorielle nous donne

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\zeta_{n,n}^j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\pi_n(\xi_n^j)}$$

alors on peut vérifier que la sélection du point terminal correspond au noyau de sélection  $S_{n, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\zeta_{n,n}^j}}^{X'}$  :

$$S_{n, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\zeta_{n,n}^j}}^{X'}(\zeta_{n,n}^i, \cdot) = G'_n(\zeta_{n,n}^i) \delta_{\zeta_{n,n}^i}(\cdot) + [1 - G'_n(\zeta_{n,n}^i)] \Psi_n^{X'}\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\zeta_{n,n}^j}\right)(\cdot) \quad (5.54)$$

avec la transformation de Boltzmann-Gibbs :

$$\Psi_n^{X'}\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\zeta_{n,n}^j}\right)(dx) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \frac{G'_n(\zeta_{n,n}^j)}{\sum_{k=1}^N G'_n(\zeta_{n,n}^k)} \delta_{\zeta_{n,n}^j}(dx) \quad (5.55)$$

On notera que si la sélection se fait sur  $\zeta_{n,n}^i$  le seul point terminal de  $\xi_n^i$ , c'est toute la trajectoire  $\xi_n^i$  qui reste inchangée ou branche sur une autre.  $\hat{\xi}_n^i$  est la nouvelle ligne ancestrale et dans l'étape suivante, par augmentation d'état, la mutation rajoute un point à la trajectoire et  $\xi_{n+1}^i = (\hat{\xi}_n^i, \zeta_{n+1,n+1}^i)$ .

En notant  $\xi_n = (\xi_n^i)_{i=1}^N$  l'ensemble des  $N$  trajectoires, on montre une correspondance entre les modèles ponctuels d'évolution et des marginales du modèle trajectoriel d'évolution.

**Proposition 5.3.1** (Del Moral (2004)). *Soit  $(\xi_n, \hat{\xi}_n)$  le modèle d'évolution à  $N$  particules trajectorielles associées à la mesure de Feynman-Kac  $\eta_n^X$ . Le processus stochastique défini par*

$$\zeta_n = \pi_n^N(\xi_n) \quad \text{et} \quad \hat{\zeta}_n = \pi_n^N(\hat{\xi}_n)$$

*coïncide avec le modèle d'évolution à  $N$  particules associé à la mesure de Feynman-Kac  $\eta_n^{X'}$ .*

*Démonstration.* Pour  $n \geq 0$ , soient  $x_n = (x'_0, \dots, x'_n) \in E_n$  et  $z_n = (z'_0, \dots, z'_n) \in E_n$ , on note  $dz_n = (dz'_0, \dots, dz'_n)$ . Soit  $f_n \in \mathcal{B}_b(E'_n)$  une fonction mesurable bornée.

Pour une mesure  $\eta \in \mathcal{M}(E)$ , un calcul direct sur  $S_{n,\eta}^X$  amène :

$$\int_{E_n} f_n(\pi_n(z_n)) S_{n,\eta}^X(x_n, dz_n) = \int_{E'_n} f_n(z'_n) S_{n,\eta \circ \pi_n^{-1}}^{X'}(\pi_n(x_n), dz'_n)$$

De même un autre calcul nous permet d'écrire :

$$\int_{E_n} f_n(\pi_n(z_n)) M_n(x_{n-1}, dz_n) = \int_{E'_n} f_n(z'_n) M'_n(\pi_{n-1}(x_{n-1}), dz'_n)$$

Utilisant ces égalités, on déduit les expressions suivantes, d'abord pour l'étape de mise à jour :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\eta_0}^N(f_n(\pi_n^N(\hat{\xi}_n)) | \xi_n) &= \int_{E_n^N} f_n(\pi_n^N(x_n)) \prod_{i=1}^N S_{n, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\xi_n^j}}^{X'}(\xi_n^i, dx_n^i) \\ &= \int_{E_n'^N} f_n(x'_n) \prod_{i=1}^N S_{n, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\zeta_{n,n}^j}}^{X'}(\zeta_{n,n}^i, dx_n'^i) \\ &= \mathbb{E}_{\eta_0}^N(f_n(\hat{\zeta}_{n,n}) | \zeta_{n,n}) \end{aligned}$$

puis pour l'étape de prédiction

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\eta_0}^N(f_{n+1}(\pi_{n+1}^N(\xi_{n+1})) | \hat{\xi}_n) &= \int_{E_{n+1}^N} f_{n+1}(\pi_{n+1}^N(x_{n+1})) \prod_{i=1}^N M_{n+1}(\hat{\xi}_n^i, dx_{n+1}^i) \\ &= \int_{E_{n+1}'^N} f_{n+1}(x'_{n+1}) \prod_{i=1}^N M'_{n+1}(\hat{\zeta}_{n,n}^i, dx_{n+1}'^i) \\ &= \mathbb{E}_{\eta_0}^N(f_{n+1}(\zeta_{n+1,n+1}) | \hat{\zeta}_{n,n}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit directement la proposition. ■

En supposant que  $\eta_n^X$  soit une suite de loi de probabilités possédant une interprétation de McKean, c'est à dire qu'il existe  $K_{n+1, \eta_n^X}^X$  telle que

$$\eta_{n+1}^X = \eta_n^X K_{n+1, \eta_n^X}^X$$

et en supposant que  $\eta_n^{X'}$  ait une interprétation de McKean,

$$\eta_{n+1}^{X'} = \eta_n^{X'} K_{n+1, \eta_n^{X'}}^{X'}$$

alors on peut montrer que si les noyaux de McKean sont tels que

$$K_{n+1, \eta_n^X}^X(x_n, \cdot) \circ \pi_{n+1}^{-1} = K_{n+1, \eta_n^X \circ \pi_n^{-1}}^{X'}(\pi_n(x_n), \cdot)$$

il y a coïncidence entre les modèles particuliers d'évolution au sens donné par la proposition précédente [5.3.1](#).

Les collections de noyaux de McKean,  $K_{n+1, \eta_n^{X'}}^{X'}$  et  $K_{n+1, \eta_n^X}^X$  permettent de définir la mesure de McKean associé à ces noyaux et à  $\eta_0$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{\eta_0, n}^X((dx_1, dx_2, \dots, dx_n)) &= \eta_0(dx_0) K_{1, \eta_0}^X(x_0, dx_1) \dots K_{n, \eta_{n-1}^X}^X(x_{n-1}, dx_n) \\ \mathbb{K}_{\eta_0, n}^{X'}((dx'_1, dx'_2, \dots, dx'_n)) &= \eta_0(dx'_0) K_{1, \eta_0}^{X'}(x'_0, dx'_1) \dots K_{n, \eta_{n-1}^{X'}}^{X'}(x'_{n-1}, dx'_n)\end{aligned}$$

Alors  $\eta_n^X$  est la loi de  $X_n$  sous  $\mathbb{K}_{\eta_0, n}^X$  et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\eta_0}(f(X_n)) &= \int_{E_n} f(x_n) (\eta_{n-1} K_{n-1, \eta_{n-1}}^X)(dx_n) \\ &= \eta_n(f)\end{aligned}\tag{5.56}$$

Au travers de l'interprétation de McKean, on met en valeur la notion d'arbre généalogique attachée à la trajectoire  $X_n$ , qui est une chaîne de Markov de loi de transition  $K_{n, \eta_{n-1}^X}^X$  et de loi initiale  $\eta_0$ . Dans l'approximation particulière, les mesures approchées sont données par :

$$\mathbb{K}_{\eta_0, n}^{X', N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\zeta_0^1, \dots, \zeta_n^i)}\tag{5.57}$$

$$\mathbb{K}_{\eta_0, n}^{X, N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\xi_0^1, \dots, \xi_n^i)}\tag{5.58}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{((\zeta_0^i, 0), (\zeta_0^i, 1, \zeta_1^i, 1), (\zeta_0^i, 2, \zeta_1^i, 2, \zeta_2^i, 2), \dots, (\zeta_0^i, n, \zeta_1^i, n, \dots, \zeta_n^i, n))}\tag{5.59}$$

Alors la mesure de prédiction de Feynman-Kac normalisée empirique s'écrit :

$$\eta_n^{X, N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\zeta_0^i, n, \dots, \zeta_n^i, n)}\tag{5.60}$$

Pour terminer sur l'approximation particulière du filtrage trajectorien, se référant à [Del Moral et al. \(2001c\)](#) où l'on en trouvera la démonstration, on peut formuler le théorème suivant :

**Théorème 5.3.1.** *Sous une hypothèse de régularité des noyaux de transitions  $K_{n+1, \eta_n^X}^X$  (voir [Del Moral et al. \(2001c\)](#)) pour tout  $p \geq 1$  et  $n \geq 0$  il existe des constantes finies  $c_n(p)$  telles que pour toute fonction bornée  $f \in \mathcal{B}_b(E_n)$*

$$\mathbb{E}(|\eta_n^{X, N}(f) - \eta_n^X(f)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_n(p)}{\sqrt{N}} \|f\|\tag{5.61}$$



La démonstration complète se trouve dans [Del Moral \(2004\)](#).

Ce chapitre était une mise en revue du filtrage de processus non-linéaire, et nous a permis de voir comment pouvait s'écrire le processus de filtrage en temps continu. On a pu mesurer la difficulté de la mise en œuvre hors du cas de processus linéaires gaussiens. On pourra lire dans l'annexe [A](#) une présentation de différents types de filtrage basés sur le filtre de Kalman-Bucy. Nous avons ensuite traité le problème du filtrage discret trajectoriel où l'estimateur optimal du filtrage non-linéaire s'exprime exactement au moyen des mesures de Feynman-Kac. Ces mesures se révèlent des opérateurs intégraux sans solutions analytiques et nous avons présenté les techniques particulières permettant d'obtenir une solution approchée. L'interprétation de McKean du filtrage non-linéaire, bien qu'elle ne soit pas toujours possible, permet de décrire une dynamique des lois du filtrage qui se révèle pratique dans l'étude des flots de Feynman-Kac et dans la technique du filtrage par arbres généalogiques. En plus d'une approximation, les méthodes particulières fournissent des algorithmes de résolution séquentiels, la solution optimale est alors obtenue de manière récursive, ce qui permet une exploitation en temps réel du filtrage non-linéaire. Si le filtrage a été la motivation de ces travaux, il faut noter que l'on peut également les utiliser en modélisation des champs aléatoires observés et en particulier lors de l'étape d'assimilation des données. Cette assimilation, de type 4D, permet alors d'obtenir les trajectoires optimales pour les modèles de simulation.

Dans les chapitres qui suivent, nous allons poursuivre par l'étude que nous avons faite du filtrage des processus à champ moyen, puis nous verrons une application développée pour le filtrage des mesures expérimentales des vitesses d'un fluide turbulent. Pour se faire, nous avons mis en place un algorithme de filtrage original permettant d'optimiser les performances en temps de calcul de l'estimateur à champ moyen classique.

# Chapitre 6

## Filtrage de processus à champ moyen

Pour la conceptualisation ou pour la modélisation des phénomènes physiques, il est courant de séparer les échelles en appliquant des méthodes d'analyse différentes selon leur nature. Ainsi il est possible de considérer la nature microscopique d'un côté et macroscopique de l'autre, ou bien d'effectuer la séparation entre des structures de grandes échelles d'évolution lente, d'allure déterministe et des phénomènes de plus petites échelles semblant aléatoires.

Au delà de cette séparation phénoménologique, il y a des différences dans les méthodes mathématiques employées pour traiter chacune des parties des domaines séparés. Cela conduit également à des questions ou des difficultés spécifiques. Par exemple le traitement microscopique va nécessiter de modéliser le comportement des particules, il faudra vérifier que le traitement d'un nombre limité de particules à le même comportement qu'un nombre naturellement illimité (ou presque), c'est le phénomène de propagation du chaos, ou bien qu'il existe une convergence de la mesure empirique associée au système de particules vers une densité correspondant à la description macroscopique, c'est la limite de champ moyen.

Dans une représentation probabiliste des équations de dynamiques des systèmes physiques, Kac propose (voir [Kac \(1956\)](#)) d'étudier non pas les systèmes d'équations eux-mêmes, qui peuvent s'avérer complexes, mais d'utiliser un modèle plus simple, Markovien, pour le comportement d'un ensemble de particules. [McKean \(1966\)](#) propose alors une modélisation des diffusions par des systèmes de particules interagissant entre elles au travers du champ moyen. Pour écrire ces systèmes on se place sur l'espace canonique  $\Omega = \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$ , avec  $T > 0$  et  $d$

la dimension du vecteur d'état  $x$  et , à chaque instant  $0 \leq t \leq T$ , le système d'équations a comme inconnue une mesure de probabilités  $\pi_t$  solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{a_{i,j}(x, \pi_t) \cdot \pi_t\} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \{b_i(x, \pi_t) \cdot \pi_t\} \quad (6.1)$$

McKean (1967) en premier lieu a étudié l'existence des solutions martingales et la propagation du chaos pour le système de particules associé. Utilisant des mesures-martingales Méléard et Roelly-Coppoletta (1988) ont particularisé l'étude pour le cas où  $a(x, \pi_t) = \int a(x, y) \pi_t(dy)$  et  $b(x, \pi_t) = \int b(x, y) \pi_t(dy)$ . Tanaka (1978) montre l'application de ces représentations probabilistes à l'équation de Boltzmann puis Sznitman (1991) a terminé l'étude avec la convergence et la propagation du chaos du système particulaire et a étendu ses résultats à l'équation de Burgers. Bossy et Talay (1996a) ont quant à eux quantifié les erreurs du schéma d'intégration d'Euler associé aux méthodes particulières pour les équations de McKean-Vlasov et Burgers. On peut lire également sur ce sujet de la discrétisation le cours CIME de Denis Talay (1996) sur les méthodes numériques probabilistes.

Plus récemment dans le cadre du transport de la mesure pour des problèmes du type champ moyen et de leur approche particulaire, Bolley (2005) a repris et étendu des résultats sur les inégalités de concentration ou de déviations. Ses résultats sont appliqués aux équations de transport de Vlasov ou d'Euler pour les fluides inviscides.

La séparation grandes/petites structures est d'une autre nature. La composante grande échelle est vue comme un champ moyen du système autour duquel des fluctuations rendent compte des signaux transitoires et sont de moyennes nulles. Ce type d'analyse pose le problème de la méthode à utiliser pour effectuer la césure. Les mécaniciens des fluides ont pour habitude de procéder à cette disjonction par un filtrage fréquentiel de type Fourier voire par des ondelettes. Ces outils ont leur utilité pratique, mais ne correspondent pas à l'idée d'un champ moyen support du phénomènes. En effet le champ moyen peut se répartir sur tous les coefficients de la transformée de Fourier. Mais utiliser la vraie nature de ce type de séparation impliquerait la connaissance de la loi de ce vecteur d'état ou bien que l'on dispose d'un moyen permettant de l'approcher. Cette voie est peu explorée et c'est celle que l'on a choisi pour effectuer le filtrage des mesures expérimentales de vitesses d'un fluide.

Ce chapitre va maintenant caractériser le filtrage des mesures expérimentales d'un processus à champ moyen pour divers types de lois et donner des démon-

trations nouvelles de convergence pour le filtrage de processus à champ moyen. D'abord pour le cas d'un processus utilisant la loi a priori du vecteur d'état, ensuite pour le cas où la loi est conditionnée par la réalisation d'une variable aléatoire jouant le rôle de commande, et pour terminer lorsque la loi du champ moyen est conditionnée par les observations de la dynamique.

On trouvera dans [Del Moral \*et al.\* \(2001c\)](#) le cas du filtrage pour des processus utilisant la loi a priori, on va reprendre cela en détail, et dans [Crisan \*et al.\* \(1999a\)](#) l'étude du filtrage pour un processus de Markov dont le noyau de transition dépend conditionnellement de l'observation. Seulement les auteurs utilisent pour le noyau de Markov une hypothèse qu'il sera difficile de satisfaire dans le cas de modèles physiques non triviaux. Pour notre part, nous allons adopter une description de la dynamique telle que l'a proposée [Sznitman \(1991\)](#).

## 6.1 Cadre général du filtrage de processus à champ moyen

Commençons par poser les notations du chapitre et retracer les démonstrations de convergence des méthodes particulières dans les cas les plus simples où la loi de champ moyen est connue exactement. Ce n'est pas très réaliste mais cela revêt un caractère pédagogique, les estimations établies à cette occasion serviront pour tous les autres types de champ moyen. Ensuite on s'appliquera à détailler les cas d'intérêt pour le filtrage des mesures effectuées sur la turbulence.

Soit un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ , et  $(E, \mathcal{B})$  l'espace d'état que l'on prend métrique, localement compact et que l'on munit de la tribu Borélienne  $\mathcal{B}$ .

Comme au chapitre précédent on prend les notations intégrales suivantes pour toute mesure finie  $\mu$  définie sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ , pour tout noyau de transition  $Q$  de  $(E, \mathcal{E})$  dans  $(F, \mathcal{F})$  espace mesurable, pour toute fonction  $f$  bornée mesurable sur l'espace  $E$  et pour tout élément  $A$  de la tribu  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \int_E f(x) \mu(dx) \\ (Qf)(x) &= \int_F Q(x, dy) f(y) \\ (\mu Q)(A) &= \int_E \mu(dx) Q(x, A)\end{aligned}$$

De plus pour toute fonction mesurable bornée  $f$  sur l'espace  $E$ , on définit la norme  $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$ .

Soit  $X_n$  un processus discret à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$  de loi  $\pi_n$ , avec pour valeur à l'instant  $t = 0$ ,  $X_0$  une variable aléatoire distribuée selon la mesure de probabilité  $\eta_0$ , loi initiale du processus. On suppose que  $X_n$  est un processus de type champ moyen, c'est à dire que  $X_n$  seul n'est pas Markovien, mais que le processus de Markov est donné par le couple  $(X_n, \pi_n)$ . De plus on va supposer que l'équation d'évolution pour  $(X_n, \pi_n)$  a la forme particulière suivante :

$$X_{n+1} = X_n + b(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \quad (6.2)$$

où  $W_n^X$  est un  $\mathcal{F}_n$ -mouvement Brownien,  $b$  est une fonction localement bornée et Lipschitzienne en loi,  $\Delta t$  est le pas de temps de la discrétisation et  $\sigma_n^X$  est une fonction en temps positive.

Ce type de modèle de dynamique appartient à la classe des équations de McKean-Vlasov. Cette classe d'équations a fait l'objet de nombreuses études, notamment par A.S Sznitman et S. Méléard dans les cas continus (Sznitman (1991); Méléard (1996)). Avec les hypothèses que l'on a formulé, on est assuré de l'existence et de l'unicité trajectorielle et en loi des solutions de l'équation (6.2). Pour les systèmes de particules en interaction associés à ces équations de McKean-Vlasov, Sznitman (1991) nous montre qu'ils vérifient la propriété de propagation du chaos, et nous fournit les erreurs de l'approximation particulaire. Bossy et Talay (1996b) donnent quant à eux des estimations de convergence des erreurs du schéma de discrétisation d'Euler.

Pour la suite de l'étude il sera nécessaire de particulariser la forme de la fonction  $b$ . On prendra alors pour  $b$  l'écriture

$$b(X_n, \pi_n) = A(X_n) + \int B(X_n, x)\pi_n(dx) \quad (6.3)$$

où  $A$  et  $B$  seront des fonctions bien définies. Dans tout ce chapitre la fonction  $A$  est choisie bornée, la fonction  $B$  est supposée bornée en sa première variable, c'est à dire qu'il existe  $C^B$  tel que pour tout  $x' \in E$ ,  $\|B(\cdot, x')\| \leq C^B$  et la fonction  $b : (x', \mu) \in E \times \mathcal{M}_1(E) \rightarrow b(x', \mu)$  est supposée Lipschitzienne de paramètre  $L^B$  en sa seconde variable, c'est à dire que pour tout  $x \in E$  et  $(\mu, \nu) \in \mathcal{M}_1(E) \times \mathcal{M}_1(E)$ ,

$$\|b(x, \mu) - b(x, \nu)\| \leq L^B \cdot C^B \cdot \|\mu - \nu\|_{\mathcal{H}} \quad (6.4)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  est une norme sur une classe de fonction  $\mathcal{H}$  que l'on explicitera par après.

Notre intérêt se porte sur le filtrage non-linéaire d'un processus à champ moyen.

Le problème formel a été entièrement décrit au chapitre précédent, rappelons-en les grandes lignes en adaptant les notations à la situation présente. Dans ce cadre  $X_n$  est maintenant inatteignable, et seulement observé par le paramètre  $Y_n$  pour lequel on dispose pour chaque instant  $n$  d'une fonction de transfert appelée équation d'observation. On écrit alors le système du filtrage :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + b(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0 &\sim \eta_0 \\ Y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (6.5)$$

où  $h : X_n \rightarrow Y_n$  est une fonction bornée,  $W_n^Y$  est un  $\mathcal{F}_n$ -mouvement Brownien, et  $\sigma_n^Y$  une fonction positive du temps.

On note les deux flots de Feynman-Kac  $(\eta_n, \hat{\eta}_n)$ , où le prédicteur est défini pour toute fonction-test  $f$  bornée mesurable par  $\eta_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0 \dots X_n) \mid Y_0 \dots Y_{n-1}]$  et le flot du filtre par  $\hat{\eta}_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0 \dots X_n) \mid Y_0 \dots Y_n]$ .

Le problème du filtrage stochastique se résout en calculant la

$$Loi(X_0 \dots X_n \mid Y_0 \dots Y_n)$$

Nous avons vu au chapitre précédent que le filtrage sur le processus historique se ramenait à un processus Markov particulier. Dans ce chapitre, pour simplifier les notations, on se ramène au problème de filtrage réduit au calcul de la  $loi(X_n \mid Y_0 \dots Y_n)$ . Tout ce que l'on va écrire alors sera transposable sans difficulté au filtrage dans l'espace des trajectoires en utilisant un filtrage par arbre généalogique (voir chapitre 5) au lieu du filtrage génétique ponctuel que l'on présente ici. Dans ce cas ponctuel les distributions de Feynman-Kac s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} \eta_n &= Loi(X_n \mid Y_0 \dots Y_{n-1}) \\ \hat{\eta}_n &= Loi(X_n \mid Y_0 \dots Y_n) \end{aligned}$$

On suppose que  $Y_n$  et  $h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y$  sont absolument continues (c'est généralement vrai), on définit la fonction de potentiel

$$G_n(X_n) = e^{-\frac{(Y_n - h(X_n))^2}{2 \cdot \sigma_n^Y{}^2}} \quad (6.6)$$

Le filtrage est un processus séquentiel et l'on a le schéma d'évolution temporelle :

$$X_n \xrightarrow{\text{Mise à jour}} \hat{X}_n \xrightarrow{\text{Prédiction}} X_{n+1} \quad (6.7)$$

$$\eta_n \xrightarrow{S_{n,\eta_n}} \hat{\eta}_n \xrightarrow{M_{n+1,\pi_n}} \eta_{n+1} \quad (6.8)$$

où

– Le noyau de sélection s'écrit

$$S_{n,\eta_n}(x, dy) = G_n(x)\delta_x(dy) + (1 - G_n(x))\Psi_n(\eta_n)(dy) \quad (6.9)$$

avec la loi de redistribution de Boltzmann-Gibbs

$$\Psi_n(\eta_n)(dy) = \frac{G_n(y) \cdot \eta_n(dy)}{\eta_n(G_n)} \quad (6.10)$$

– Le noyau de transition  $M_{n+1,\pi_n}$  utilise l'équation de dynamique :

$$X_{n+1} = X_n + b(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X = \mathcal{F}(X_n, \pi_n, \Delta W_n^X) \quad (6.11)$$

et on a

$$\begin{aligned} M_{n+1,\pi_n}(x_n, dx_{n+1}) &= \mathbb{P}(X_{n+1} \in dx_{n+1} | X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{F}(X_n, \pi_n, \Delta W_n^X) \in dx_{n+1}) \end{aligned}$$

Selon la représentation de McKean on suppose que le flot de prédiction peut prendre la forme

$$\eta_{n+1} = \eta_n \cdot K_{n+1,\eta_n,\pi_n} \quad (6.12)$$

avec

$$\begin{aligned} K_{n+1,\eta_n,\pi_n}(x, dy) &= S_{n,\eta_n} \cdot M_{n+1,\pi_n}(x, dy) \\ &= \int S_{n,\eta_n}(x, dz) \cdot M_{n+1,\pi_n}(z, dy) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ce problème de filtrage est infini-dimensionnel par la nature du couple Markovien  $(X_n, \pi_n)$ .

Dans ce chapitre, nous allons générer toute une famille de processus à champ moyen, avec en lieu et place de la loi a priori et exacte  $\pi_n$  :

- la loi a priori  $\pi_d^n$  approchée empiriquement par un système de  $d$  particules.
- la loi du prédicteur apprise par l'algorithme de filtrage  $\eta_n^N$ .

- la loi du filtre empirique  $\hat{\eta}_n^N$ .
- la loi de  $X_n^{(2)}$  sachant  $X_n^{(1)}$  pour le cas où  $X_n^{(2)}$  dépend de la chaîne  $(X_0^{(1)} \dots X_n^{(1)})$  agissant comme une commande.
- une combinaison des 2 dernières, avec la loi de  $X_n^{(2)}$  sachant  $X_n^{(1)}$  et sachant les observations  $Y_0 \dots Y_n$ .

Chacune de ces lois de champ moyen correspond à une situation physique différente et donc à un modèle sous-jacent différent. La loi a priori peut être vue comme celle qui dépend de la position du vecteur d'état ignorant toute autre information comme la série d'observation. Même si cette loi est très naturelle, il se peut que la quantité à filtrer soit pilotée par des observations (problème de type contrôle actif) ou que le nombre de degrés de liberté du système soit trop important et qu'il soit astucieux dans la modélisation de le conditionner à l'observation. Dans ce second cas nous aurons à utiliser la loi du prédicteur ou du filtre lui-même. Dans cette dernière situation, le processus évolue selon les lois apprises par la technique de filtrage et de fait la dynamique se trouve étroitement liée aux observations. La qualité du filtrage sera très dépendante de la bonne modélisation de l'équation de transfert. Voyons avec des démonstrations nouvelles, l'estimation des erreurs commises dans le filtrage particulière pour chacune des situations que l'on vient d'évoquer.

### 6.1.1 Lemmes techniques

Pour réaliser nos estimations d'erreur, nous aurons besoin de quelques lemmes sur la convergence des processus empiriques que l'on peut trouver dans [Del Moral \(2004\)](#), qui étendent les résultats de [Del Moral et Ledoux \(2000\)](#).

On rappelle pour commencer un résultat bien utile dans l'établissement de majoration  $L^p$ , l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund :

**Lemme 6.1.1.** *Soit  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et centrées. Alors pour  $p \geq 1$  il existe des constantes  $A_p, B_p$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ , presque sûrement on a*

$$A_p \left\| \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \leq B_p \left\| \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

Avec pour toute fonction suffisamment intégrable  $\| \cdot \|_p = \mathbb{E} [ | \cdot |^p ]^{\frac{1}{p}}$



Soit  $\mathcal{H}$  un sous-ensemble des fonctions  $h$  mesurables bornées telles que  $\|h\| \leq 1$  complété de la fonction unité. Pour 2 mesures  $\mu$  et  $\nu$  de  $\mathcal{M}_1(E)$ , on note la semi-norme sur  $\mathcal{H}$  :

$$\|\mu - \nu\|_{\mathcal{H}} = \sup\{ |\mu(h) - \nu(h)| \mid \text{tel que } h \in \mathcal{H} \}$$

Pour mesurer la taille d'une classe de  $\mathcal{H}$  on compte le nombre minimal de boules  $L^p$  de rayon  $\varepsilon > 0$  nécessaires pour la recouvrir. Ce nombre est noté  $\mathcal{N}(\varepsilon, \mathcal{H})$ .

On définit également l'entropie intégrale  $I(\mathcal{H}) = \int_0^1 \sqrt{\ln(1 + \mathcal{N}(\varepsilon, \mathcal{H}))} d\varepsilon$ .

Pour tout noyau de transition Markovien  $M$  et toute fonction de potentiel  $G$  telle que  $\|G\| \leq 1$ , on note  $G.M\mathcal{H} = \{G.M(h), h \in \mathcal{H}\}$ .

**Lemme 6.1.2.** *Avec les hypothèses précédentes, pour tout  $\varepsilon > 0$  on obtient l'inégalité pour le nombre de recouvrement*

$$\mathcal{N}(\varepsilon, G.M\mathcal{H}) \leq \mathcal{N}(\varepsilon, \mathcal{H}) \tag{6.14}$$

et pour l'entropie intégrale

$$I(G.M\mathcal{H}) \leq I(\mathcal{H}) \tag{6.15}$$

Ce premier lemme conduit au résultat suivant qui nous sera utile par la suite donnant un contrôle  $L^p$  pour le processus empirique.

**Lemme 6.1.3.** *Pour tout  $N > 0$ , soit  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq N}$  une suite de mesures sur  $(E, \mathcal{E})$ ,  $(X^i)_{i \geq 1}$  une suite de v.a. distribuées selon  $\mu_i$ . On note  $m(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X^i}$  le processus empirique et  $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i$  la mesure moyenne.*

*Pour tout  $p \geq 1$ , on a la majoration*

$$\sqrt{N} \mathbb{E}(\|m(X) - \mu\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq C_p I(\mathcal{H}) \tag{6.16}$$

Les démonstrations de ces inégalités se trouvent dans le chapitre 7 de [Del Moral \(2004\)](#).

## 6.2 Filtrage particulière pour des lois de champ moyen exactes $\vartheta_n$

Dans ce premier cas, on suppose que l'évolution de la dynamique utilise un flot de mesure connu et explicitement donné  $\vartheta_n$ . Après coup cette loi exacte pourra être la loi a-priori  $\pi_n$  ou la loi d'un paramètre externe non décrit par la dynamique mais parfaitement connue.

Pour tout temps  $n \geq 0$ , on suppose donné le système dynamique suivi par le couple  $(X_n, Y_n)$  :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + b(X_n, \vartheta_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n = h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0 \sim \eta_0 \\ Y_0 = y_0 \end{cases} \quad (6.17)$$

où  $\vartheta_n$  est la loi du champ moyen que l'on suppose parfaitement décrite,  $\sigma_n^X$  et  $\sigma_n^Y$  sont des constantes strictement positives,  $\Delta W_n^X$  et  $W_n^Y$  sont des variables aléatoires de loi normale centrées réduites. La fonction  $h$  est supposée bornée.

Pour pouvoir travailler on s'est donné des hypothèses sur la fonction  $(x, \vartheta) \rightarrow b(x, \vartheta)$  qui est bornée en sa première variable et Lipschitz en la seconde. Dans ces conditions, pour l'EDS 6.17, il y a existence d'une solution trajectorielle et en loi (voir par exemple [Sznitman \(1991\)](#)) qui est unique et le couple  $(X_n, \vartheta_n)$  est Markovien en tout temps.

Le système de particules mis en place est alors uniquement destiné à apprendre et approcher les flots de Feynman-Kac  $\eta_n$  et  $\hat{\eta}_n$  par des lois empiriques  $\eta_n^N$  et  $\hat{\eta}_n^N$ .

Dans cette approximation, les erreurs ne viennent que de l'évaluation empirique du noyau de sélection et de l'échantillonnage opéré par le système de particules.

En effet dans l'expression exacte nous avons le schéma d'évolution

$$\eta_n \xrightarrow{S_{n,\eta_n}} \hat{\eta}_n \xrightarrow{M_{n+1,\vartheta_n}} \eta_{n+1}$$

et pour toute fonction bornée  $f$  la forme exacte

$$\eta_{n+1}(f) = \eta_n S_{n,\eta_n} M_{n,\vartheta_n}(f)$$

sera estimée par

$$\eta_n^N S_{n,\eta_n^N} M_{n,\vartheta_n}(f)$$

qui approche  $\eta_{n+1}^N(f)$ .

Dans la section qui vient, on verra qu'il y a une partition naturelle entre les erreurs dues au processus de filtrage de celle dues à l'estimation de la loi du champ moyen. C'est cette séparation que l'on utilisera par la suite pour ne traiter que ce qui est spécifique à l'estimation de la distribution du champ moyen par la technique de filtrage.

### 6.2.1 Erreurs d'estimations dans la séquence de filtrage

Nous allons prendre quelques lignes pour démontrer le théorème suivant :

**Théorème 6.2.1.** *Pour tout  $n \geq 0$  et tout  $p \geq 1$ , il existe des constantes finies  $0 \leq C_n(p)$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (6.18)$$

*Démonstration.* Pour tout temps  $n \geq 0$ , soit  $(\xi_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  un système de  $N$  particules en interaction utilisé pour apprendre les distributions de Feynman-Kac  $\eta_n$  et  $\hat{\eta}_n$ . L'algorithme de filtrage comporte deux étapes, d'abord avec une mise à jour utilisant le noyau de sélection  $S_{n,\eta_n}$  et puis une mutation selon le noyau de transition Markovienne  $M_{n+1,\vartheta_n}$ .

Les particules sont initialisées au temps  $n = 0$  par une distribution  $\eta_0$ -i.i.d qui fixe le point de départ du système dynamique de Feynman-Kac, puis suivent le schéma d'évolution :

$$\xi_n^i \xrightarrow{\text{Sélection} \sim S_{n,\eta_n}} \hat{\xi}_n^i \xrightarrow{\text{Mutation} \sim M_{n+1,\vartheta_n}} \xi_{n+1}^i \quad (6.19)$$

C'est ce système de  $N$  particules qui nous permet d'approcher les lois, et pour lequel on va démontrer le théorème 6.2.1

On va procéder par une récurrence dont le lemme 6.1.3 nous donne le germe avec la majoration

$$\mathbb{E}(\|\eta_0^N - \eta_0\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_p(0)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (6.20)$$

L'induction est alors supposée vérifiée jusqu'à l'étape  $n$ .

Pour toute fonction  $f$  mesurable telle que  $\|f\| \leq 1$ , le terme  $\eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f)$  est décomposé en 2 parties :

$$\begin{aligned} \eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f) &= [\eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)] & (*) \\ &+ [\eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f)] & (**) \end{aligned} \quad (6.21)$$

La majoration du terme (\*) sera un calcul sur les fluctuations pour lesquelles  $\mathbb{E}((*)^2 \mid \eta_n^N) \leq \frac{1}{N} \|f\|^2$ , alors que le second membre (\*\*) fera apparaître des écarts sur certaines fonctions et utilisera l'hypothèse de récurrence.

Explicitons les différents noyaux qui vont être utilisés. Pour l'équation de dynamique  $X_{n+1} = X_n + b(X_n, \vartheta_n) \Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X$ , le noyau de transition Markovienne  $M_{n+1, \vartheta_n}$  est tel que :

$$M_{n+1, \vartheta_n}(f)(x) = \int dy f(y) \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_n^{X2}}} \exp\left(-\frac{(y + x + b(x, \vartheta_n) \Delta t)^2}{2 \sigma_n^{X2}}\right) \quad (6.22)$$

L'étape de sélection est conduite par le noyau utilisant le potentiel  $G_n(x)$  :  $S_{n, \eta_n}(x, dy) = G_n(x) \delta_x(dy) + (1 - G_n(x)) \frac{G_n(y) \cdot \eta_n(dy)}{\eta_n(G_n)}$ , ce qui donne le noyau d'évolution de McKean  $K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n} = S_{n, \eta_n} M_{n+1, \vartheta_n}$  et pour toute fonction bornée  $f$

$$\eta_n K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) = \int \eta_n(dx) f(y) S_{n, \eta_n}(x, dz) M_{n+1, \vartheta_n}(z, dy) \quad (6.23)$$

A l'étape  $n$ , le système de particules  $\xi_n^i$  évolue selon la sélection  $S_{n, \eta_n}$  puis selon la mutation  $M_{n+1, \vartheta_n}$  et donne à l'étape  $n+1$  les particules  $\xi_{n+1}^i$  et la mesure empirique est approchée par  $\eta_{n+1}^N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_{n+1}^i)$ .

En notant  $I = \eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)$ , le terme de fluctuations s'évalue par :

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f(\xi_{n+1}^i) - K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)(\xi_n^i)] \quad (6.24)$$

qui donne

$$\mathbb{E}[I^2 \mid \eta_n^N] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}([f - K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)(\xi_n^i)]^2)(\xi_n^i) \quad (6.25)$$

Avec une erreur petite que l'on néglige :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n} ([f - K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)(\xi_n^i)]^2)(\xi_n^i) \\ & \sim \eta_n^N (K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n} ([f - K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)(\cdot)]^2)(\cdot)) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Or  $\|K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n} ([f - K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)(\cdot)]^2)(\cdot)\| \leq C\|f\|^2$  et l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund permet de contrôler le terme  $I$  par

$$\mathbb{E}(|\eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f)|^p / \eta_n^N)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_p}{\sqrt{N}} \|f\| \quad (6.27)$$

Nous établissons maintenant une inégalité de majoration pour le second terme de la décomposition :  $\eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f)$ .

Pour tout instant  $n \geq 0$ , tout  $z \in E$  et tout  $dy \in \mathcal{E}$ , soit le noyau de transition  $Q_{n+1, \vartheta_n}(z, dy) = G_n(z).M_{n+1, \vartheta}(z, dy)$ .

Pour toute fonction bornée  $f$ , on obtient par développement des noyaux de McKean :

$$\begin{aligned} & \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) \\ & = \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \vartheta_n}(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) + \eta_n^N K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) \end{aligned}$$

Un simple calcul utilisant la structure du noyau de McKean donne

$$\begin{aligned} & = [1 - \eta_n^N(G_n)] \left( \frac{\eta_n^N}{\eta_n^N(G_n)} - \frac{\eta_n}{\eta_n(G_n)} \right) Q_{n+1, \vartheta_n}(f) + (\eta_n^N - \eta_n) K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) \\ & = \frac{[1 - \eta_n^N(G_n)]}{\eta_n^N(G_n)} \left( (\eta_n^N - \eta_n) Q_{n+1, \vartheta_n}(f) + (\eta_n^N - \eta_n) \left( \frac{G_n}{\eta_n(G_n)} \right) \eta_n Q_{n+1, \vartheta_n}(f) \right) \\ & \quad + (\eta_n^N - \eta_n) K_{n+1, \eta_n, \vartheta_n}(f) \end{aligned} \quad (6.28)$$

utilisant l'hypothèse de récurrence et les lemmes 6.1.2 et 6.1.3 on conclut à l'existence de constantes de majoration de la borne de l'erreur  $\mathbb{L}^p$  et le théorème 6.2.1 est prouvé.  $\blacksquare$

Remarque : les constantes  $C_n(p)$  s'éclatent en fait en un terme fonction de  $n$  et un terme fonction de  $p$ .

Ce cas simple nous a montré l'action du filtre sur les termes d'erreur nous devons maintenant considérer les cas plus porteur où la loi du champ moyen est apprise par l'algorithme de filtrage.

### 6.3 Filtrage particulière d'un processus de Markov à champ moyen du type $Loi(X_n)$

Dans un filtre particulière, lorsque la loi du champ moyen n'est pas connue exactement, il faut l'approcher par un système de particules en interaction auxiliaire. On dispose pour tout instant  $n \geq 0$  d'un système de particules  $(X^i)_{1 \leq i \leq N}$ ,  $N > 0$ , pour filtrer la série temporelle  $Y_n$  et d'un système  $(Z_n^i)_{i \leq d}$ ,  $d > 0$  pour apprendre la loi a priori.

Pour ce second système à l'instant initial les particules  $(Z_0^i)_{1 \leq i \leq d}$  sont distribués selon la loi  $\eta_0 = Loi(X_0)$  et on suppose que pour tout temps  $n > 0$ , chaque particule  $Z_n^i$  évolue selon le noyau de transition  $M_{n+1, \pi_n}$  où  $\pi_n$  est la loi de  $X_n$  qui correspond à l'équation de dynamique  $Z_{n+1}^i = Z_n^i + b(Z_n^i, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^{Z, i}$

On peut résumer cela par :

$$\begin{array}{ll} Z_n^1 & \text{évolue selon } M_{n, \pi_{n-1}^d}(Z_{n-1}^1, \cdot) \\ \vdots & \vdots \\ Z_n^{d-1} & \text{évolue selon } M_{n, \pi_{n-1}^d}(Z_{n-1}^{d-1}, \cdot) \\ Z_n^d & \text{évolue selon } M_{n, \pi_{n-1}^d}(Z_{n-1}^d, \cdot) \end{array}$$

avec  $\pi_{n-1}^d = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \delta_{Z_{n-1}^i}$ .

On peut alors évaluer l'écart à la loi exacte :

$$\begin{aligned} \pi_n - \pi_n^d &= \pi_{n-1} M_{n, \pi_{n-1}} - \pi_{n-1}^d M_{n, \pi_{n-1}^d} \\ &\quad - [\pi_n^d - \pi_{n-1}^d M_{n, \pi_{n-1}^d}] \end{aligned} \tag{6.29}$$

Classiquement  $\sqrt{d}[\pi_n^d - \pi_{n-1}^d M_{n, \pi_{n-1}^d}]$  converge faiblement vers 0 fonction par fonction ou presque sûrement vers une variable aléatoire gaussienne. On ne retient alors que la première partie de l'expression et on considère que  $(\pi_n - \pi_n^d)$  est approché par  $(\pi_{n-1} M_{n, \pi_{n-1}} - \pi_{n-1}^d M_{n, \pi_{n-1}^d})$  que le lemme 6.1.3 nous permet de contrôler. Cette approximation sera utilisée un peu plus bas.

Retournons au problème du filtrage d'un processus à champ moyen. On suppose que pour tout instant  $n \geq 0$ , le couple dynamique/observation  $(X_n, Y_n)$  est

Markovien et suit le système suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + b(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0 &\sim \eta_0 \\ Y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (6.30)$$

où  $\pi_n$  est la loi a priori.

Pour une fonction-test bornée  $f$ , le processus de filtrage lui évolue selon le système dynamique

$$\eta_{n+1}(f) = \eta_n K_{n+1, \eta_n, \pi_n}(f) = \eta_n S_{n, \eta_n} M_{n+1, \pi_n}(f) \quad (6.31)$$

Comme annoncé précédemment on utilise un ensemble de  $N$  particules pour estimer les lois du filtrage, et un ensemble de  $d$  particules pour simuler la loi du champ moyen  $\pi_n$ .

Pour tout instant  $n \geq 0$ , les  $d$  particules  $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq d}$  sont en interaction à travers le champ moyen, évoluant selon la dynamique empirique :

$$Z_{n+1}^{i,d} = Z_n^{i,d} + b(Z_n^{i,d}, \pi_n^d)\Delta t + \sigma_n^Z \cdot \Delta W_n^{Z,i,d} \quad (6.32)$$

Ces particules  $Z_n^i$  ignorent les observations et évoluent seules sans sélection.

Dans cette approximation particulière du filtre, nous obtenons la loi empirique du processus de filtrage, les noyaux de sélection et de mutation approchés

$$\eta_{n+1}^N(f) \sim \eta_n^N S_{n, \eta_n^N} M_{n, \pi_n^d}(f) \quad (6.33)$$

qui sont calculés en utilisant le système de particules en interaction  $(X_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  :

$$X_{n+1}^{i,N} = X_n^{i,N} + b(X_n^{i,N}, \pi_n^d)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^{X,i} \quad (6.34)$$

Alors nous devons estimer pour chaque  $n$ , et toute fonction-test  $f$ , l'erreur commise par l'approximation de  $\eta_{n+1}(f)$  par  $\eta_{n+1}^N(f)$  et plus précisément établir le théorème :

**Théorème 6.3.1.** *Avec les hypothèses générales, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $p \geq 1$ , il existe des constantes finies  $C_n(p) > 0$  et  $C'_n(p) > 0$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n(p)}{\sqrt{d}} \right] I(\mathcal{H}) \quad (6.35)$$

*Démonstration.* La preuve s'effectue de nouveau par induction. Au rang initial, le lemme 6.1.3 nous donne l'inégalité

$$\mathbb{E}(\|\eta_0^N - \eta_0\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_p(0)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (6.36)$$

est donc  $C_0(p) = c_p(0)$  et  $C'_0(p) = 0$  qui nous permet de démarrer la récurrence.

On suppose alors qu'elle est réalisée au rang  $n$ , et on montre qu'elle se propage au rang  $n + 1$ . Les résultats de la section précédente vont nous permettre de majorer 2 des termes de la décomposition suivante qui en contient 3 :

$$\begin{aligned} \eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f) &= \eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \pi_n^d}(f) & (*) \\ &+ \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \pi_n^d}(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n, \pi_n}(f) & (**) \\ &+ \eta_n^N K_{n+1, \eta_n, \pi_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \pi_n}(f) & (***) \end{aligned} \quad (6.37)$$

La quantité (\*) correspond au terme de fluctuation déjà traité, la différence (\*\*\*) amène l'utilisation de l'hypothèse de récurrence telle qu'elle a été traitée au paragraphe précédent. Il reste à estimer le second membre (\*\*) qui utilisera l'hypothèse Lipschitz sur la fonction  $b$ .

La différence des noyaux de McKean contre une fonction test  $f$  mesurable bornée moyennée empiriquement s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \pi_n^d}(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \pi_n}(f) \\ &= \int f(y) \eta_n^N(dx) S_{n, \eta_n^N}(x, dz) [M_{n+1, \pi_n^d} - M_{n+1, \pi_n}](z, dy) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Pour toutes mesures  $\mu$  et  $\nu$  de  $\mathcal{M}(E)$ , tout point  $x \in E$ , toute une fonction mesurable bornée  $f$ ,

$$M_{n+1, \mu} f(x) - M_{n+1, \nu} f(x) = \int dy f(y) \left[ e^{\frac{-A(x, y, \mu)^2}{2\sigma_X^2}} - e^{\frac{-A(x, y, \nu)^2}{2\sigma_X^2}} \right]$$



avec  $A(x, y, \mu) = y + x + b(x, \mu)\Delta t$ .

En utilisant les propriétés des fonctions Lipschitziennes, pour  $b$  et pour la Gaussienne, la borne supérieure de la fonction  $b$  on obtient pour tout  $p > 0$  et toute une fonction mesurable bornée  $f$

$$\left(\mathbb{E}\|\eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \pi_n^d}(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \pi_n}(f)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C'_n(p) \frac{1}{\sqrt{d}} I(\mathcal{H}) \quad (6.39)$$

Joignant cette estimation à celle obtenue pour les 2 autres termes de la décomposition et par les lemmes techniques nous venons de démontrer l'inégalité

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n(p)}{\sqrt{d}}\right] I(\mathcal{H}) \text{ du théorème (6.3.1).} \quad \blacksquare$$

L'estimation du champ moyen conjointement au filtrage nous a demandé la somme de 2 systèmes de particules l'un de taille  $N$  l'autre de taille  $d$  pour obtenir des erreurs en  $\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}}$ . La section suivante va effectuer le même type d'estimation pour les processus à champ moyen conditionnés aux observations.

## 6.4 Filtrage particulière d'un processus de Markov à champ moyen conditionné aux observations

Pour certaines applications physiques, il peut être intéressant de changer de modèle et de conditionner la loi du champ moyen aux observations. C'est par exemple le cas d'un mobile contrôlé par les observations qui en sont faites, comme peut l'être dans le domaine aéronautique un drone. Mais ce pourrait être en ingénierie aussi un moyen de réduire le nombre de degré de liberté d'un système exact mais trop coûteux à simuler. Le conditionnement donne un modèle différent, n'ayant pas les mêmes caractéristiques mais qui peut approcher localement le système a priori. Dans la partie concernant le filtrage de mesures issues de la turbulence atmosphériques, le couplage des processus d'acquisition que l'on présente au chapitre 7 nous amènera dans cette situation.

Dans cette section seront examinés les 2 cas possibles de conditionnement aux observations possibles dans un filtrage, d'abord avec l'utilisation comme loi du champ moyen du prédicteur du filtre  $\eta_n$  puis dans un second temps avec la loi du filtre lui-même  $\hat{\eta}_n$ .

### 6.4.1 Filtrage d'un champ moyen du type $Loi(X_n | Y_0 \dots Y_{n-1})$

Dans cette situation, le processus est à un champ moyen de loi

$$\eta_n = Loi(X_n | Y_0 \dots Y_{n-1})$$

qui est le prédicteur du filtre non-linéaire.

Le problème de filtrage que l'on cherche à résoudre repose donc sur le système :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + b(X_n, \eta_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0 &\sim \eta_0 \\ Y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (6.40)$$

Utilisant les mêmes notations que dans les sections précédentes, au temps  $n$  après l'étape de sélection selon le noyau  $S_{n, \eta_n}$  et l'étape de mutation par le noyau de transition Markovienne  $M_{n+1, \eta_n}$ , on a le système dynamique dont le flot de Feynman-Kac  $\eta_n$  est solution :

$$\eta_{n+1} = \eta_n S_{n, \eta_n} M_{n+1, \eta_n} \quad (6.41)$$

Pour poursuivre notre étude, on établit le théorème suivant donnant l'estimation  $\mathbb{L}^p$  de l'erreur de l'approximation particulière pour un ensemble de  $N$  particules en interaction :

**Théorème 6.4.1.** *Avec les hypothèses précédentes valables pour ce chapitre, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $p > 0$  il existe des constantes  $0 \leq C_n(p) < \infty$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (6.42)$$

*Démonstration.* Le théorème sera de nouveau démontré par récurrence, pour l'étape initiale on reprend ce qui a été dit précédemment et

$$\mathbb{E}(\|\eta_0^N - \eta_0\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_p(0)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (6.43)$$

Maintenant on suppose que l'induction est vraie au temps  $n$  et on calcule l'erreur à l'étape  $n + 1$  pour toute fonction mesurable bornée,  $f$  avec la décomposition :

$$\begin{aligned}
\eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f) &= \eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \eta_n^N}(f) & (*) \\
&+ \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \eta_n^N}(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \eta_n}(f) & (**) \\
&+ \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \eta_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \eta_n}(f) & (***) \quad (6.44)
\end{aligned}$$

La démonstration est alors en tout point conforme à celle du théorème 6.3.1 sauf pour le terme (\*\*), où l'on utilise l'hypothèse Lipschitzienne pour la fonction  $b$  qui amène à utiliser l'hypothèse de récurrence sur la classe de fonction  $\mathcal{H}$  pour conclure à la proposition annoncée. ■

## 6.4.2 Filtrage d'un champ moyen du type $Loi(X_n | Y_0 \dots Y_n)$

Avec une légère modification de la loi du champ moyen, on peut utiliser non pas la loi du prédicteur, mais celle du filtre lui-même, c'est-à-dire la loi de dynamique sachant les observations jusqu'à la dernière  $Y_n$ . Le système servant au filtrage est donné par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + b(X_n, \hat{\eta}_n) \Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n = h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0 \sim \eta_0 \\ Y_0 = y_0 \end{cases} \quad (6.45)$$

où  $\hat{\eta}_n$  est la loi du filtre  $Loi(X_n | Y_0 \dots Y_n)$ .

Pour estimer l'erreur, nous allons établir que  $\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H})$

Il s'agit de la même analyse par récurrence que dans les sections précédentes. L'étape initiale est validée toujours par le lemme 6.1.3.

On suppose la récurrence réalisée pour tout  $p > 0$  et tout  $n > 0$ . Pour toute fonction  $f$  mesurable bornée, on reprend la décomposition des différences entre

$\eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f)$  :

$$\begin{aligned} \eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f) &= \eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \hat{\eta}_n^N}(f) & (*) \\ &+ \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \hat{\eta}_n^N}(f) - \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \hat{\eta}_n}(f) & (**) \\ &+ \eta_n^N K_{n+1, \eta_n^N, \hat{\eta}_n}(f) - \eta_n K_{n+1, \eta_n, \hat{\eta}_n}(f) & (***) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Les termes (\*) et (\*\*\*) sont connus, il reste à traiter (\*\*) en utilisant de nouveau l'hypothèse Lipschitzienne pour  $b$  et avec une inégalité supplémentaire qui amène l'hypothèse de récurrence.

En effet par construction on a  $\hat{\eta}_n = \eta_n S_{n, \eta_n}$ , alors il vient la majoration

$$\begin{aligned} &|\eta_n S_{n, \eta_n}(f) - \eta_n^N S_{n, \eta_n^N}(f)| \\ &\leq |\eta_n S_{n, \eta_n}(f) - \eta_n S_{n, \eta_n^N}(f)| + |\eta_n S_{n, \eta_n^N}(f) - \eta_n^N S_{n, \eta_n^N}(f)| \end{aligned} \quad (6.47)$$

Quelques calculs sur le noyaux de sélection permettent d'obtenir la majoration

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \mathbb{E} |\eta_n S_{n, \eta_n}(f) - \eta_n S_{n, \eta_n^N}(f)| \leq 2 \frac{1 - \eta_n(G_n)}{\eta_n(G_n)} \|G_n\| \sup_{\|f\| \leq 1} \mathbb{E} |\eta_n(f) - \eta_n^N(f)| \quad (6.48)$$

Les 2 membres de l'inégalité 6.47 permettent alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour porter l'inégalité  $L^p$  au rang  $n + 1$

On vient donc de démontrer le théorème :

**Théorème 6.4.2.** *Avec les hypothèses précédentes valables pour ce chapitre, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $p > 0$  il existe des constantes  $0 \leq C_n(p) < \infty$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (6.49)$$

On notera que pour avoir des erreurs sur les flots de Feynman-Kac en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , les deux dernières situations ne nécessitent que  $N$  particules. On peut alors penser réduire un problème du type champ moyen a priori, en l'approchant par un autre modèle, conditionnel, qui sera moins coûteux numériquement, tant que l'on puisse assurer que les 2 modèles, bien que très différents, se comportent localement de la même manière. La contrepartie de cette approximation tient dans l'équation d'observation. Pour peu qu'elle représente mal, ou par moment moins fidèlement, le capteur, l'estimation que l'on fera en usant du système conditionné aux observations perdra son sens et son acuité.

## 6.5 Filtrage d'un processus avec commande aléatoire $X_n^1$ à champ moyen $Loi(X_n^2 \mid X_0^1 \dots X_n^1)$

Cette section est dédiée à un tout autre modèle. Cette fois on considère que le processus a un champ moyen conditionné à la réalisation d'une commande.

Plus précisément, on note pour tout  $n \geq 0$ ,  $v_n$  une suite déterministe de réels, commandant le champ moyen de loi  $\pi_n^{v_0, \dots, v_n} = \pi_n^v = Loi(X_n^{v_0, \dots, v_n})$  la loi du vecteur d'état  $\mathcal{X}_n$  et on suppose l'ensemble suivant le modèle de dynamique

$$\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_n + b(v_n, \mathcal{X}_n, \pi_n^v) \Delta t + \sigma^{\mathcal{X}} \Delta W_n^{\mathcal{X}} \quad (6.50)$$

et  $v_n$  est une série de commandes inconnues et déterministes. La fonction  $b$  reprend les hypothèses en cours dans ce chapitre avec une forme différente que nous expliciterons peu après.

Le fait que la commande soit inconnue est un problème pour la simulation. Il serait possible d'atteindre ce paramètre inconnu par des méthodes variationnelles, ou de point fixe. Mais ces méthodes peuvent être délicates ou numériquement coûteuses lors d'une arrivée séquentielle des données, notamment quand le système est utilisé dans un but de filtrage en temps réel. On propose alors de modéliser  $v_n$  par une variable aléatoire et on va donner un algorithme de résolution correspondant au problème de filtrage associé.

L'espoir dans cette technique stochastique porte sur l'estimation à chaque pas de temps du paramètre inconnu en explorant l'espace des phases et en sélectionnant les points les plus pertinents relativement aux observations. En effet si le vecteur d'état  $\mathcal{X}_n$  est observé et estimé par  $\bar{\mathcal{X}}_n$ , la séquence des  $\bar{\mathcal{X}}_0 \dots \bar{\mathcal{X}}_n$  contient de l'information quand à la suite de commandes s'étant réalisée  $v_0, \dots, v_n$ .

On suppose que l'on a pour temps instant  $n \geq 0$  une suite de variables aléatoires  $X_n^1$  d'une loi que l'on précisera après, et on modélise la réalisation du processus  $\mathcal{X}_n$  par un processus aléatoire commandé par la suite  $X_0^1, \dots, X_n^1$ . On note alors la loi conditionnelle  $\pi_n^{X^1} = Loi(\mathcal{X}_n \mid X_0^1, \dots, X_n^1)$ , elle sera la loi du champ moyen par lequel on cherche à modéliser la dynamique de  $\mathcal{X}_n$ . Par cette exploration aléatoire nous espérons obtenir une modélisation pertinente de  $\mathcal{X}_n$  utilisable dans un filtre non-linéaire.

Formalisons cela pour en traiter le problème de filtrage associé.

Soit l'espace d'état polonais  $(E, \mathcal{E})$ , où pour chaque temps  $n \geq 0$  est défini le vecteur d'état  $X_n$ . On suppose que  $X_n$  contient deux parties ayant des propriétés différentes :

$$X_n = \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Soit  $E^{(1)}$  et  $E^{(2)}$  les sous espaces de  $E$  tels que en tout temps  $n$ ,  $X_n^1 \in E^{(1)}$  et  $X_n^2 \in E^{(2)}$ .

La première partie  $X_n^1$  est considérée comme étant une commande de la seconde partie  $X_n^2$  et elle fournit le champ moyen par la *Loi*( $X_n^2 \mid X_0^1 \dots X_n^1$ ). On suppose que seule la seconde partie du vecteur d'état est connue de l'observation. Le processus  $X_n^2$  correspond à une marche aléatoire en milieu aléatoire.

Il est possible d'avoir une représentation complète du problème de filtrage dans le cas où  $X_n = (X_n^1, X_n^2)$  est un processus de Markov sans champ moyen avec

$$M_n((x_{n-1}^1, x_{n-1}^2), d(x_n^1, x_n^2)) = M_n^{(1)}(x_{n-1}^1, dx_n^1) M_{x_n^1, n}^{(2)}(x_{n-1}^2, dx_n^2) \quad (6.52)$$

où  $M_n^{(1)}$  et  $M_{x_n^1, n}^{(2)}$  sont des transitions Markoviennes avec l'état initial  $\eta_0(d(x_0^1, x_0^2)) = \eta_0^{(1)}(dx_0^1) \eta_{x_0^1, 0}^{(2)}(dx_0^2)$ .

On peut lire dans [Del Moral \(2004\)](#) le traitement complet du problème de filtrage associé à l'observation de la seconde composante  $X_n^2$  par un processus  $Y_n$ . On se donne la fonction potentiel

$$G_n : (x_n^1, x_n^2) \rightarrow G_n(x_n^1, x_n^2) = G_{x_n^1, n}(x_n^2) < \infty$$

et pour toute fonction mesurable bornée  $f$  la mesure de Feynman-Kac non-normalisée  $\gamma_{[x^1], n}^{(2)}(f) = \mathbb{E}_{[x^1]}(f(X_n^2) \prod_{p=0}^{n-1} G_{x_p^1, p}(X_p^2))$ . Le filtrage cherche alors à estimer la variable aléatoire  $X'_n = (X_n^1, \eta_{[x^1], n}^{(2)})$  avec  $\eta_{[x^1], n}^{(2)}(f) = \frac{\gamma_{[x^1], n}^{(2)}(f)}{\gamma_{[x^1], n}^{(2)}(1)}$ .

Cette procédure s'apparente également aux méthodes dites de Rao-Blackwellisation, voir [Doucet et al. \(2001a\)](#).

Pour des processus à dynamique linéaire et à bruits Gaussiens, une solution approchée est fournie par les filtres de Kalman en interaction. Ces filtres sont présentés en annexe [A](#) et l'application est entièrement décrite dans le livre de P. Del Moral.

En fait le problème devient délicat en l'absence d'information sur le comportement dynamique de  $X_n^1$  et de sa loi  $\mathbb{P}^{X_n^1}$ . Ce cas presque dégénéré peut intervenir en ingénierie physique, et serait applicable au cas du filtrage de mesures des vitesses d'un fluide quand la vitesse du fluide n'est pas mesurée directement, mais déduite de la vitesse relative du fluide par rapport au capteur mobile. Néanmoins nous pourrions revenir à la situation plus simple du filtrage d'un processus dont la dynamique est conditionnée à l'observation grâce au couplage des processus d'acquisition montrés au chapitre 7. On ferme alors le système en apprenant les paramètres du milieu aléatoire par l'observation et en conditionnant la dynamique à l'acquisition. Le problème modifié permet alors de se ramener à une des situations vue précédemment (section 6.4.2) et numériquement moins coûteuse. Mais il est des situations où cette simplification par le couplage d'acquisition ne sera pas possible et il faudra considérer la commande comme un paramètre caché.

Dans des applications pratiques, ce type de système avec un processus à champ moyen conditionné à la réalisation d'une variable aléatoire auxiliaire a déjà été utilisé par Elise Arnaud et Etienne Memin (voir par exemple [Arnaud et al. \(2005\)](#)).

On se place dans ce chapitre dans la situation d'une dynamique pour le processus  $X_n^2$  dépendante du champ moyen donné par la loi  $\theta_n = \text{Loi}(X_n^2 \mid X_0^1 \dots X_n^1)$ .

Le problème du filtrage consiste à trouver pour tout  $n \geq 0$  la  $\text{Loi}(X_n^2 \mid Y_0 \dots Y_n)$  en utilisant le système :

$$\begin{cases} X_{n+1}^2 &= X_n^2 + b(X_n^1, X_n^2, \theta_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n^2) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0^2 &\sim \eta_0 \\ Y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (6.53)$$

où  $\theta_n$  est à déterminer,  $\sigma_n^X$  est une constante bornée en tout temps.  $b$  et  $h$  reprennent les hypothèses générales du chapitre les concernant,  $\sigma_n^Y$  est une famille de constantes.

La fonction  $b : (X^1, X^2, \theta) \rightarrow b(X^1, X^2, \theta)$  est donnée par

$$b(X^1, X^2, \theta) = A(X^1, X^2) + C(X^1) \cdot \int B(X^2, x)\theta(dx) \quad (6.54)$$

avec les hypothèses générales de ce chapitre pour les fonctions  $A$  et  $B$  (bornées et Lipschitzienne), et la fonction  $C : X^1 \in E^1 \rightarrow C(X^1)$  est bornée pour tout temps.

### 6.5.1 Cas de la commande avec modèle Markovien

Pour déduire un algorithme de filtrage, avoir un modèle Markovien pour la commande  $X_n^1$  est intéressant et montre comment on peut se ramener à un cas déjà traité précédemment. Cela permet également de se rendre compte de l'intérêt de posséder une modélisation pour le paramètre ou a contrario de mesurer le coût numérique d'absence d'information.

Dans ce cas le système de filtrage s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1}^1 = X_n^1 + F(X_n^1)\Delta t + \sigma_n^{X^1} \cdot \Delta W_n^{X^1} \\ X_{n+1}^2 = X_n^2 + b(X_n^1, X_n^2, \theta_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n = h(X_n^2) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \\ X_0^1 \sim \eta_0^1 \\ X_0^2 \sim \eta_0 \\ Y_0 = y_0 \end{array} \right. \quad (6.55)$$

En écrivant  $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ , les 2 composantes étant supposées absolument continues, pour résoudre ce problème de filtrage on se ramène à l'algorithme où le champ moyen est donné par la loi conjointe a priori,  $Loi(X_n)$ . Une fois la loi conjointe apprise par un système auxiliaire, on calcule par régularisation faible du Dirac une loi approchée  $\theta_n^\delta$  qui converge p.s. vers  $\theta_n$  quand  $\delta \rightarrow 0$ . Cette loi approchée  $\theta_n^\delta$  sert alors à estimer le processus  $X_n^2$ . On verra au chapitre 7, paragraphe 7.1.1, plus précisément cette régularisation.

On sait alors par la section 6.3 que la résolution du problème de ce type de filtrage nécessite 2 systèmes de particules, l'un de taille  $d > 0$  pour apprendre la loi conjointe, l'autre de taille  $N > 0$  pour approcher les mesures de Feynman-Kac. L'erreur de filtrage pour toute fonction-test mesurable bornée est alors majorée par  $[\frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n(p)}{\sqrt{d}}]I(\mathcal{H})$ , où  $C_n(p)$  et  $C'_n(p)$  sont des constantes finies pour tout  $n > 0$  et tout  $p \geq 1$ .

Cette approche mériterait une analyse plus rigoureuse que nous laissons pour des travaux à venir, mais nous gardons en mémoire que dans ce cas,  $N+d$  particules permettent de filtrer avec une erreur en  $\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}}$ .



### 6.5.2 Cas de la commande sans modèle Markovien

On revient au système 6.53 et cette fois la commande n'est pas connue par un modèle Markovien, mais elle est donnée à tout instant par une loi  $\rho_n(dx)$ , au besoin pouvant être indépendante du temps. Ce peut être par exemple une quantité multifractale pour laquelle on ne dispose pas de représentation Markovienne.

On pose  $B_n = (X_n^1, \theta_n) \in E^{(1)} \times M(E^{(2)})$ , avec  $\theta_n = \text{Loi}(X_n^2 \mid X_0^1 \dots X_n^1)$ . On note  $\beta_n$  la loi de  $B_n$  où la marginale de  $\beta_n$  en la première variable est  $\rho_n$ , la loi de  $X_n^1$ . Le système 6.53 se réécrit alors

$$\begin{cases} X_{n+1}^2 &= X_n^2 + b(X_n^2, B_n)\Delta t + \sigma_n^X \cdot \Delta W_n^X \\ Y_n &= h(X_n^2) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y \end{cases} \quad (6.56)$$

La connaissance de  $B_n$  fixe le système 6.56 et nous ramène au cas 6.2 traité au début de ce chapitre. Le filtrage associé au système 6.56 revient donc à apprendre la variable aléatoire  $B_n$  qui détermine le milieu aléatoire.

La dynamique du modèle fournit le noyau de transition Markovienne  $M_{n+1, \beta_n}$  et l'équation d'observation nous donne en tout instant, une fonction de potentiel  $G_n$ , avec lequel il est défini le noyau de sélection

$$S_{n, \eta_n}(x, dz) = G_n(x)\delta_x(dz) + [1 - G_n(x)]\frac{G_n(z)}{\eta_n(G_n)}(dz)$$

où l'on a posé

$$\eta_n(f) = \mathbb{E}(f(X_n^2) \mid Y_0, \dots, Y_{n-1}) \quad (6.57)$$

Pour terminer on se donne une représentation de McKean de ce problème de filtrage :

$$K_{n+1, \eta_n, \beta_n} = S_{n, \eta_n} \cdot M_{n+1, \beta_n} \quad (6.58)$$

et l'on a le système dynamique

$$\begin{cases} \eta_{n+1} &= \eta_n K_{n+1, \eta_n, \beta_n} \\ \eta_0(dx) &= \mathbb{P}^{X_0^2}(dx) \end{cases}$$

On ne connaît pas la seconde marginale de  $\beta_n$ , on propose alors un algorithme d'approximation utilisant des systèmes de particules en interaction pour résoudre cette inconnue et fournir une solution au problème de filtrage.

On propose l'algorithme particulière suivant où l'on va proposer des solutions de milieux (commande et loi conditionnelle) au système de filtrage. Les milieux les moins pertinents seront éliminés par filtrage en favorisant les plus adaptés.

Soit  $M$  un entier non nul. On définit les états  $X_0^{1,i}$ ,  $1 \leq i \leq M$ , distribué iid selon  $\rho_0(du) = \eta_0^1(du)$ . On se place alors à la  $n$ -ième itération où les  $M$  commandes sont  $X_n^{1,i}$ ,  $1 \leq i \leq M$ .

On note  $\theta_n^i = \text{Loi}(X_n^2 \mid X_0^{1,i} \dots X_n^{1,i})$  et la variable aléatoire  $B_n^i = (X_n^{1,i}, \theta_n^i)$  et on note sa loi  $\beta_n^i$ .

Soit  $d > 0$  un entier et on forme le système de particules interagissant par le champ moyen :

$$Z_{n+1}^{i,k} = Z_n^{i,k} + b(X_n^{1,i}, Z_n^{i,k}, \theta_n^{i,d})\Delta t + \sigma_n^X \Delta W_{n+1}^{X,k} \quad (6.59)$$

pour tout  $1 \leq k \leq d$  avec  $\theta_n^{i,d} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \delta_{Z_n^{i,k}}$ .

On note alors la variable aléatoire empirique  $B_n^{i,d} = (X_n^{1,i}, \theta_n^{i,d})$  de loi notée  $\beta_n^{i,d}$ .

Pour une séquence de commandes  $X_0^{1,i}, \dots, X_n^{1,i}$  quand  $d$  tend à l'infini, d'après le lemme 6.1.3  $\theta_n^{i,d}$  converge sur la classe de fonction  $\mathcal{H}$  vers  $\theta_n^i$  avec une vitesse en  $\frac{1}{\sqrt{d}}$ .

Pour une fonction-test mesurable  $F$  tel que  $F(x, m) = f_1(x) \cdot f_2(m(g))$ , avec  $f_1$  et  $g$  bornées et  $f_2$  bornée et Lipschitz, on a :

$$|\beta_n^{i,d}(F) - \beta_n^i(F)| = |f_1(X_n^{1,i}) \cdot [f_2(\theta_n^{i,d}(g)) - f_2(\theta_n^i(g))]| \quad (6.60)$$

ce qui nous assure l'existence pour tout instant  $n \geq 0$  de constantes  $C_n^d$

$$|\beta_n^{i,d}(F) - \beta_n^i(F)| \leq \frac{C_n^d}{\sqrt{d}} \|f_1\| \|g\| \quad (6.61)$$

On dispose alors de  $M$  variables aléatoires  $B_n^i = (X_n^{1,i}, \theta_n^i)$ , c'est à dire  $M$  variable  $B_n^i$  approchant chacune la loi de  $X_n^2$  sachant la suite  $X_0^{1,i}, \dots, X_n^{1,i}$ . On note  $B_n^M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M B_n^i$

Toujours grâce aux hypothèses dont on s'est doté et suivant ce qui a déjà été fait, on montre que pour toute fonction test  $F$  ayant les propriétés énoncées plus

haut :

$$|\beta_n^M(F) - \beta_n(F)| \leq \left[ \frac{C_n^d}{\sqrt{d}} + \frac{C_n^M}{\sqrt{M}} \right] \|f_1\| \|g\| \quad (6.62)$$

On peut passer à la partie filtrage de l'algorithme, en tirant parmi les  $M$  variables des milieux aléatoires que l'on soumet au système de particules filtrantes.

Soient  $N > 0$ , soit  $(X_0^{2,j})_{1 \leq j \leq N}$  un système de  $N$  particules identiquement distribuées selon  $\eta_0(dx) = \mathbb{P}^{X_0^2}(dx)$ . On suppose que le filtre les a fait évoluer jusqu'au  $n$ -ième pas de temps, pour avoir la famille  $(X_n^{2,j})_{1 \leq j \leq N}$ .

On tire iid parmi les  $(B_n^i)_{1 \leq i \leq M}$   $N$  couples  $B_n^{j,N} \stackrel{def}{=} (X_n^{1,j}, \theta_n^{j,d})_{1 \leq j \leq N}$ . Avec ces  $N$  variables aléatoires on construit la mesure empirique  $\beta_n^N \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{(X_n^{1,j}, \theta_n^{j,d})}$ . On peut définir la fonction d'évolution

$$b(X_n^{2,j}, B_n^{j,N}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A(X_n^{1,i}, X_n^{2,j}) + C(X_n^{1,i}) \int B(X_n^{2,j}, x) \theta_n^{i,d}(dx) \quad (6.63)$$

et le système permettant de résoudre le problème de filtrage  $Loi(X_n^2 | Y_0 \dots Y_n)$  pour tout temps  $n$  et pour  $1 \leq j \leq N$  évolue selon :

$$X_{n+1}^{2,j} = X_n^{2,j} + b(X_n^{2,j}, B_n^{j,N})\Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^{X,j} \quad (6.64)$$

ce qui correspond au noyau  $M_{n+1, \beta_n^N}$  et l'on a le schéma d'évolution approchée :

$$X_n^{2,i} \xrightarrow{\text{Sélection} \sim S_{n, \eta_n^N}} \hat{X}_n^{2,i} \xrightarrow{\text{Mutation} \sim M_{n+1, \beta_n^N}} X_{n+1}^{2,i} \quad (6.65)$$

Invoquant de nouveau nos hypothèses et utilisant les mêmes techniques pour toute fonction test  $F$  de la même nature que précédemment on montre l'inégalité

$$|\beta_n^N(F) - \beta_n^M(F)| \leq \frac{C_n^N}{\sqrt{N}} \|f_1\| \|g\| \quad (6.66)$$

On peut alors analyser l'erreur commise par l'algorithme particulière proposé avec la décomposition pour toute fonction  $f$  mesurable respectant les hypothèses placées plus tôt :

$$\begin{aligned} |\eta_{n+1}^N(f) - \eta_{n+1}(f)| &\leq |\eta_{n+1}^N(f) - \eta_n^N K_{n, \eta_n^N, \beta_n^N}(f)| \\ &+ |\eta_n^N K_{n, \eta_n^N, \beta_n^N}(f) - \eta_n^N K_{n, \eta_n, \beta_n}(f)| \\ &+ |\eta_n^N K_{n, \eta_n^N, \beta_n}(f) - \eta_n K_{n, \eta_n, \beta_n}(f)| \end{aligned} \quad (6.67)$$

Nous sommes maintenant dans des estimations classiques du filtrage des champs moyens qui ont été traitées dans les sections précédentes. On peut alors formuler le théorème suivant :

**Théorème 6.5.1.** *Avec les hypothèses générales, l'algorithme particulière permet d'avoir pour tout instant  $n \geq 0$  et pour tout  $p > 0$ , l'existence des constantes finies dépendantes de  $p$ ,  $C_n^d$ ,  $C_n^M$  et  $C_n^N$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \frac{C_n^d(p)}{\sqrt{d}} + \frac{C_n^M(p)}{\sqrt{M}} + \frac{C_n^N(p)}{\sqrt{N}} \right] I(\mathcal{H}) \quad (6.68)$$

Il est possible de compléter le modèle de dynamique pour le rendre un peu plus général en considérant que la variance du bruit de dynamique est fonction des commandes. On écrit alors l'équation de dynamique comme :

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + b(X_n^1, X_n^2, \theta_n) \Delta t + \sigma(X_n^1) \cdot \Delta W_n^X \quad (6.69)$$

où la fonction  $b$  a les mêmes propriétés que précédemment et  $\sigma$  est une fonction telle que pour tout  $X_n^1$  on a  $0 < \sigma_{min} \leq \sigma(X_n^1) \leq \sigma_{max}$ .

On considère le même problème de filtrage que précédemment en cherchant la  $Loi(X^2 | Y_{[0,n]})$ .

Cette nouvelle situation conduit à la même analyse, avec une approche particulière équivalente et des estimées d'erreur identiques. La seule différence interviendra dans la démonstration avec l'erreur entre les noyaux de McKean exact et approché qui va demander de majorer l'écart entre 2 gaussiennes de moyennes et de variances différentes : l'une étant l'exacte, l'autre celle de l'approximation particulière.

Il est alors aisé de montrer que pour deux gaussiennes moyennes  $\mu$  et  $\mu_N$  et de variances respectives  $\sigma^2$  et  $\sigma_N^2$ , avec  $\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}$ , qu'il existe des constantes  $C_\mu$  et  $C_\sigma$  telles que :

$$\int \left| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \right| dx \leq C_\mu |\mu - \mu_N|^2 + C_\sigma |\sigma - \sigma_N| \quad (6.70)$$

Les contrôles sur les moyennes et sur les variances, les propriétés sur la fonction  $b$  nous permettent alors de fournir les estimées d'erreur.

Pour clore ce chapitre nous allons examiner un dernier cas combinant les deux derniers types de champ moyen avec une loi conditionnée à la trajectoire d'une commande et de la série d'observation.

## 6.6 Filtrage d'un processus commandé et conditionné de champ moyen $Loi(X_n^2 \mid X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$

Il s'agit de la combinaison des modèles précédents, et on considère le champ moyen  $Loi(X_n^2 \mid X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$ . Ce cas est en fait celui qui est le plus courant notamment en assimilation de données géophysiques pour lesquels les filtres de Kalman d'ensemble, dont nous avons parlé en introduction, ont été développés. Mais ils ne traitent qu'un problème de filtrage ponctuel sans champ moyen avec des modèles différentiables et des bruits gaussiens. Nous allons proposer une résolution particulière du problème de filtrage avec des commandes et des observations trajectorielles.

Soit l'espace d'état mesuré  $(E, \mathcal{E})$ . Soit  $E^{(1)}$  et  $E^{(2)}$  les sous espaces de  $E$  tel que  $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$ , où pour tout  $n \geq 0$   $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ , avec  $X_n^1 \in E^{(1)}$  et  $X_n^2 \in E^{(2)}$ .

Le système servant au filtrage est :

$$\begin{cases} X_{n+1}^2 &= X_n^2 + b(X_n^1, X_n^2, \pi_n)\Delta t + \sigma^X \Delta W_n^X \\ Y_n &= H(X_n^2) + \sigma^Y W_n^Y \\ X_n^1 &\sim \rho_n(dx) \\ \pi_n &= Loi(X_n^2 \mid X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]}) \\ X_0^2 &\sim \eta_0(dx) \end{cases} \quad (6.71)$$

avec  $\pi_n = Loi(X_n^2 \mid X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$

La fonction  $b$  est définie par  $(X^1, X^2, \pi) \in (E^{(1)} \times E^{(2)} \times \mathcal{M}(E^2)) \rightarrow b(X^1, X^2, \pi)$  telle que :

$$b(X^1, X^2, \pi) = A(X^1, X^2) + C(X_n^1) \cdot \int B(X^2, x) \pi(dx) \quad (6.72)$$

où les fonctions  $A$  et  $C$  sont bornées, la fonction  $B$  est bornée en ses 2 variables et Lipschitzienne en la seconde reprenant les hypothèses de ce chapitre.

L'équation de dynamique permet de définir le noyau de Markov  $M_{n+1, X_n^1, \pi_n}(f)(x) = \mathbb{E}(f(X_{n+1}^2) \mid X_n^2 = x)$ .

Le problème du filtrage consiste à estimer la  $\hat{\eta}_n = \text{Loi}(X_n^2 \mid Y_{[0,n]})$  pour tout temps  $n \geq 0$ .

Sur une recommandation explicative de François Le Gland et suivant ce qui a été fait à la section précédente dans le cas d'une commande à modèle Markovien, nous allons d'abord traiter un problème auxiliaire.

On définit un nouvel observateur  $Z_n = (X_n^1, Y_n)$ , et la loi du champ moyen est alors  $\pi_n = \text{Loi}(X_n^2 \mid Z_{[0,n]})$  qui est aussi la loi de filtrage à retrouver. Ce système correspond au cas traité au paragraphe 6.4.2 par une estimation non-linéaire par particules avec des erreurs d'estimations majorées par  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Une fois le problème auxiliaire traité il faut revenir au problème initial et exprimer pour toute fonction test mesurable bornée  $f$ ,  $\hat{\eta}_n(f) = \int f(x) \mathbb{P}^{(X_n^2 \mid Y_{[0,n]})}(dx)$  en fonction de  $\pi_n(f)$ .

L'équation d'observation  $Y_n = H(X_n^2) + \sigma^Y W_n^Y$  par l'hypothèse de densité conduit à la fonction potentiel  $X_n^2 \rightarrow g_n(X_n^2)$  pour tout temps  $n > 0$ .

La moyenne  $\pi_n(f) = \mathbb{E}(f(X_n^2) \mid X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$  s'écrit alors

$$\pi_n(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_n^2) \prod_{k=0}^n g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]})}{\mathbb{E}(\prod_{k=0}^n g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]})} \quad (6.73)$$

Le numérateur de l'expression de la loi de champ moyen est la Feynman-Kac non normalisée :

$$\hat{\gamma}_n^1(f)(x_{[0,n]}) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(f(X_n^2) \prod_{k=0}^n g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]}) \quad (6.74)$$

Avec des notations abusives

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{(X_n^2, X_{[0,n]}^1 \mid Y_{[0,n]})}(d(x_{[0,n]}^1, x_n^2) \mid y_{[0,n]}) \\ &= \mathbb{P}^{(X_n^2 \mid X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})}(dx_n^2 \mid x_{[0,n]}^1, y_{[0,n]}) \cdot \mathbb{P}^{(X_{[0,n]}^1 \mid Y_{[0,n]})}(dx_{[0,n]}^1 \mid y_{[0,n]}) \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème de filtrage, on cherche  $\hat{\eta}_n(f) = \mathbb{E}(f(X_n^2) \mid Y_{[0,n]})$ , et on obtient l'expression intégrale

$$\hat{\eta}_n(f) = \frac{\int \rho_0(dx_0) \dots \rho_n(dx_n) \hat{\gamma}_n^1(f)(x_0, \dots, x_n)}{\int \rho_0(dx_0) \dots \rho_n(dx_n) \hat{\gamma}_n^1(1)(x_0, \dots, x_n)} \quad (6.75)$$

Avec ce que l'on vient de voir, la Feynman-Kac non normalisée pour la fonction unité s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_n^1(1) &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^n g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]}\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[g_n(X_n^2) \prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]}\right]}{\mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]}\right]} \gamma_{n-1}^1(1)\end{aligned}\quad (6.76)$$

or le terme en fraction correspond à la Feynman-Kac normalisée :

$$\eta_n^1(g_n) = \frac{\mathbb{E}\left[g_n(X_n^2) \prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]}\right]}{\mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_k^2) \mid X_{[0,n]}^1 = x_{[0,n]}\right]}\quad (6.77)$$

d'où l'on déduit

$$\hat{\gamma}_n^1(1) = \prod_{p=0}^n \eta_p^1(g_p)\quad (6.78)$$

Pour toute fonction mesurable bornée  $f$  on peut alors écrire

$$\hat{\gamma}_n^1(f) = \frac{\hat{\gamma}_n^1(f)}{\hat{\gamma}_n^1(1)} \hat{\gamma}_n^1(1)\quad (6.79)$$

et  $\frac{\hat{\gamma}_n^1(f)}{\hat{\gamma}_n^1(1)}$  est le filtre optimal :

$$\frac{\hat{\gamma}_n^1(f)}{\hat{\gamma}_n^1(1)} = \hat{\eta}_n^1(f) = \pi_n(f)\quad (6.80)$$

La loi de champ moyen  $\pi_n$  a été apprise par filtrage. Pour tout temps  $p \geq 0$ , la fonction  $\eta_p^1(g_p)$  est le potentiel qui mesure la vraisemblance du prédicteur piloté par les commandes  $X_p^1$ . On note alors  $\mathcal{G}_p(X_p^1) = \eta_p^1(g_p)$

Le filtre optimal est alors donné par :

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_n(f) &= \frac{\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_n^1(f) \hat{\gamma}_n^1(1)\right]}{\mathbb{E}\left[\hat{\gamma}_n^1(1)\right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_n^1(f) \prod_{p=0}^n \mathcal{G}_p(X_p^1)\right]}{\mathbb{E}\left[\prod_{p=0}^n \mathcal{G}_p(X_p^1)\right]}\end{aligned}\quad (6.81)$$

Alors le couple  $(X_n^1, \eta_n^1)$  est Markovien pour tout instant  $n \geq 0$  et l'on est ramené au filtrage présenté à la section précédente et détaillée dans [Del Moral \(2004\)](#), section 2.6 et 12.6.7.

Cette analyse nous permet alors de proposer un nouvel algorithme de résolution particulière du problème de filtrage.

A l'étape initiale on se donne un ensemble de  $i$  commandes  $X_0^1$ ,  $1 \leq i \leq N$  iid selon  $\rho_0(dx)$ . Pour  $1 \leq \alpha \leq d$ , et pour chaque  $i$  on distribue  $X_0^{2,i,\alpha}$  iid selon une loi  $\eta_0(dx)$ .

A l'étape  $n$  on tire aléatoirement des commandes  $X_n^1$  iid selon  $\rho_0(dx)$  et on dispose de l'étape précédente des particules  $\hat{X}_n^{2,i,\alpha}$  qui approchent empiriquement  $\pi_n^i = \text{loi}(X_n^{2,i} | X_{[0,n]}^{1,i}, Y_{[0,n]})$ .

Dans la première étape, qui est la mutation, on utilise le modèle d'état pour obtenir  $X_{n+1}^{2,i,\alpha}$  avec une transition approchant  $M_{n+1, X_n^{1,i}, \pi_n}$ .

Avec la nouvelle observation  $Y_{n+1}$  on calcule les 2 fonctions potentiel :

1.  $\frac{1}{d} \sum_{\alpha=1}^d g_{n+1}(X_{n+1}^{2,i,\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} G_{n+1}^i$
2.  $g_{n+1}(X_{n+1}^{2,i,\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} g_{n+1}^{i,\alpha}$

Avec les 2 potentiels on obtient deux sélections sur le modèle

$$S_\mu(x, dz) = G(x)\delta_x(dz) + [1 - G(x)] \frac{G(z)}{\mu(G)}(dz)$$

- la première porte sur l'indice  $i$  et utilise la fonction  $G_{n+1}^i$ . Elle permet de sélectionner pour obtenir  $\hat{X}_n^{1,i}$ ,  $\tilde{X}_{n+1}^{2,i,\alpha}$ ,  $\hat{\pi}_{n+1}^{i,\alpha}$ ,  $\hat{\pi}_n^i$ .
- la seconde porte sur le  $\alpha$  et utilise la fonction  $\hat{g}_{n+1}^i$  et permet de sélectionner sur le  $\alpha$  et donne  $\hat{X}_{n+1}^{2,i,\alpha}$

Les 2 étapes de cette double sélection sont évidemment commutatives et terminent cet algorithme.

On peut esquisser l'analyse des erreurs d'approximation faites par la résolution particulière des lois de probabilités. La conclusion repose sur une hypothèse que des travaux à venir devrait permettre de lever.

La loi du filtre

$$\hat{\eta}_n(f) = \frac{\mathbb{E}[\pi_n(f) \prod_{p=0}^n \mathcal{G}_p(X_p^1)]}{\mathbb{E}[\prod_{p=0}^n \mathcal{G}_p(X_p^1)]}$$

que l'on approche d'abord par la loi obtenue pour chaque trajectoire  $\hat{\eta}_n^N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_n^i(f)$  mais cette dernière quantité,  $\pi_n^i(f)$ , n'est pas connue et on utilise l'équation de dynamique pour approcher la Feynman-Kac  $\hat{\eta}_n^N(f)$  par  $\eta_n^{N,d}(f) = \frac{1}{d} \sum_{\alpha=1}^d f(X_n^{2,i,\alpha})$ . Il faut donc évaluer l'écart entre  $\hat{\eta}_n(f)$  et  $\eta_n^{N,d}(f)$ . Avec le travail



réalisé dans les sections précédentes, on peut formuler l'existence de constantes  $C_n$  et  $C'_n$  qui produisent les inégalités :

$$\begin{aligned} |\hat{\eta}_n(f) - \eta_n^{N,d}(f)| &\leq |\hat{\eta}_n(f) - \hat{\eta}_n^N(f)| \\ &+ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\pi_n^i(f) - \frac{1}{d} \sum_{\alpha=1}^d f(X_n^{2,1,\alpha})] \right| \end{aligned} \quad (6.82)$$

$$\leq \frac{C_n}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C'(X_0^{1,i} \dots X_n^{1,i}) \quad (6.83)$$

On va supposer (hypothèse à lever) que pour tout temps  $n \geq 0$ , la moyenne empirique  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C'(X_0^{1,i} \dots X_n^{1,i})$  est bornée. Cette hypothèse donne l'existence de la seconde constante et termine l'établissement du théorème suivant :

**Théorème 6.6.1.** *Avec les hypothèses sur la fonctionnelle  $b(X_n^1, X_n^2, \pi_n)$ , l'algorithme particulière permet d'avoir pour tout instant  $n \geq 0$  et tout  $p \geq 1$ , l'existence de constantes finies  $C_n(p) > 0$  et  $C'_n(p) > 0$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n(p)}{\sqrt{d}} \right] I(\mathcal{H}) \quad (6.84)$$

Ce théorème termine cette section sur l'estimation d'un processus à champ moyen conditionné à la réalisation d'une commande aléatoire et des observations.

Dans ce chapitre consacré à l'étude du filtrage de processus à champ moyen, nous avons balayé un certain nombre de lois possibles pour le champ moyen et proposé des algorithmes adaptés à chaque situation. L'analyse des erreurs de l'approximation particulière a permis d'obtenir l'existence de constantes bornées avec des contrôles en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , où  $N$  est le nombre de particules nécessaires pour le filtrage. On trouvera dans la table 6.6 un résumé des estimations, du nombre de systèmes de particules nécessaires et de l'erreur produite par l'approche particulière.

Lois de champ moyen	Nombre de systèmes de particules	Nombres de particules	Majoration de l'Erreur d'Approximation
Loi exacte $\vartheta_n$	1	$N$	$\frac{1}{\sqrt{N}}$
$Loi(X_n)$	2	$N + d$	$\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}}$
$Loi(X_n   Y_0 \dots Y_{n-1})$	1	$N$	$\frac{1}{\sqrt{N}}$
$Loi(X_n   Y_0 \dots Y_n)$	1	$N$	$\frac{1}{\sqrt{N}}$
$Loi(X_n^2   X_0^1 \dots X_n^1)$ avec modèle markovien pour $X_n^1$	2	$N + d$	$\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}}$
$Loi(X_n^2   X_0^1 \dots X_n^1)$ sans modèle markovien	$M+1$	$M \times d + N$	$\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{1}{\sqrt{M}}$
$Loi(X_n^2   X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$	1	$N \times d$	$\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{d}}$

TAB. 6.1 – Tableau des erreurs de l'approximation particulaire du filtrage d'un processus à champ moyen pour les diverses lois de champ moyen examinées dans ce chapitre

Il est à noter un point important touchant à la nécessité d'avoir un bon modèle. La qualité d'un modèle va impacter positivement sur la pertinence du filtrage et il faut la même finesse pour ce modèle sur toutes les composantes du vecteur d'état. C'est en effet particulièrement spectaculaire dans le cas d'un champ moyen dépendant d'une commande aléatoire. Pour obtenir un même contrôle de l'erreur en  $\frac{C_n}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n}{\sqrt{d}}$ , on doit avec un modèle Markovien pour la commande utiliser  $N + d$  particules alors qu'en l'absence de ce modèle il nous faut des systèmes de particules en parallèle avec des tirages iid faisant monter le nombre de particules à  $M \times d + N$ . Dans tous les cas, le conditionnement des champs moyens aux observations réduit les coûts numériques. Heuristiquement on peut voir cette réduction comme le profit que l'on a à tirer du processus d'observation de l'information sur le vecteur d'état. Ce peut être la conclusion de ce chapitre.

Nous allons utiliser ces résultats dans l'application pratique qui va être détaillée dans la partie III. En effet le modèle utilisé pour filtrer les mesures issues d'un fluide turbulent est du type champ moyen avec commandes aléatoires et pour

optimiser le coût de calcul, on adjoindra un modèle déduit de la physique pour ces entrées inconnues réduisant ainsi le nombre de particules et fermant le système.

## Troisième partie

### Applications au filtrage des mesures de vitesses du fluide atmosphérique

# Chapitre 7

## Acquisition d'un champ vectoriel stochastique le long d'un chemin aléatoire

Ce chapitre présente la modélisation stochastique du « signal fluide » que nous avons créé et qui est essentielle pour pouvoir filtrer des mesures effectuées le long d'un chemin sur un milieu aléatoire.

La théorie du filtrage et son application aux processus à champ moyen que l'on vient de développer reposent sur la donnée d'un paramètre d'état pour lequel on dispose d'un modèle de comportement en tout temps. La dynamique de l'état est alors donnée par une équation nous permettant de le suivre dans l'espace des phases.

Typiquement nous avons écrit un système avec une équation de dynamique pour un vecteur d'état  $\mathcal{X}_t$  pour  $t \geq 0$  et une équation d'observation liant  $Y_t$  à l'état qui l'a généré.

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{t+dt} &= F_t(\mathcal{X}_t, W_t^X) \\ Y_t &= H_t(\mathcal{X}_t, W_t^Y) \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $F_t$  et  $H_t$  sont des fonctions avec les propriétés suffisantes,  $W_t^X$  et  $W_t^Y$  sont des variables aléatoires de lois connues.

Dans cette situation, l'équation de dynamique sur  $\mathcal{X}_t$  donne l'évolution temporelle de l'état observé. Si l'état n'est pas décrit par une équation de dynamique mais par un champ vectoriel d'un Système Dynamique Aléatoire reposant, par

exemple, sur une EDS ou bien est donné par un modèle local alors que le point d'observation se déplace, nous ne sommes plus dans la situation générale du système 7.1 et dont la résolution du problème de filtrage associé a été présentée dans les chapitres précédents.

Si l'état observé est un champ de vecteur de dimension  $d$  et que l'observation est de la même dimension, on se retrouve dans notre cas général. C'est le cas du travail d'Anne Cuzol (2006) où le filtrage stochastique est utilisé pour suivre des structures bidimensionnelles reposant sur NSE-2D au moyen d'images elles-aussi bidimensionnelles.

Pour rester dans l'application aux fluides, l'observation d'un paramètre dans un fluide au moyen d'un capteur, qu'il soit mobile ou fixe, qu'il ait une trajectoire déterministe ou aléatoire s'identifie à un problème d'estimation d'une quantité ponctuelle dans un champ de dimension supérieure. Le capteur ne nous fournit qu'une valeur, pouvant être vectorielle, à son point de localisation. Le champ du paramètre acquis pouvant être uni, bi, ou tridimensionnel. Quoiqu'il en soit tant que l'on fait des mesures ponctuelles on se trouve en difficulté pour estimer un champ de dimension supérieure. Il manque énormément d'information. La figure 7.1 illustre le problème qui nous est posé et qui porte sur l'estimation d'une quantité du champ prise sur une trajectoire. On peut compenser ce manque d'information en simulant un ensemble important de champs et en prenant pour chacun une valeur ponctuelle à des fins de filtrage, mais cette technique serait particulièrement coûteuse et pas très subtile. Dans une première amélioration on pourrait penser mesurer des gradients de la quantité en plus de la quantité elle-même, pour permettre d'avoir un modèle local de la grandeur. Mais instrumentalement la mesure directe de gradient n'est que rarement possible.

Avant de parler de filtrage et d'observation, il faut donner un sens aux relevés faits sur un champ en des points d'une trajectoire potentiellement décorrélée de la dynamique relevée.

Ce problème va nous obliger à élaborer une modélisation stochastique de la situation et à définir une nouvelle quantité que l'on appellera l'acquisition d'un champ de vecteur stochastique le long d'un chemin aléatoire.

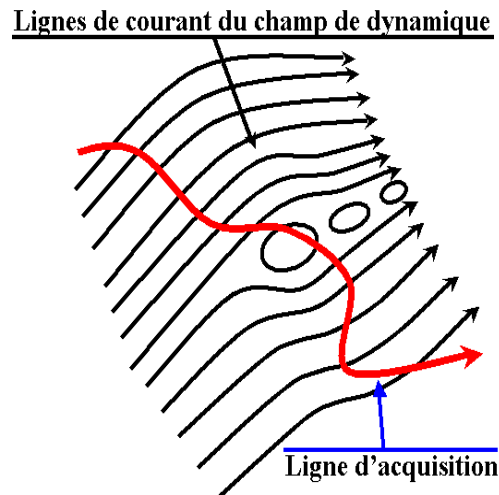


FIG. 7.1 – Représentation de la trajectoire d'acquisition ponctuelle dans un champ multidimensionnel dont l'évolution est symbolisée par ses lignes de courant en supposant stationnaire l'évolution du champ d'intérêt

## 7.1 Estimations de l'acquisition d'un champ vectoriel stochastique

Supposons que l'on ait pour tout temps  $0 \leq t \leq \infty$  un champ vectoriel aléatoire  $X'_{t,x}$  de dimension  $d' \geq 1$ , c'est à dire une famille de variables aléatoires à valeurs dans un espace  $E'$  indexées par des temps  $t$  et des points  $x$  d'un espace  $E$  de dimension  $d \geq 1$ , et qu'au lieu de l'examiner en chacun des points de  $E$ , on acquiert les valeurs prises par notre champ vectoriel sur  $X_t \in E$  un chemin aléatoire indépendant des évolutions propres au vecteur d'état. Utilisant ce seul relevé, il est alors impossible de restituer pleinement le champ vectoriel sur  $E$  mais on peut souhaiter en donner des propriétés locales par exemple en estimant l'espérance de notre champ  $X'_{t,x}$  sachant notre position  $X_t$ . C'est le but de ce chapitre où l'on se place dans le cas le plus général pour définir ce que l'on appelle le processus d'acquisition d'un champ vectoriel puis en particulierisant les situations d'en déduire un certain nombre de conséquences. On verra également que l'on peut définir un système d'acquisition relatif à l'observation, et voir que le problème de filtrage standard présenté au chapitre 5 est de nature symétrique à celui de l'acquisition. Dans la section suivante, on mettra ensuite pour le cas discret en évidence la structure de mesure de Feynman-Kac de la loi de distribution du processus d'acquisition. On ajoutera section 7.4 une application numérique de l'acquisition discrète d'un champ aléatoire continu montrant qu'on opère naturellement par

échantillonnage un filtrage des échelles les plus petites. Cette application utilisera une simulation du champ de vortex d'un fluide turbulent. In fine la question du filtrage des mesures réalisées sur un champ aléatoire apparaîtra comme le couplage entre plusieurs systèmes d'acquisition et sera mis en œuvre dans le chapitre 8 consacré au filtrage des vitesses du fluide turbulent atmosphérique.

### 7.1.1 Définitions et premières applications

Nous allons commencer par donner quelques définitions de nos nouveaux objets et fournir des exemples d'applications qui nous serviront directement par la suite.

**Définition 7.1.1.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  un espace de points que l'on nommera espace des configurations ou espace des sites. On munit  $E$  de la tribu  $\mathcal{E}$ .

Soit  $E' \subset \mathbb{R}^{d'}$ ,  $d' \in \mathbb{N}^*$  que l'on nommera espace des phases que l'on munit de la tribu  $\mathcal{E}'$ . On se donne enfin un espace de probabilité filtré complet  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ .

Soit  $T < \infty$  un réel,  $x \in E$  un point de l'espace des sites. Soit  $X_t$  la famille de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  indexée par le temps  $t \in [0, T]$  et soit  $X'_{t,x}$  la famille de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$  à valeurs dans  $(E', \mathcal{E}')$  indexée par le temps  $t \in [0, T]$  et le point  $x \in E$ .

Alors le couple d'applications  $\mathcal{F}_t$ -mesurables  $(X_t, X'_{t,x})$  est appelé système d'acquisition du champ de vecteur aléatoire.

Le processus  $X_t$  est appelé le chemin du processus d'acquisition et la famille  $X'_{t,x}$  est le champ d'acquisition.

Cette définition est suffisamment générale et ne repose pas sur des structures particulières pour le champ ou le chemin d'acquisition, pour pouvoir être adapté et permettre de structurer le système afin de correspondre à des objets précis dans des situations d'intérêt.

Un système d'acquisition peut alors être un champ de vecteurs de l'espace des phases et une marche aléatoire de l'espace des sites, ou plus simplement un champ de vecteur et un ensemble de points fixes de l'espace des sites. Dans tous les cas, c'est le couplage entre les processus  $X_t$  et  $X'_{t,x}$  qui va donner son sens au système d'acquisition. Lorsque cette association est réalisée on peut définir ce que l'on appelle le processus d'acquisition, c'est à dire le relevé du champ  $X'_{t,x}$  le long



du chemin  $X_t$ .

**Définition 7.1.2.** Soit  $(X_t, X'_{t,x})$  un système d'acquisition sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $((E, \mathcal{E}) \times (E', \mathcal{E}'))$ .

On définit pour tout temps  $t \in [0, T]$  le processus d'acquisition  $A_t$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$  à valeurs dans  $(E', \mathcal{E}')$  par

$$A_t \stackrel{\text{def}}{=} X'_{t, X_t} \quad (7.2)$$

Dans cette définition le champ peut être donné par un système dynamique stochastique (ce ne sera pas le cas ici, mais on peut l'envisager déterministe), et le chemin d'acquisition peut être continu, à sauts ou discret, il peut aussi être aléatoire ou déterministe selon la nature du problème à traiter.

**Exemple 1** Soit  $x$  un point fixé de  $E$ . On prend pour tout temps  $t$  le processus stationnaire  $X_t = x$ . Le système d'acquisition est  $(x, X'_{t,x})$  et l'acquisition est  $A_t = X'_{t,x}$ . Se référant à la physique on qualifiera cette acquisition d'Eulérienne.

C'est dans ce cadre que se place la modélisation stochastique discrète d'un phénomène aléatoire sur des points de grille, chaque point de grille réalisant une coordonnée de l'acquisition :

On note pour deux ensembles d'indices  $i \in [0, N] \subset \mathbb{N}$  et  $j \in [0, M] \subset \mathbb{N}$ , les points de l'espace des sites par  $x = (x_{i,j})$ , alors on définit l'acquisition

$$A_t = (A_t^{i,j})_{(i,j) \in I \times J} = (X'_{t, x_{i,j}}) = X'_{t,x}$$

**Exemple 2** Soit  $X'_{t,x}$  un champ de vecteur aléatoire  $\mathcal{C}^\infty$  bornés à valeurs dans  $(E', \mathcal{E}')$ . Soit  $x_0$  un point de  $E$  et pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,  $W_t$  un  $\mathcal{F}_t$ -Mouvement Brownien standard sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ . On définit alors le flot stochastique (voir [Ben Arous \(1989\)](#) pour l'existence de ce type de flot ) :

$$X_t^{x_0} = x_0 + \int_0^t X'_s(X_s^{x_0}) \circ dW_s \quad (7.3)$$

Le processus d'acquisition est alors  $A_t = X'_{t, X_t^{x_0}}$ . Par analogie avec le cas physique on dira cette acquisition Lagrangienne. On se trouve dans le cas d'une Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire. On peut lire sur ce sujet [Zeitouni \(2003\)](#) ou [Varadhan \(2004\)](#) dans le cas de dynamiques dans  $\mathbb{Z}^d$ .

**Exemple 3** Pour illustrer l'exemple 2, on considère que  $X'_{t,x}$  représente le champ de vitesses Eulérien d'un fluide  $U_{t,x}$ . Sur un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace d'état

$E$ , on définit pour tout temps  $t \in [0, T]$ , le champ de vitesses Eulériennes  $U_{t,x}$  par la solution de l'équation aux dérivées partielles de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \nabla_x \right) \cdot U_{t,x} = -\nabla_x p_{t,x} + \mu \cdot \Delta U_{t,x} & \text{dans le domaine } \mathcal{D} \\ U_{t,x} = f(t, x) & \text{sur } \partial \mathcal{D} \\ U_{0,x} = U_0(x) \end{cases} \quad (7.4)$$

où  $f$  est une fonction définie à chaque instant. On donne alors la position d'un élément de fluide par la condition initiale  $x_0$  et l'équation d'évolution du flot :

$$\begin{cases} dX(t, X_0) = U_{t,X(t,X_0)} dt + \sigma_{t,X(t,X_0)} \circ dW_t \\ X(0, X_0) = X_0 \end{cases} \quad (7.5)$$

où  $W_t$  est un mouvement Brownien standard et  $\sigma_{t,x}$  est une fonction connue.

Avec les hypothèses de régularité que Mikulevicius et Rozovskii (2004) ont donné, il y a existence des solutions faibles pour les 2 systèmes (on s'est placé en temps petit). Le couple  $(X_t, U_{t,x})$  est un système d'acquisition sur  $((E, \mathcal{E}) \times (E', \mathcal{E}'))$ . On définit alors l'acquisition  $A_t = U_{t, X_t^{x_0}}$ .  $A_t$  est la vitesse Lagrangienne notée habituellement  $V_t$  d'une particule issue de  $x_0$  et portée par le flot  $X_t^{x_0}$ .

Dans ces 3 exemples simples, on voit que le processus stochastique  $A_t$  pris seul s'affranchit de la connaissance du champ en tout autre point que  $X_t$ . Sauf pour des cas particuliers, comme les champs déterministes ou stationnaires et homogènes en tous points, les propriétés probabilistes du champ (Markovien, martingale, ergodique, etc) ne vont pas être transportées à la variable aléatoire  $A_t$ , mais plus sûrement au couple  $(X_t, A_t)$ . Il peut être alors pertinent de s'intéresser, quand elle existe pour toute fonction mesurable bornée  $f$ , à la mesure de probabilité  $\chi_t$  que l'on définit telle que  $\chi_t(f) = \mathbb{E}(f(X_t, A_t) | X_t)$ . La variable  $A_t$  ne peut être seule Markovienne, c'est le couple  $(X_t, A_t)$  qui pourra avoir ce caractère. On commence par définir l'espérance conditionnelle pour le couple  $(X_t, A_t)$  sachant la position  $X_t$ .

**Définition 7.1.3.** *Pour tout temps  $t \in [0, T]$  soit  $A_t$  le processus d'acquisition sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$  à valeurs dans  $(E', \mathcal{E}')$  le long du chemin d'acquisition  $X_t$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ . On suppose que le couple de variables aléatoires  $(X_t, A_t)$  est absolument continu de densité  $p^{X_t, A_t}$ . On définit pour tout temps  $t$  l'espérance conditionnelle de  $(X_t, A_t)$  en  $X_t$  par la fonction mesurable*

$$\mathbb{E}(f(X_t, A_t) | X_t) = \int_{E'} f(X_t, a) p^{A_t | X_t}(a | X_t) da \quad (7.6)$$

avec la loi conditionnelle

$$p^{A_t | X_t}(a | x) = \frac{p^{X_t, A_t}(x, a)}{\int_{E'} p^{X_t, A_t}(x, a) da} \quad (7.7)$$

Dans les applications pratiques, le point généralement difficile à réaliser dans cette définition est l'hypothèse, ici supposée, de densité du couple  $(X_t, A_t)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. L'existence d'une dérivée de Radon sera dans le cas continu une première étape à franchir dans l'étude du processus d'acquisition.

Parfois, on peut être amené à non pas s'intéresser à l'espérance d'une fonction prise sur le couple  $(X_t, A_t)$  mais seulement sur l'acquisition  $A_t$ . Il nous faut utiliser une régularisation faible de la mesure de Dirac et on peut approcher l'espérance recherchée :

**Proposition 7.1.1.** *Pour tout temps  $t \in [0, T]$  soit  $A_t$  le processus d'acquisition sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  à valeurs dans  $(E', \mathcal{E}')$  le long du chemin d'acquisition  $X_t$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ . On suppose que  $(X_t, A_t)$  est absolument continu et Markovien. Soit  $K^\delta$  un noyau de régularisation faible de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de la mesure de Dirac. On approche pour tout temps  $t$  l'espérance conditionnelle d'une fonction mesurable bornée  $f$  de  $A_t$  en  $X_t$  par :*

$$\mathbb{E}^\delta(f(A_t)|X_t) = \int_{E \times E'} f(a) K^\delta(X_t, z) p^{A_t|X_t}(a|z) da dz \quad (7.8)$$

On a alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}^\delta(f(A_t)|X_t) = \mathbb{E}(f(A_t)|X_t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_t(f) \quad (7.9)$$

On commence par poser une intégrale non normalisée pour toute fonction  $f$  une fonction mesurable bornée :

$$\mathbb{F}(f(A_t))(X_t) = \int_{E \times E'} f(a) p^{X_t, A_t}(z, a) dz da \quad (7.10)$$

Cette intégrale est mal posée relativement à la loi de  $(X_t, A_t)$ , on la régularise par le noyau  $K^\delta$  introduit dans le théorème 7.1.1 pour définir l'intégrale régularisée :

$$\mathbb{F}^\delta(f(A_t))(X_t) = \int_{E \times E'} f(a) K^\delta(X_t, z) p^{X_t, A_t}(z, a) dz da \quad (7.11)$$

Par construction du noyau régularisant on a

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{F}^\delta(f(A_t))(X_t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{E \times E'} f(a) K^\delta(X_t, z) p^{X_t, A_t}(z, a) dz da \\ &= \mathbb{F}(f(A_t))(X_t) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Bien entendu l'espérance conditionnelle s'exprime en fonction de la loi conjointe et on peut écrire l'espérance régularisée en normalisant  $F^\delta$  :

$$\mathbb{E}^\delta(f(A_t)|X_t) = \frac{\mathbb{F}^\delta(f(A_t))(X_t)}{\mathbb{F}^\delta(1)(X_t)} \quad (7.13)$$

On obtient alors le résultat :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}^\delta(f(A_t)|X_t) = \mathbb{E}(f(A_t)|X_t) \quad (7.14)$$

On peut reprendre nos exemples pour illustrer cette espérance régularisée que l'on vient d'estimer  $\mathbb{E}(f(A_t)|X_t)$ .

**Application 1** Prenons le cas particulier où le chemin d'acquisition est déterministe  $X_t = \varphi(t) \in E$ . Pour toute fonction  $f$  mesurable et bornée, on a évidemment  $\mathbb{E}(f(A_t)|X_t) = \mathbb{E}(f(A_t))$   $\mathbb{P}$ -ps.

C'est une situation déjà vue en mécanique des fluides au chapitre 2 en considérant le cas stationnaire, c'est à dire, que pour tout  $t$   $X_t = x$  et en prenant pour  $X'_{t,x}$  le champ de vitesses  $U_{t,x}$  donné par NSE 7.4. En notant  $U_t$  la valeur de  $U_{t,x}$  prise en  $x$ , alors  $\mathbb{E}(f(U_t)|x) \stackrel{p.s.}{=} \mathbb{E}(f(U_t))$  est dans cette situation la moyenne Eulérienne de la vitesse au point  $x$  et au temps  $t$  plus habituellement notée en mécanique des fluides  $\langle f(U) \rangle_{t,x}$ .

**Application 2** Toujours pour rester proche de la dynamique des fluides, on reprend l'exemple 3 qui considérait  $X'_{t,x}$  comme le champ Eulérien de vitesse d'un fluide  $U_{t,x}$ . On prend comme chemin le flot associé au champ  $X'_{t,x}$ , partant d'un point  $x_0 \in E$ , et noté pour tout temps  $t$  :  $X_t^{x_0}$ .

L'acquisition Lagrangienne se définit par  $V_t = U_{t,X_t^{x_0}}$  et on s'intéresse à la moyenne de  $V_t$  sachant la position de la particule sur son flot  $X_t^{x_0}$ . On omettra le  $x_0$  en exposant pour alléger le texte et  $X_t^{x_0} = X_t$ . On suppose que le problème est posé de telle manière qu'il y ait existence de la densité de  $(X_t, V_t)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. L'espérance Lagrangienne doit être régularisée et on obtient

$$\mathbb{E}(f(V_t)|X_t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{F}^\delta(f(V_t))(X_t)}{\mathbb{F}^\delta(1)(X_t)} \quad (7.15)$$

avec  $\mathbb{F}^\delta(f(V_t))(X_t) = \int_{E \times E'} f(v) K^\delta(X_t, x) p^{X_t, V_t}(x, v) dx dv$ .

Si dans la dynamique du fluide on utilise une loi de Newton additionnée d'un

bruit Gaussien, le noyau de régularisation sera également gaussien avec :

$$K^\delta(X_t, x) = G^\delta(X_t - x) = e^{-\frac{\|X_t - x\|^2}{2\delta}} \quad (7.16)$$

Les dynamiciens des fluides utilisent ce type de noyau pour régulariser cette espérance lorsqu'ils cherchent à les calculer dans leurs applications numériques. Avec des considérations physiques, ils emploient également des fonctions splines (voir Pope (2000)).

### 7.1.2 Systèmes d'acquisitions d'observations

Ce paragraphe est avant tout une remarque permettant de rapprocher le problème de l'estimation du processus d'acquisition du problème de filtrage que l'on a vu précédemment dans ce mémoire. On se place dans le cas d'un problème de filtrage classique tel qu'il a été décrit au chapitre 5. On se donne alors un état  $\mathcal{X}_t$  évoluant dans un espace  $E$  et une observation  $Y_t \in E'$ .

Le couple  $(\mathcal{X}_t, Y_t)$  est alors un système d'acquisition que l'on qualifiera d'observation.

En effet dans le problème de filtrage, on s'est donné une équation liant  $\mathcal{X}_t$  et  $Y_t$  de la forme générale  $Y_t = H(t, \mathcal{X}_t, W_t)$  où  $W_t$  est un processus aléatoire supposé canonique et  $H$  la fonction de transfert. La fonction  $H_{t, \mathcal{X}_t}(\cdot)$  joue clairement le rôle de champ et  $Y_t$  est l'acquisition de  $H$  le long de la trajectoire de  $\mathcal{X}_t$  dans  $E$ .

Dans le cas de l'acquisition telle qu'on l'a définie plus haut, on s'intéresse pour une bonne fonction  $f$  à l'estimation de  $\mathbb{E}(f(Y_t)|\mathcal{X}_t)$ . Le problème de filtrage est exactement symétrique avec la recherche de la loi permettant de calculer  $\mathbb{E}(f(\mathcal{X}_t)|Y_t)$ , ce qui pourrait se formuler en trouver le chemin sachant l'acquisition. Les algorithmes que l'on a présenté chapitres 5 et 6 résolvent ce problème. Il nous faut délivrer une méthode d'estimation du processus d'acquisition.

On peut utiliser ce commentaire sur l'observation et utilisant la résolution du problème de filtrage, donner une solution à l'estimation du processus d'acquisition recherché. Effectivement écrit formellement, on cherche

$$\mathbb{E}(f(X_t, A_t)|X_t) = \int f(X_t, a) p^{A_t|X_t}(a|X_t) da \quad (7.17)$$

pour toute fonction  $f$ . Utilisant la formule de Bayes on peut écrire pour les densités :

$$p^{A_t|X_t}(a|x) = p^{X_t|A_t}(x|a) \frac{p^{A_t}(a)}{p^{X_t}(x)} \quad (7.18)$$

Dans le problème de filtrage on cherche à estimer la *Loi*( $X_t|A_t$ ). Donc si l'on était en capacité de calculer la densité  $p^{X_t|A_t}$  par filtrage, il resterait à estimer le rapport  $\frac{p^{A_t}(a)}{p^{X_t}(x)}$  pour obtenir une estimation de l'acquisition  $A_t$  sachant  $X_t$ . Mais traiter ce problème de filtrage en premier alourdit la procédure d'estimation et on va voir paragraphe 7.2.1, dans le cas discret, qu'il est possible d'estimer directement le processus d'acquisition le long de son chemin.

### 7.1.3 Acquisition sur un milieu localement homogène en loi

Pour clore la présentation des processus d'acquisition, nous nous plaçons dans le cas d'un milieu considéré comme localement homogène en loi. L'application physique qui va suivre ce chapitre utilisera ce type de milieu. Nous rajoutons le qualificatif « en loi » pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté avec la littérature physique. Définissons en premier lieu pour ce type de milieu l'acquisition à laquelle on va s'intéresser.

**Définition 7.1.4.** *Pour tout temps  $t \in [0, T]$ , soit  $(X_t, X'_{t,x})$  un système d'acquisition sur l'espace produit  $(E \times E')$  et  $A_t = X'_{t,X_t}$  le processus d'acquisition de ce système. On dira que le système d'acquisition est localement homogène en loi si :*

- $E$  est un espace localement convexe métrisable possédant un recouvrement convexe  $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ,  $I$  étant un ensemble d'indice.
- $\forall t \in [0, T]$  et  $\forall x \in E$ , il existe  $\varepsilon_t > 0$  et  $i \in I$  tel que :  
 $B(x, \varepsilon_t) \subset \mathcal{A}_i$  avec  $B(x, \varepsilon_t) = \{z \in E \text{ t.q. } |x - z| \leq \varepsilon_t\}$   
 et  $\forall y \in B(x, \varepsilon_t) = B_t^\varepsilon$ , on a pour tout  $a \in E'$ ,

$$\mathbb{P}(A_t \in da \mid X_t = x) = \mathbb{P}(A_t \in da \mid X_t = y) \quad (7.19)$$

Pour l'acquisition  $A_t$  associée à ce système on appellera cette probabilité la loi de  $A_t$  sachant que  $X_t$  appartient à la boule  $B_t^\varepsilon$ , notée *Loi*( $A_t \mid X_t \in B_t^\varepsilon$ ).

Dans le cas d'une acquisition localement homogène on peut chercher à calculer pour tout fonction  $f$  mesurable bornée, l'espérance  $\mathbb{E}(f(A_t) \mid X_t \in B_t^\varepsilon)$ . On peut

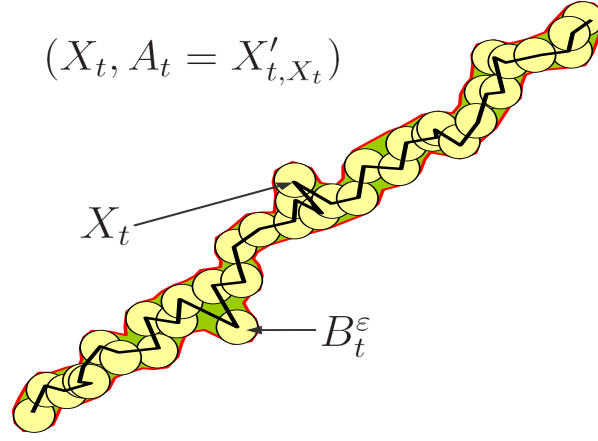


FIG. 7.2 – Exemple sur une trajectoire d'acquisition de l'ensemble des boules d'homogénéité

exprimer trivialement cette espérance par

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(X_t, A_t) \mid X_t \in B_t^\epsilon) &= \int_{E \times E'} f(x, a) p^{A_t \mid X_t \in B_t^\epsilon}(a \mid x) dx da \\
 &= \int_{E \times E'} f(x, a) \frac{\mathbb{1}_{B_t^\epsilon}(x) p^{X_t, A_t}(x, a)}{\int_E \mathbb{1}_{B_t^\epsilon}(x) p_t^X(x) dx} dx da \\
 &= \frac{\mathbb{E}(f(X_t, A_t) \mathbb{1}_{B_t^\epsilon}(X_t))}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_t^\epsilon}(X_t))} \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

Afin de respecter des conditions de différentiabilité aux bords, on pourra considérer pour  $K$  un noyau faible régularisant  $\mathcal{C}^\infty$  de support inclus dans la boule  $B_t^\epsilon$ .

Cette définition peut s'étendre naturellement au cas trajectorien. Pour  $t > 0$ , on dénote  $X_{[0, t]} = \{X_s, s \in [0, t]\}$  la trajectoire du processus  $X_t$  par hypothèse continue. On va noter  $B_{[0, t]}$  l'enveloppe des boules  $(B_s^\epsilon)_{s \leq t}$  :

$$B_{[0, t]} = \bigcup_{s \in [0, t]} B_s^\epsilon \quad (7.21)$$

La situation est décrite dans le schéma 7.2 et on va chercher à estimer la mesure de probabilité  $\chi_t$  telle que pour toute fonction mesurable bornée  $f$  on obtienne l'espérance de l'acquisition le long du chemin  $X_{[0, t]}$  par

$$\chi_t(f) = \mathbb{E}(f(X_t, A_t) \mid X_{[0, t]} \in B_{[0, t]}) \quad (7.22)$$

Il faut alors proposer un moyen d'estimer de cette mesure  $\chi_t$  valable pour tout temps. Dans le cas discret on va montrer à la section suivante 7.2.1 que  $\chi_t$  est une mesure de Feynman-Kac et proposer un algorithme de calcul. L'approximation sera particulière et on pourra donner des estimés d'erreur.

## 7.2 Processus d'acquisition discret dans un milieu homogène en loi

Nous avons présenté les systèmes d'acquisition avec différentes applications notamment à la mécanique des fluides. Ces processus généraux ont une structure proche de ceux intervenants dans les problèmes de filtrage. Il y a une évolution a priori du milieu ( i-e sans intervention du chemin d'acquisition ) puis un conditionnement du relevé du champ au chemin d'acquisition. Cette procédure peut donc se faire en 2 temps, une première étape correspondant à une prédiction du milieu et la seconde une sélection sur le chemin d'acquisition.

Nous allons profiter de cette analyse pour proposer une description et un algorithme d'estimation dans le cas de processus discrets décrit par une dynamique Lagrangienne.

### 7.2.1 Interprétation de l'acquisition discrète comme processus à champs moyens en interaction

On se donne un ensemble de temps  $0 \leq t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n$ , avec  $t_i = i \cdot \Delta t$  où  $\Delta t > 0$  est le pas de temps de la discrétisation. Soit pour  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $i \in [0, n]$ ,  $(X_{t_i}, X'_{t_i, x}) = (X_i, X'_{i, x})$  un système d'acquisition à valeurs dans  $(E \times E')$ . Pour un point initial  $x_0$  on note  $X'_i = X'_{i, X_i^{x_0}}$  l'acquisition Lagrangienne discrète associée. Enfin soit  $Z_0, \dots, Z_n$  un chemin discret dans l'espace des sites  $E$  indépendant de la dynamique de l'acquisition Lagrangienne.

Nous allons poursuivre dans le cadre d'un milieu localement homogène en loi. D'après le paragraphe précédent, on sait qu'en chaque temps la connaissance du champ d'acquisition peut être restreinte à une boule  $B_n^\varepsilon$ . Il n'est alors pas nécessaire d'avoir la valeur du champ dans l'espace hors de cette boule. Montrons comment utiliser un modèle Lagrangien (modèle 1 point) pour estimer l'espérance de l'acquisition le long du chemin  $Z_0 \dots Z_n$ .

Pour mener à bien cette description, on mixe 2 systèmes d'acquisitions :

- le premier correspond au modèle un point et fournit une acquisition Lagrangienne partant du point  $x_0$  :  $(X_n^{x_0}, X'_{n, X_n^{x_0}}) = (X_n, X'_n)$
- l'autre système est le relevé de l'acquisition Lagrangienne le long d'un chemin indépendant du milieu  $Z_n$  :  $(Z_n, A_n)$



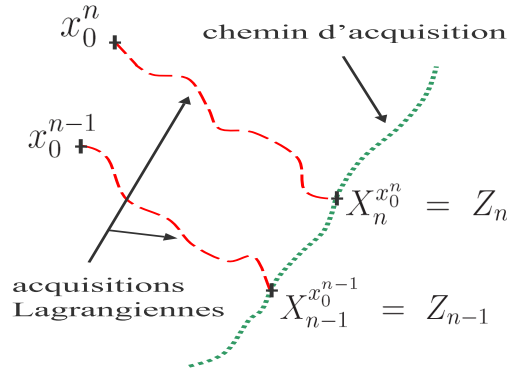


FIG. 7.3 – Couplage de systèmes d'acquisitions Lagrangiennes et d'une acquisition le long d'un chemin indépendant

Pour exprimer ce qu'est  $A_n$  il faut considérer un ensemble d'acquisitions Lagrangiennes partant de points initiaux différents et arrivant aux points de relevé du chemin d'acquisition. Au temps  $n - 1$ , le chemin d'acquisition est en  $Z_{n-1}$ , et acquiert la valeur de  $X'_{n-1}$  dans l'espace des phases prise par l'acquisition Lagrangienne en  $X_{n-1}^{x_0^{n-1}} = Z_{n-1}$  partie de  $x_0^{n-1}$  et donc  $A_{n-1}^{x_0^{n-1}} = X'_{n-1, Z_{n-1}}$ . Au temps  $n$  on change d'acquisition Lagrangienne pour relever celle qui est partie à l'instant initial de  $x_0^n$  et est arrivée en  $Z_n$ . Alors on a  $A_n^{x_0^n} = X'_{n, Z_n}$ . On illustre la situation sur la figure 7.3.

Mais nous n'avons pas accès aux points de départ de chacune des trajectoires Lagrangiennes. Il conviendrait de calculer l'espérance  $A_n = \int A_n^x \mathbb{P}^{X_0}(dx)$ . Mais cette espérance est difficile à approcher, elle intègre sur les lignes ancestrales. Sur les flots stochastiques, on peut lire l'article de G. Ben Arous (1989) ou le livre de F. Baudoin (2005).

On propose alors, utilisant l'hypothèse de milieu localement homogène de se donner en chaque point du chemin  $Z_n$  un paramètre  $\varepsilon_n$  et une boule  $B_n^\varepsilon(Z_n) = \{x \in E : |x - Z_n| \leq \varepsilon_n\}$ , et de chercher à estimer 2 mesures de probabilités  $\chi_n$  et  $\hat{\chi}_n$  telle que pour toute fonction test  $f$  :

$$\hat{\chi}_n(f) = \mathbb{E}(f(X_n, X'_n) \mid X_0 \in B_0^\varepsilon(Z_0), \dots, X_n \in B_n^\varepsilon(Z_n)) \quad (7.23)$$

$$\chi_n(f) = \mathbb{E}(f(X_n, X'_n) \mid X_0 \in B_0^\varepsilon(Z_0), \dots, X_{n-1} \in B_{n-1}^\varepsilon(Z_{n-1})) \quad (7.24)$$

Par hypothèse le modèle le couple  $(X_n, X'_n)$  est supposé Markovien et l'évolution est décrite par le noyau de transition à champ moyen

$$M_{n+1, \pi_n}((x, x'), d(z, z')) = \mathbb{P}((X_{n+1}, X'_{n+1}) \in d(z, z') \mid (X_n, X'_n) = (x, x'))$$

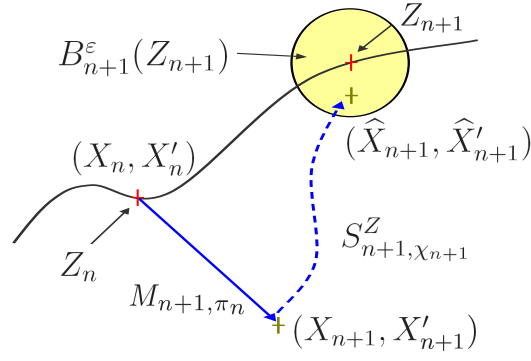


FIG. 7.4 – Schéma d'évolution discrète du processus d'acquisition pour une dynamique Lagrangienne

où  $\pi_n$  est la loi de  $(X_n, X'_n)$ . L'hypothèse de champ moyen ne cherche qu'à étendre la généralité de l'évolution du processus  $(X_n, X'_n)$ .

S'inspirant de 7.20 on peut écrire :

$$\hat{\chi}_n(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_n, X'_n) \prod_{p=0}^n \mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)}(X_p))}{\mathbb{E}(\prod_{p=0}^n \mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)}(X_p))} \quad (7.25)$$

$$\chi_n(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_n, X'_n) \prod_{p=0}^{n-1} \mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)}(X_p))}{\mathbb{E}(\prod_{p=0}^{n-1} \mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)}(X_p))} \quad (7.26)$$

ce qui confère aux deux mesures de probabilité  $\hat{\chi}_n$  et  $\chi_n$  leur caractère de distribution de Feynman-Kac.

Sans changer cette expression on ne va pas considérer le conditionnement et l'indicatrice sur la boule  $\mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)}$  mais sur le cylindre  $\mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)} \times E'$  et on se donne le potentiel  $G_p$  pour  $(X_p, X'_p)$  :

$$\begin{aligned} G_p((X_p, X'_p)) &= \mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p)}(X_p) \times \mathbb{1}_{E'}(X'_p) \\ &= \mathbb{1}_{B_p^\epsilon(Z_p) \times E'}((X_p, X'_p)) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Associé à ce potentiel on définit le noyau de sélection :

$$\begin{aligned} &S_{n+1, \chi_{n+1}}^Z((x, x'), d(y, y')) \\ &= \mathbb{1}_{B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E'}(x, x') \delta_{(x, x')}(d(y, y')) \\ &+ \left[ 1 - \mathbb{1}_{B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E'}(x, x') \right] \frac{\mathbb{1}_{B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E'}(y, y') \chi_{n+1}(d(y, y'))}{\chi_{n+1}(B_{n+1}^\epsilon(Z_{n+1}) \times E')} \end{aligned} \quad (7.28)$$

avec  $\chi_{n+1}(d(y, y')) = \mathbb{P}((X_{n+1}, X'_{n+1}) \in d(y, y') \mid X_0 \in B_0^\epsilon(Z_0), \dots, X_n \in B_n^\epsilon(Z_n))$

Alors partant de la distribution initiale de l'acquisition

$$\chi_0(d(x, x')) = \mathbb{P}((X_0, X'_0) \in d(x, x'))$$

on a le schéma d'évolution temporelle,  $n \geq 0$  :

$$\hat{\chi}_n \xrightarrow{M_{n+1, \pi_n}} \chi_{n+1} \xrightarrow{S_{n+1, \chi_{n+1}}^Z} \hat{\chi}_{n+1} \quad (7.29)$$

ce qui peut s'écrire comme un système dynamique stochastique issu de  $\chi_0$  :

$$\chi_{n+1} = \chi_n S_{n, \chi_n}^Z M_{n+1, \pi_n} \quad (7.30)$$

En terme d'évolution des états nous avons le schéma illustré par la figure 7.4 et correspondant à :

$$(\hat{X}_n, \hat{X}'_n) \xrightarrow{\text{Mutation}} (X_{n+1}, X'_{n+1}) \xrightarrow{\text{Sélection}} (\hat{X}_{n+1}, \hat{X}'_{n+1}) \quad (7.31)$$

Après l'étape de sélection l'état  $(\hat{X}_{n+1}, \hat{X}'_{n+1})$  est l'estimée du système d'acquisition, où  $\hat{X}_{n+1}$  est la position du système et  $\hat{X}'_{n+1}$  est l'estimée du processus d'acquisition recherché  $A_{n+1} = X'_{n+1, Z_{n+1}}$ .

Le couplage entre les 2 systèmes d'acquisition est une localisation après la mutation Lagrangienne. Ecrite comme telle l'évolution n'est pas Markovienne, le potentiel pouvant être nul. La figure 7.4 est à ce titre abusive, il faut voir un recouvrement de la trajectoire  $Z_0, \dots, Z_n$  par des boules  $(B_j^\varepsilon(Z_j))_{0 \leq j \leq n}$  d'intersection non nulle comme l'a montré le schéma 7.3 .

On va supposer qu'à tout instant  $n$  et pour tout point d'état,  $(x, x')$ , on ait  $M_{n+1, \pi_n}(\mathbb{1}_{B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'})(x, x') > 0$  c'est à dire que la probabilité d'arriver dans la boule  $B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1})$  partant de  $x$  n'est pas strictement nulle.

Maintenant on peut redéfinir le noyau de Markov et le potentiel pour restituer le caractère Markovien :

$$\tilde{M}_{n+1, \pi_n}((x, x'), d(y, y')) = \frac{M_{n+1, \pi_n}((x, x'), d(y, y')) \mathbb{1}_{B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'}(y, y')}{M_{n+1, \pi_n}(\mathbb{1}_{B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'})(x, x')} \quad (7.32)$$

et

$$\tilde{G}_{n+1}(x, x') = M_{n+1, \pi_n}(\mathbb{1}_{B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'})(x, x') \quad (7.33)$$

Le noyau Markovien  $\tilde{M}_{n+1, \pi_n}((x, x'), d(y, y'))$  est une transition locale restreinte au domaine  $B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1})$  alors que la fonction de potentiel  $\tilde{G}_{n+1}(x, x')$  donne

les chances de rester dans  $B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'$ , c'est à dire que l'acquisition Lagrangienne suit le chemin  $Z_0, \dots, Z_{n+1}$ . Dans ce cas le potentiel ne dégénère plus.

On part à l'instant initial du cylindre  $B_0^\varepsilon(Z_0) \times E'$  avec la distribution  $\chi_0^B$ , de la loi  $\pi_0$  du couple  $(X_0, X'_0)$  et on utilise pour tout temps les potentiel/noyau de Feynman-Kac  $(\tilde{G}_n, \tilde{M}_{n+1, \pi_n})$ .

On note  $\chi_n^B$  et  $\hat{\chi}_n^B$  les flots du processus restreint aux cylindres  $B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'$ . Ils peuvent être interprétés comme des processus à champ moyen en interaction et sont solutions de l'équation non-linéaire  $\chi_{n+1}^B = \chi_n^B K_{n+1, \chi_n^B}^B$ .

On choisit de donner au noyau de MacKean la forme (non unique) :

$$K_{n+1, \chi_n^B}^B = \tilde{S}_{n, \chi_n^B} \tilde{M}_{n+1, \pi_n}$$

Le noyau de sélection  $\tilde{S}_{n, \chi_n^B}$  exploite la fonction de potentiel  $\tilde{G}_{n+1}$ , et on prend la forme de sélection habituelle :

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{n+1, \chi_n^B}((x, x'), d(y, y')) \\ &= \tilde{G}_{n+1}(x, x') \delta_{(x, x')} (d(y, y')) + [1 - \tilde{G}_{n+1}(x, x')] \frac{\tilde{G}_{n+1}(y, y') \chi_n^B(d(y, y'))}{\chi_n^B(\tilde{G}_{n+1})} \end{aligned} \quad (7.34)$$

ce qui donne le schéma d'évolution pour les lois d'évolution restreintes au chemin d'acquisition :

$$\hat{\chi}_n^B \xrightarrow{\tilde{M}_{n+1, \pi_n}} \chi_{n+1}^B \xrightarrow{\tilde{S}_{n+1, \chi_n^B}} \hat{\chi}_{n+1}^B \quad (7.35)$$

et pour les états :

$$\underbrace{(X_n^B, X_n'^B)}_{\in (B_n^\varepsilon(Z_n) \times E')} \xrightarrow{\text{Sélection}} \underbrace{(\hat{X}_n^B, \hat{X}_n'^B)}_{\in (B_n^\varepsilon(Z_n) \times E')} \xrightarrow{\text{Mutation restreinte à } B_{n+1}^\varepsilon} \underbrace{(X_{n+1}^B, X_{n+1}'^B)}_{\in (B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E')} \quad (7.36)$$

Le flot d'acquisition restreint aux boules centrées sur le chemin d'acquisition est donc solution du système dynamique  $\chi_{n+1}^B = \chi_n^B \tilde{S}_{n, \chi_n^B} \tilde{M}_{n+1, \pi_n}$  initialement en  $\chi_0^B$  et décrit le couplage entre les 2 systèmes d'acquisition le long du chemin  $Z_0, \dots, Z_n$ . C'est un processus à champ moyen comme il en a été étudié au chapitre précédent.

Cela nous permet d'envisager une interprétation particulière de l'estimation d'acquisition que nous examinons dans le paragraphe suivant.

### 7.3 Approximation particulière pour l'estimation du processus d'acquisition discret

Les intégrales que l'on vient de calculer n'ont de solutions qu'approchées. Nous décrivons succinctement l'algorithme d'estimations particulières. Le cas présent est identique à celui du filtrage étudié au chapitre 6 paragraphe 6.3, dont nous avons d'ores et déjà les estimés d'erreur.

On dispose par hypothèse d'un chemin d'acquisition  $(Z_0, \dots, Z_n)$  à valeurs dans  $E$  et d'un ensemble de réel  $0 < (\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}$  permettant d'assurer l'existence de boules d'homogénéité  $B_i^\varepsilon(Z_i)$  pour  $i \in [0, n]$ .

On va supposer que la transition Markovienne  $\tilde{M}_{n+1, \pi_n}$  vérifie une hypothèse de régularité pour utiliser le travail du chapitre 6 :

. *Hypothèse* : Pour toute fonction mesurable bornée  $f$ , toute mesure  $\pi$  et  $n \in \mathbb{N}$ , il existe des constantes  $c_n(\pi)$  et un ensemble fini de fonctions  $h$  bornées avec  $\|h\| \leq 1$  tels que pour toute mesure  $\mu$

$$\|\tilde{M}_{n+1, \pi}(f) - \tilde{M}_{n+1, \mu}(f)\| \leq c_n(\pi) \|f\| \sum_h |\pi(h) - \mu(h)| \quad (7.37)$$

A l'instant initial on se donne dans  $B_0^\varepsilon(Z_0) \times E'$  une population de taille  $N > 0$  de particules  $(\xi_0^i, \xi_0^{\prime i})_{1 \leq i \leq N}$  *i.i.d.* selon  $\chi_0^B$  et on note :

$$\chi_0^{B, N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_0^i, \xi_0^{\prime i}} \quad (7.38)$$

La loi empirique  $\chi_0^{B, N}$  approche la loi exacte  $\chi_0^B$  et le lemme 6.1.3 nous donne pour tout  $p > 0$  l'existence d'une constante  $C_0$  telle que :

$$\mathbb{E}(\|\chi_0^{B, N} - \chi_0^B\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_p(0)}{\sqrt{N}} I(\mathcal{H}) \quad (7.39)$$

Au pas de temps  $n$ , on dispose des particules  $(\hat{\xi}_n^i, \hat{\xi}_n^{\prime i})_{1 \leq i \leq N}$  dans  $B_n^\varepsilon(Z_n) \times E'$  et évoluant selon

$$(\hat{\xi}_n^i, \hat{\xi}_n^{\prime i}) \xrightarrow{\text{Mutation}} (\xi_{n+1}^i, \xi_{n+1}^{\prime i}) \xrightarrow{\text{Sélection}} (\hat{\xi}_{n+1}^i, \hat{\xi}_{n+1}^{\prime i}) \quad (7.40)$$

Le flot exact  $\chi_{n+1}^B = \chi_n^B K_{n+1, \chi_n^B, \pi_n}^B$  est approché par  $\chi_{n+1}^{B,N}$  avec une propagation empirique de  $\chi_n^{B,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\xi_n^i, \xi_n'^i)}$ . Pour estimer la loi a priori du milieu  $\pi_n$ , nous avons besoin d'un système de  $d$  particules auxiliaires qui évoluent à part selon le noyau de transition  $\tilde{M}_{n+1, \pi_n}$ .

On peut alors reprendre la proposition 6.3.1 et l'adapter à cette situation :

**Théorème 7.3.1.** *Pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $p \geq 1$ , il existe des constantes  $C_n$  et  $C'_n$  telles que*

$$\mathbb{E}(\|\chi_n^{B,N} - \chi_n^B\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \frac{C_n}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n}{\sqrt{d}} \right] I(\mathcal{H}) \quad (7.41)$$

On le voit pour une acquisition en temps discret le long d'un chemin recouvert par un ensemble de boules, la difficulté vient de l'annulation possible du potentiel  $G_n(x, x') = \mathbb{1}_{B_n^\varepsilon(Z_n) \times E'}(x, x')$  ou bien de l'invalidation de l'hypothèse  $M_{n+1, \pi_n}(\mathbb{1}_{B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'})(x, x') > 0$ .

On peut alors prendre le problème de manière différente en autorisant une extinction de l'algorithme dès que le potentiel s'annule. L'estimation de ce temps d'arrêt est un problème encore ouvert. On peut trouver dans [Del Moral et Lezaud \(2006\)](#) ou dans la version originale [Del Moral \(2004\)](#) ce type de méthode alternative avec une idée de la probabilité d'extinction qui possède une borne exponentielle.

Ramené à notre cas, leur travail apporte une autre approximation particulière qui repose sur le flot  $\chi_{n+1} = \chi_n S_{n, \chi_n}^Z M_{n+1, \pi_n}$ . On crée alors un système de particules en interaction qui a la possibilité d'aller sur un point cimetièrè  $\mathcal{U}$  quand le potentiel est nul. Le système de particules évolue de la même manière que précédemment, mais au premier instant où le potentiel s'annule, il est envoyé sur  $\mathcal{U}$  et la chaîne de Markov est stoppée. Si l'on note  $\tau^N$  cet instant, on trouvera dans [Del Moral \(2004\)](#) le théorème :

**Théorème 7.3.2** (Théorème 7.4.1 p 232). *On suppose que pour tout  $n \geq 0$  la mesure non-normalisée  $\gamma_n(1) > 0$ . Alors pour  $N \geq 1$  on a l'estimation*

$$\mathbb{P}(\tau^N \leq n) \leq a(n) e^{-N/b(n)} \quad (7.42)$$

La démonstration utilise un ensemble contenant l'évènement  $\{\tau^N \leq n\}$  pour lequel on obtient une inégalité de Chernov-Hoeffding. Les coefficients de la borne exponentielle sont pour  $a(n)$  fonction de  $n$  seul et pour  $b(n)$  fonction de  $n$  et  $\gamma_{n+1}(1)$  ( $= \mathbb{E}_{\chi_0}(\prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{B_n^\varepsilon(Z_n) \times E'})$  non nul par hypothèse). L'inégalité n'est pas

« optimale », mais permet de penser qu'avec un nombre suffisamment grand de particules, l'extinction devient peu probable.

Néanmoins dans le traitement numérique de l'estimation du processus d'acquisition, il faudra veiller à ce que les boules le long du chemin d'acquisition ne soient pas trop petites.

On peut maintenant montrer un exemple d'acquisition sur un champ de vecteur simulé, qui nous permettra de nous rassurer sur la taille des boules nécessaires à une estimation sur milieu localement homogène dans un problème d'acquisition discrète.

## 7.4 Echantillonnage de l'acquisition d'un champ de vecteur

En milieu localement homogène, l'estimation peut se faire sur un chemin recouvert de boules dans lesquelles le milieu est identiquement distribué. On l'a vu, pour qu'un algorithme particulière soit pérenne il faut que ces boules soient atteignables au moins en moyenne sous peine d'extinction de la chaîne de Markov. Si cette assurance peut paraître difficile à première vue, on va pouvoir apaiser les craintes par une propriété des champs discrétisés. L'échantillonnage d'un champ opère un filtrage des échelles les plus petites et impose naturellement une résolution. Nous détaillons cela dans le paragraphe suivant.

### 7.4.1 Acquisition d'un champ à une résolution donnée

La réflexion se base sur une Analyse Multi-Résolution (AMR) d'un Champ Vectoriel (voir Meyer (1990)). En quelques mots, une AMR de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , avec  $d \geq 1$  est une suite croissante de sous-espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  telle que pour toute fonction  $f$  de  $L^2$  :

1.  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k) \in V_j$
2.  $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}^d)$
3.  $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot x) \in V_{j+1}$
4.  $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \{0\}, \quad \bigcap_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j = \{0\}$   
 et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}^d), \quad \bigcup_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}^d)$

5.  $\exists \varphi \in V_0$  telle que  $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^d)$

Avec une AMR on dispose donc d'une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  sur laquelle il est possible de définir des projections.

Les sous-espaces  $V_j$  sont appelés des espaces d'approximations de résolution  $j$ , et l'approximation multirésolution de  $f$  à la résolution  $2^{-j}$ , notée  $f_j$ , est définie comme la projection orthogonale dans le sous-espace  $V_j$ .

Les sous espaces  $V_{j+1}$  sont définis par emboîtement et on peut les décomposer selon  $V_j$  et un complément  $W_j$  et on a la somme orthogonale  $V_{j+1} = V_j \oplus^\perp W_j$ . Le sous-espace  $W_j$  est appelé l'espace de détail au niveau de résolution  $j$  et est orthogonal à  $V_j$ .

En prenant des projections successives, la différence entre  $f_j$  et  $f_{j+1}$  est l'information ajoutée par les détails à l'échelle  $2^{-(j+1)}$  que l'on note  $d_j = f_{j+1} - f_j$ .

Dans la base hilbertienne, le projecteur est donné par

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}(x)$$

où  $\varphi_{j,n}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - n)$ , la fonction  $\varphi$  est appelée la fonction d'échelle. L'approximation discrète  $f_j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$  est un filtre passe-bas échantillonné tous les  $2^{-j}$  points. Si l'on dispose d'une approximation d'échelle, ou d'une échelle de résolution  $J$ , on a directement :  $L^2(\mathbb{R}^d) = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_J \oplus_{j \geq J} W_j$ .

On ne s'intéressera pas ici aux problèmes de convergence de l'AMR dans le cas de champs de vecteurs aléatoires, mais on ne retiendra qu'un échantillonnage correspond à un filtre passe-bas et à une projection dans un espace de résolution induit par le pas d'échantillonnage avec un résidu correspondant aux structures plus fines.

C'est une autre façon de prendre ce que l'on a présenté au chapitre 4 sur les conséquences en traitement du signal de la théorie de l'information de [Shannon \(1948\)](#).

Dit rudement, l'AMR ou la théorie de Shannon nous disent que pour qu'une structure informationnelle soit accessible en échelle ou fréquentiellement, elle doit être vue 2 fois. Dans le cas contraire, on peut la considérer comme une variable aléatoire décorrélée, c'est à dire un bruit blanc.

Il y a un lien entre fréquence et échelle dans tous les systèmes physiques ayant des inerties dynamiques (voir [Daubechies \(1992\)](#)). L'AMR décompose les struc-



tures d'un champ en niveaux d'échelle discrets, dyadiques et pour un domaine de taille finie, cette décomposition est également finie. En analyse fréquentielle il y a la même concordance. Pour une série temporelle discrète de longueur  $n < \infty$ , on connaît l'ensemble des fréquences échantillonnées et accessibles à la série. Si le pas de temps de l'échantillonnage est  $\Delta t$ , on sait que la fréquence la plus élevée contenue dans l'échantillonnage est la fréquence de Shannon,  $F_S = \frac{1}{2\Delta t}$ , que la fréquence la plus basse est la fréquence de Rayleigh,  $F_R = \frac{1}{n\Delta t}$  et qu'entre, les fréquences accessibles sont données par  $f_e(i) = \frac{1}{i\Delta t}$  avec  $i \in [2, n]$ . Tout autre fréquence originellement dans le signal à temps continu n'est pas observée.

Appliquant ces considérations fréquences/échelles, un champ aléatoire à temps continu, après discrétisation en temps et en espace, subit un filtrage des structures plus fines que la maille d'échantillonnage, ce que l'on nommera après un filtrage d'échelle, et est nettement plus « mou » avec des zones plus homogènes. Ainsi l'échantillonnage spatio/temporel va nous permettre d'assurer des plages assez grandes de zones homogènes qui vont, lors de l'estimation du processus d'acquisition, maintenir valide l'hypothèse nécessaire à la non-extinction de la chaîne de Markov.

Ces propriétés d'échelle des champs échantillonnés ont aussi des conséquences pour les processus d'acquisitions eux-mêmes.

Soit  $(X_t, X'_{t,x})$  un système d'acquisition à temps continu sur  $E \times E'$ . Le champ  $X'_{t,x}$  est supposé être dans  $L^2(\mathbb{R}^{d'})$ . On se place à une résolution donnée  $J$ . Par la suite cette résolution sera fourni par les pas de discrétisation. On dispose alors des sous espaces  $V_J$  et  $W_J$ . On note  $X'^f_{t,x}$  la projection de  $X'_{t,x}$  dans  $V_J$  et  $X'^b_{t,x}$  le résidu correspondant au bruit d'échelle.

On peut alors considérer pour un même chemin d'acquisition  $X_t$  différents processus d'acquisition. On note  $A_t^T = X'_{t,X_t}$  l'acquisition totale. On va comparer  $A_t^T$  avec le processus d'acquisition partielle utilisant le même chemin mais acquérant le champ  $X'^f_{t,x}$  filtré des petites structures non accessibles à l'échantillonnage :  $A_t^f = X'_{t,X_t}$ .

Les 2 acquisitions voient le même champ mais l'acquisition totale est bruitée par les structures de petites échelles. On peut remarquer que les opérations d'acquisition et de filtrage échelles sont additives. En effet non seulement le champ total  $X'_{t,x}$  est la somme  $X'^f_{t,x} + X'^b_{t,x}$  mais l'acquisition totale est :  $A_t^T = A_t^f + A_t^b$ .

D'un autre coté, on peut traiter de manière fréquentielle l'acquisition totale  $A_t^T = X'_{t,x}$  en filtrant les fréquences plus élevées qu'une fréquence donnée. En considérant une résolution  $J$ , une fréquence de coupure  $f_c$  lui est physiquement associée, on peut alors filtrer dans  $A_t^T$  les fréquences plus élevées que  $f_c$  et obtenir  $A_t^c$ .

Par l'additivité des différentes décompositions, on voit que l'acquisition filtrée  $A_t^f$  égale l'acquisition  $A_t^c$ . Les résidus  $A_t^b = A_t^T - A_t^f$  sont les bruits d'échelle contenus dans l'acquisition totale.

En ingénierie, que ce soit en assimilation de champ dynamique ou en mesures expérimentales ou alors en modélisation sur points de grille, les systèmes d'acquisition ou de traitement de la donnée suppriment ou tentent de supprimer le terme  $A_t^b$  au moyen d'un filtre fréquentiel de type Fourier appelé filtre anti-repliement (ou anti-aliasing, ou anti-crénelage selon le domaine d'application). On va prendre ce parti et considérer dans la suite de cette section que l'acquisition  $A_t$  a été correctement filtrée du bruit de petite échelle et ne contient que la composante accessible  $A_t = A_t^f$ .

### 7.4.2 Exemple d'acquisition sur une simulation de champ turbulent

Pour illustrer ce propos sur les échelles des structures contenues dans une acquisition discrète et les conséquences sur les tailles de zones d'homogénéité, nous allons présenter une application numérique.

Sur un cas simulé de champ aléatoire continu, nous décrirons un chemin d'acquisition aléatoire sur lequel on relève le champ. Dans un deuxième temps on filtre le champ aléatoire des structures plus petites que la résolution d'échantillonnage. Pour terminer on va comparer numériquement les acquisitions totales, les acquisitions filtrées et celles continues puis correctement échantillonnées (sans repliement de spectre).

Pour être en relation avec la suite de ce mémoire, nous allons simuler un écoulement d'un fluide turbulent bidimensionnel homogène isotrope ayant comme condition initiale une variable aléatoire gaussienne. Pour simplifier la résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes qui guide le fluide nous allons prendre un domaine torique  $T^2 = [0, 2\pi]^2$ . On intègre alors l'équation de Navier-Stokes

exprimée en vorticité :

$$\frac{\partial \zeta_{t,x}}{\partial t} + U_{t,x} \cdot \nabla_x \zeta_{t,x} = \zeta_{t,x} \cdot \nabla_x U_{t,x} + \mu \Delta \zeta_{t,x} \quad (7.43)$$

$$\zeta_{0,x} = \zeta_0(x) \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (7.44)$$

Comme le domaine est torique, il n'y a pas de conditions aux bords, et on a donné au système une condition initiale aléatoire décorrélée Gaussienne.

Pour simplifier on se place dans le cas d'un écoulement barotrope, c'est-à-dire que la variation de pression ne se fait qu'en suivant la variation de la densité.

De manière classique on résout dans ces conditions l'EDP de Navier-Stokes en formulation vorticité en passant dans l'espace de Fourier. Les opérateurs différentiels deviennent alors multiplicatif sur la grille  $[-\pi, \pi]^2$  de l'espace de Fourier. On avance d'un pas de temps dans cet espace, puis par une transformée de Fourier inverse qui nous ramène dans l'espace physique, on restitue le champ de vortex.

Sur la figure 7.5 on montre le résultat de l'intégration après 1 unité de temps et un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-5}$  unité de temps soit  $2 \cdot 10^4$  itérations. Cette expérience numérique a été effectuée au moyen du logiciel de calcul Scilab et avec une bibliothèque de simulation portée dans cet environnement par Olivier Pannekoucke du groupe de recherche en modélisation de Météo-France.

La simulation comporte un domaine de 128 par 128 points. Une fois réalisée, nous filtrons pour avoir un échantillonnage sur 8 points au lieu de 128 par un filtre sur les coefficients de Fourier. On montre alors sur un domaine 'déplié' carré le champ initial simulé et le même champ mais filtré des petites échelles par l'échantillonnage. Sur la figure 7.5 on voit en haut le champ de tourbillon simulé et en bas la correspondance en fonction de courant. La figure 7.6 illustre l'impact du filtrage des hautes fréquences. On rappelle que la fonction de courant  $\Psi_{n,x}$  se déduit du tourbillon  $\zeta_{n,x}$  en inversant quand c'est possible l'équation différentielle  $\zeta_{n,x} = -\Delta \Psi_{n,x}$ . L'inversion du Laplacien se fait dans l'espace de Fourier.

On peut voir que dans le cas filtré les structures les plus fines ont disparu, ne laissant que le champ de grande longueur d'onde. Les trajectoires (si on suppose l'écoulement stationnaire, elles se confondent avec la fonction  $\Psi$ ) sont plus tendues. On remarque que le fluide change alors d'aspect de forme.

Après la génération des champs vectoriels simulés, on a construit un exemple de chemin d'acquisition sur lequel on a relevé la fonction de courant  $\Psi_{n,x}$ . Comme chemin d'acquisition nous avons choisi une marche aléatoire sur la grille de simu-

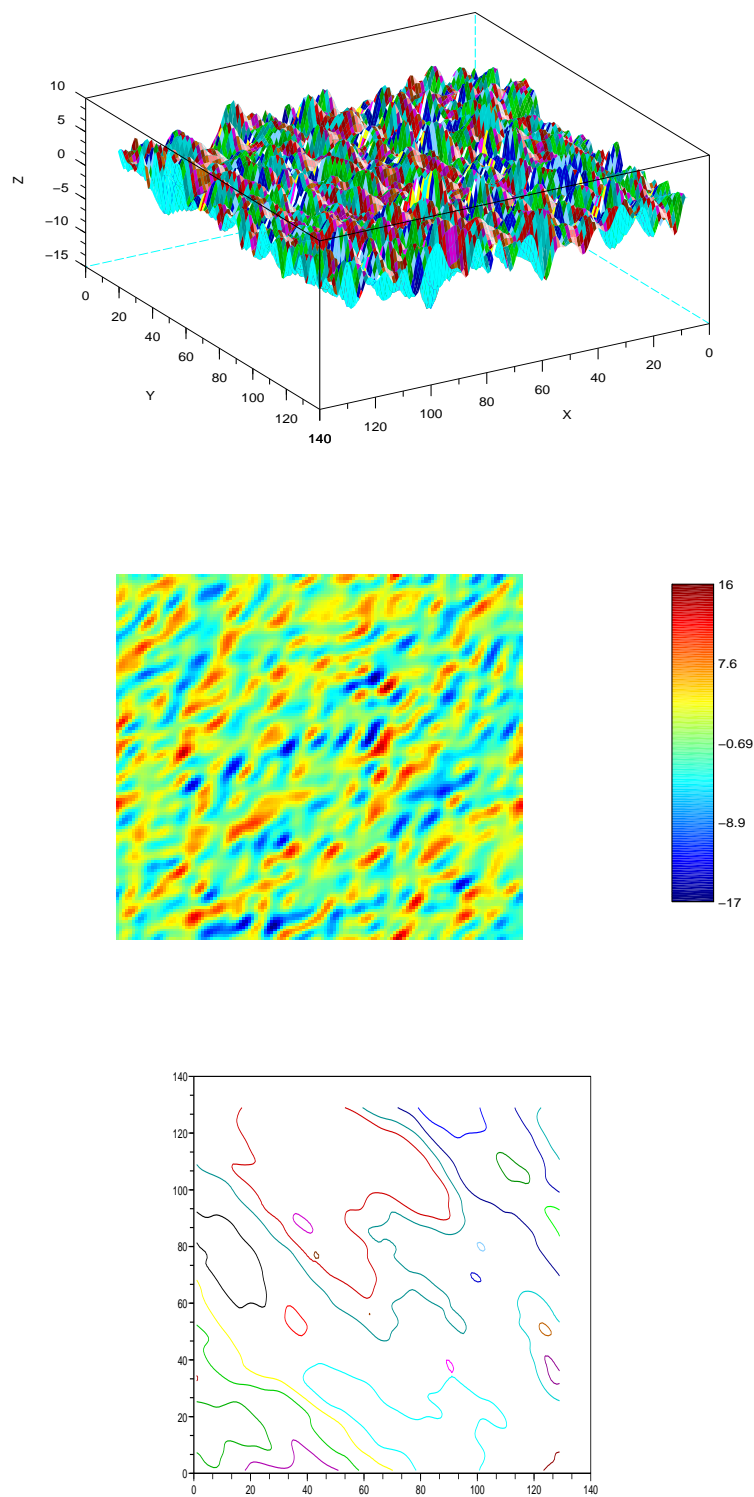


FIG. 7.5 – Champ de turbulence 2D en représentation tourbillon et sa fonction de courant après 1 seconde de simulation

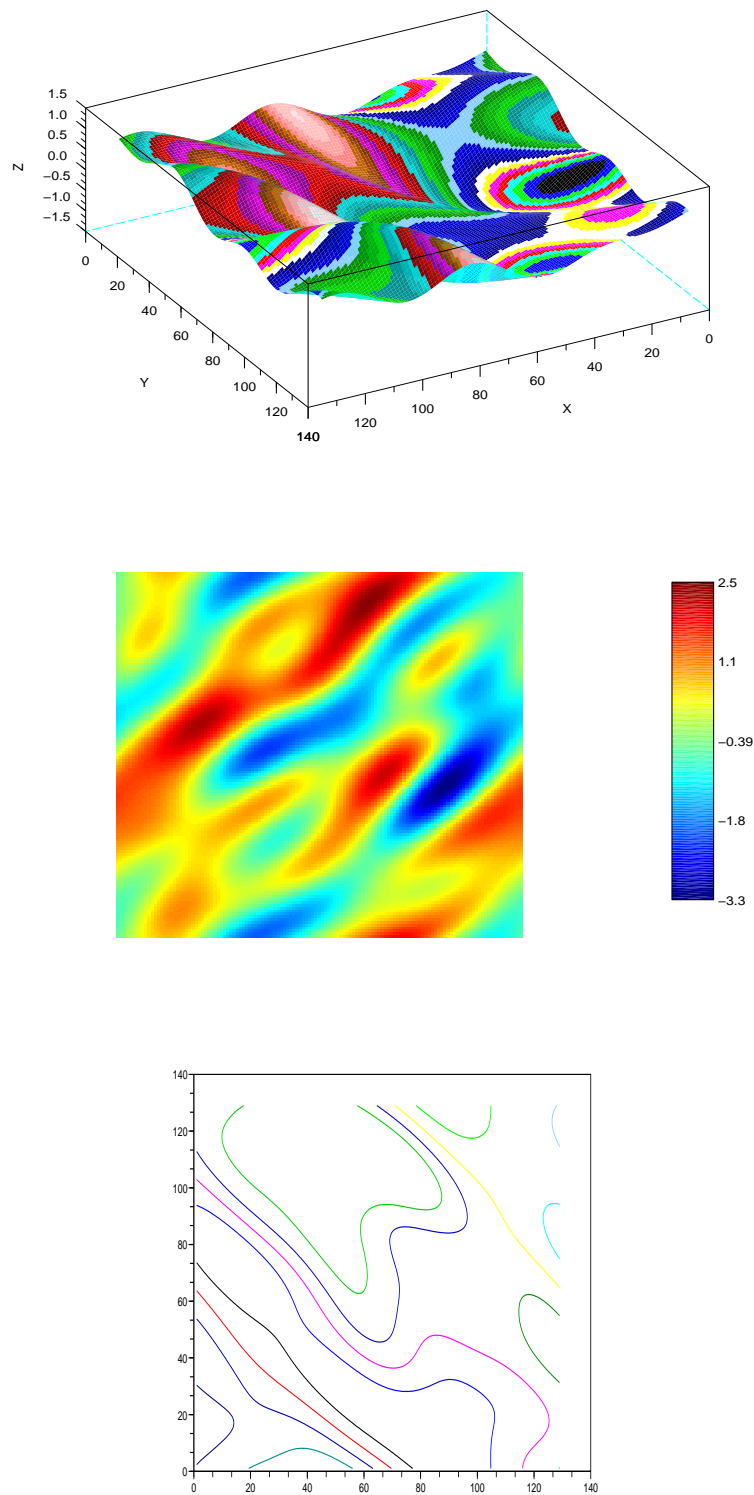


FIG. 7.6 – Champ de turbulence 2D filtré des échelles fines en représentation tourbillon et sa fonction de courant après 1 seconde de simulation

lation de  $128 \times 128$  points où à chaque pas de temps on choisit une des 4 directions (on ne reste pas sur place) avec la même probabilité. Le point de départ est fixé au centre de la grille. Figure 7.7 en haut, on illustre une réalisation de la marche aléatoire avec pour fond le champ turbulent original à gauche et le champ filtré à droite. Ici, le chemin a été construit pour tomber sur les points de grille du champ échantillonné le moins fin. Entre deux de ces points nous avons rajouté des segments pour donner le chemin sur le champs de résolution la plus fine.

En bas de l'illustration 7.7 nous avons l'acquisition totale  $A_n^T$  comportant du bruit d'échelle en couleur cyan, l'acquisition  $A_n^f$  sur le champ d'échelle filtré (7.6) qui ne comporte pas de bruit est en rouge. Pour la troisième courbe en noir, nous sommes partis de l'acquisition totale puis nous avons filtré les échelles les plus petites pour obtenir une nouvelle série temporelle  $A_n^e$  et qui se compare à l'acquisition filtrée  $A_n^f$ . Sauf au début de l'acquisition où la turbulence est la plus forte car la dissipation n'a pas encore réorganisé les structures par dissipation d'énergie, les 2 acquisitions se comparent assez nettement et on a ainsi illustré l'égalité  $(A_i^e = A_i^f)_{1 \leq i \leq n}$ .

Bien sûr le bruit d'échelle est plus ou moins important en fonction de la structure du champ multidimensionnel et de l'existence de forts gradients qu'il peut contenir. Ici, nous sommes en turbulence homogène assez douce (le domaine est petit, le nombre de Reynolds est faible), le bruit d'échelle est donc faible mais perceptible, notamment dans la première partie de la série temporelle. Le filtrage fréquentiel partant de l'acquisition la plus fine permet de retrouver et de supprimer presque tout le bruit dû à l'échantillonnage, mais pas complètement. Il faudrait un vrai traitement probabiliste pour l'épurer. Les systèmes d'ingénierie n'usent que de la méthode fréquentielle au travers des filtres anti-aliasing pour traiter cet effet.

Cette séparation d'échelle est très stricte, c'est le sens de l'AMR qui donne des décompositions orthogonales. C'est ce que l'on fait naturellement dans la procédure d'échantillonnage. Il faut bien entendre ce que l'on entend par structures de petites échelles lorsqu'on se réfère à un objet physique. Dans le cas d'un fluide, si un tourbillon d'échelle plus petite que la longueur de Shannon impacte sur les échelles plus grandes, sans voir le phénomène on peut en avoir les conséquences (injection d'énergie, modification du champ des vitesses, du taux de déformation, etc).

Remarque : *Nous avons vu que la vitesse Lagrangienne pouvait être vue comme l'acquisition du champ de vitesse eulérienne le long de la trajectoire de la parti-*

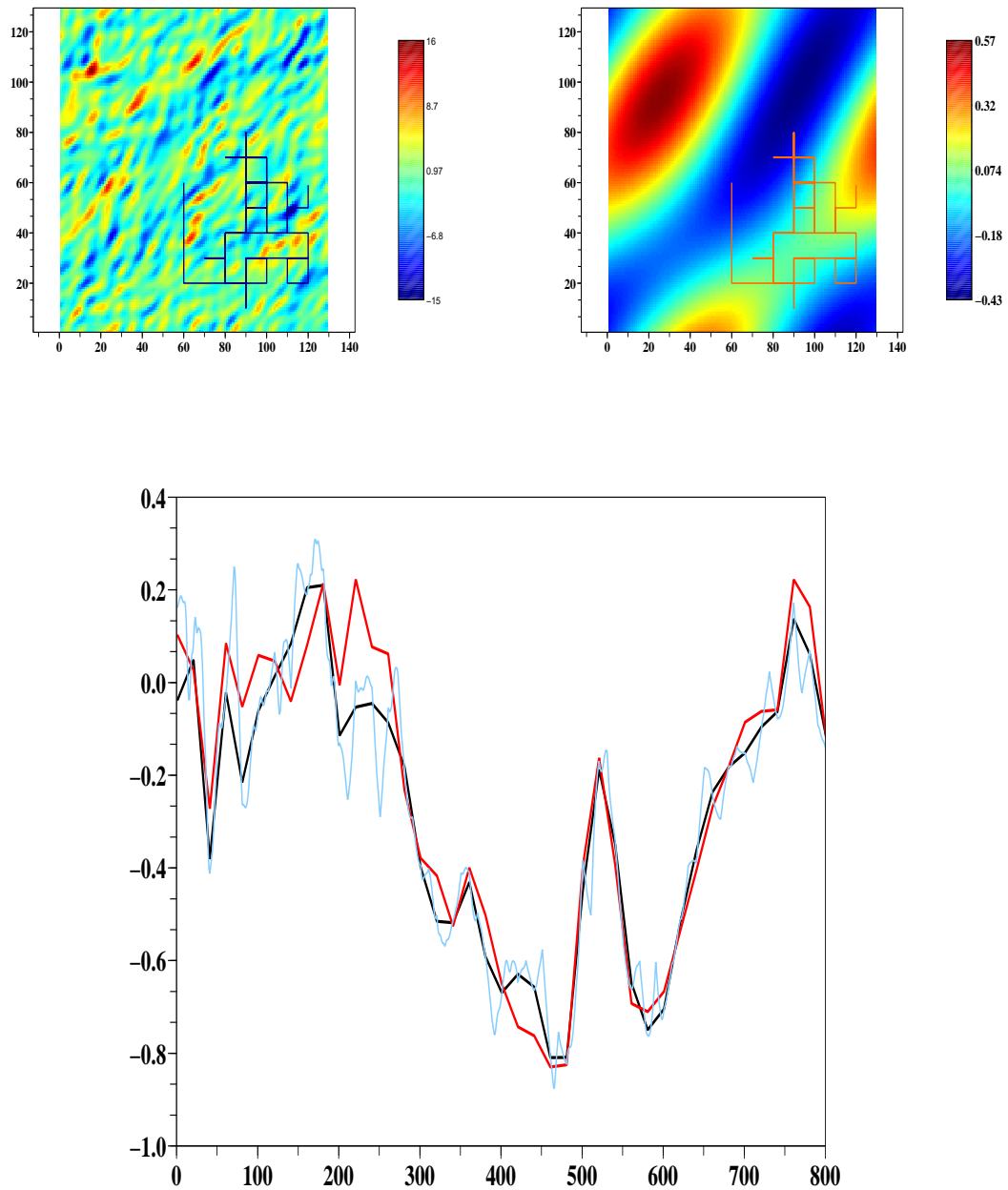


FIG. 7.7 – Acquisition d'un champ de turbulence bidimensionnel le long d'un chemin aléatoire. En haut à gauche le chemin d'acquisition avec pour fond le champ turbulent original après 4 secondes de simulation, à droite le même chemin avec pour fond le champ à 4 secondes filtré des petites échelles. En bas les acquisitions totale  $A_n^T$  en cyan, filtré des échelles fines  $A_n^f$  en rouge et échantillonnée  $A_n^e$  en noir

*cule. Avec ce que l'on vient de voir, il existe également le long de ce chemin d'acquisition une série de boules maintenant l'homogénéité du milieu autour de la particule fluide. Dans le cas des fluides, le rayon de cette boule sera fonction du taux de turbulence : plus l'environnement est turbulent plus la boule sera petite, et a contrario, un écoulement laminaire aura des boules d'homogénéisation grandes.*

*Ce que l'on vient de voir sur l'acquisition dans le cas d'une dynamique Lagrangienne pourrait s'appliquer au cas de la modélisation numérique sur grille de Gauss de quantités Lagrangiennes, comme le font [Bossy et al. \(2007\)](#) pour la simulation locale du vent dans un modèle météorologique non-hydrostatique. Bien souvent les statistiques calculées sont réappliquées sur des points de grille après interpolations en utilisant seulement les 2 premiers moments. On pourrait tirer partie de la dynamique des processus d'acquisition discrets exposé en [7.2](#) pour obtenir tous les moments du processus sur les points de la grille de simulation.*

Ce travail nouveau sur le processus d'acquisition nous a fourni les outils nécessaires au filtrage d'observations réalisées sur un fluide. Nous sommes alors dans le cas d'une acquisition bruitée a posteriori.



# Chapitre 8

## Filtre non-linéaire pour les mesures mobiles d'un fluide

Avec des observations multidimensionnelles des champs d'écoulement, il serait possible de filtrer comme l'a fait Anne [Cuzol \(2006\)](#) en utilisant des simulations multidimensionnelles mais outre la lourdeur qu'imposerait la résolution de champ-particule par un solveur de l'équation de Navier-Stokes, cette méthode serait peu adaptée à notre problème d'estimation ponctuelle. De plus les paramètres que l'on cherche à mesurer sont issus d'écoulements turbulents considérés comme localement homogènes. On peut mentionner le travail de [Sritharan \(1995\)](#) qui développe le filtrage d'images bruitées d'un champ de vecteur solution de l'équation de Navier-Stokes Stochastique 2D incompressible sur le tore  $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ . Il donne alors l'existence et l'unicité des solutions du problème de filtrage associé. Il n'existe pas à notre connaissance de travaux équivalents pour le problème en dimension 3. Quoiqu'il en soit nous ne sommes pas ici dans le cadre du filtrage d'image plan.

Dans les chapitres précédents nous avons donc développé les outils nouveaux nécessaires et formalisé le problème de la mesure mobile par des systèmes d'acquisition. Maintenant nous sommes en capacité de proposer un filtre non-linéaire pour débruiter les signaux issus des mesures faites sur un fluide turbulent. Ce filtre pour les mesures mobiles sur un fluide est l'application et la mise en forme de ces outils. Le problème de filtrage d'une mesure mobile dans un fluide est devenu maintenant le débruitage d'un processus d'acquisition.

Plus précisément il faut parler de couplage entre 3 systèmes d'acquisitions :

- le système d'acquisition d'observation qui trouve sa solution dans la résolution du problème de filtrage et l'approximation particulière présentée

chapitre 5 et 6.

- le système d'acquisition Lagrangien qui utilisera un modèle Markovien d'évolution d'un fluide comme vu au chapitre 3.
- le système d'acquisition d'un champ vectoriel localement homogène le long d'un chemin indépendant du milieu tel qu'exposé chapitre 7.

La prochaine étape consiste à mettre en forme et rendre compatible le modèle de turbulence. Ces modèles Lagrangiens vus en 3.1 sont ceux proposés par S.B. Pope. La nature de la mesure nous permet de nous contenter de modèles homogènes, dans un premier temps isotropes. Lors de l'application dans l'atmosphère avec des mesures tridimensionnelles, une amélioration sera nécessaire et on s'inspirera du modèle de turbulence stratifiée présentée par Das et Durbin (2005). Ces modèles ont des interactions de champ moyen, le problème de filtrage associé utilisera les algorithmes présentés dans le chapitre 6. Mais avant il faut discrétiser les modèles Lagrangiens et proposer des méthodes de fermetures.

## 8.1 Discrétisation et fermeture du modèle Lagrangien pour les fluides turbulents

Deux types de modèles vont être utilisés. Un modèle simplifié pour apprendre les techniques que l'on va montrer et un modèle plus complet et plus réaliste qui étendra ces méthodes. Pour mettre en forme les modèles on utilise une méthode commune : en premier lieu, on les discrétise par des schémas d'Euler explicites qui sont les plus adaptés aux processus de Itô puis on propose une estimation des moyennes Eulériennes et on termine en apprenant les paramètres de commandes.

Le modèle Lagrangien de la vitesse d'un fluide  $V_t$  dans le régime de la turbulence homogène isotrope est celui développé par S.B. Pope pour décrire le comportement de particules placées dans un fluide turbulent incompressible. On rappelle que la partie dynamique s'écrit en temps continu :

$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0\right) \cdot \frac{\varepsilon_t}{k_t} \cdot [V_t - \langle v \rangle] dt + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} dW_t \quad (8.1)$$

Ce n'est d'ailleurs pas à proprement parlé un modèle d'évolution d'un fluide, il est déduit pour des éléments fluides sans inertie placés dans un champ Eulérien dont ils reçoivent les caractéristiques d'échelles Eulérienne. Dans sa mise en œuvre en simulation, pour être fermé, le modèle stochastique Lagrangien demande à être

plongé dans un champ Eulérien issu d'un solveur de NSE.

Dans notre problème d'ingénierie, nous n'aurons pas le champ Eulérien servant de support. Nous allons fermer le système par l'observation des vitesses du fluide. Les observations contiennent naturellement les éléments d'échelles Eulériennes du fluide. Nous allons les retrouver par un conditionnement aux observations et fermer le système de Pope. Il sera alors sensiblement modifié pour correspondre à ce fait. C'est ici que se fera le couplage du modèle Lagrangien au système d'acquisition d'observation.

Le processus d'observation est à temps discret, on a vu les conséquences pour l'acquisition en temps discret du filtrage d'échelle, le modèle de Pope conditionné devra rendre compte du filtrage des petites structures. Ensuite il faudra le coupler au système d'acquisition de la mesure en localisant le processus dans des domaines d'homogénéité.

### 8.1.1 Approximation des moyennes Eulériennes

Ces moyennes Eulériennes sont importantes dans tout travail sur les fluides, mais nous n'y avons pas accès, il faut pouvoir les approcher avec le modèle Lagrangien lui-même. On changera alors la moyenne Eulérienne  $\langle v \rangle$  par la moyenne Lagrangienne apprise  $\mathbb{E}(V_t|X_t)$  et régularisée.

Reprenons les définitions de ces moyennes au travers de différents systèmes d'acquisition. La discussion ne sera que formelle, on supposera l'existence des flots et des densités ou de l'absolue continuité des mesures que l'on va utiliser. On lira dans [Minier et Peirano \(2001\)](#) ou dans [Pope \(2000\)](#) une étude physique des pdf Eulériennes. Pour se fixer un cadre, on peut se rapprocher du travail de [Mikulevicius et Rozovskii \(2004\)](#). Nous ne connaissons pas de résultat d'existence des flots associés aux modèles de Pope, même simplifiés comme 8.1. On a des résultats quand le modèle Lagrangien conduit à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Une avancée récente a été fait par D. Talay, M. Bossy et J.F. Jabir avec l'étude d'un modèle Lagrangien simplifié pour lequel on trouvera les détails dans un article en préparation [Bossy et al. \(2009\)](#). Pour notre part, on laissera donc l'existence des objets sous forme d'hypothèses.

Pour tout temps  $t \in [0, T]$  avec  $T \leq \infty$ , soit  $(X_t, U_{t,x})$  un système d'acquisition sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $(E \times E', \mathcal{E} \times \mathcal{E}')$ . Le champ  $U_{t,x}$  donne les vitesses d'un fluide en tout point de l'espace mesuré  $(E, \mathcal{E})$ .

On prend en premier lieu le chemin d'acquisition stationnaire  $X_t = x \in E$  pour tout temps. La moyenne Eulérienne est alors pour toute fonction  $f$  mesurable bornée :  $\langle f(U) \rangle_{t,x} = \mathbb{E}[f(U_{t,x})] \mathbb{P} - ps$ .

On prend d'autre part à l'instant initial un point  $x_0 \in E$  fixé. On considère le système d'acquisition Lagrangienne  $(X_t^{x_0}, U_{t,X_t^{x_0}} = V_t)$  où  $X_t^{x_0}$  est le flot partant de  $x_0$ . Pour toute fonction mesurable  $f$  on a

$$\mathbb{E}_{x_0}(f(V_t)|X_t^{x_0}) \stackrel{\delta \rightarrow 0}{=} \frac{\mathbb{F}_{x_0}^\delta(f(V_t))}{\mathbb{F}_{x_0}^\delta(1)}(X_t^{x_0}) \quad (8.2)$$

utilisant le noyau de régularisation faible  $G^\delta$  de paramètre  $\delta \geq 0$  :

$$\mathbb{F}_{x_0}^\delta(f(V_t))(X_t^{x_0}) = \int f(v)G^\delta(X_t^{x_0}, z)p^{X_t^{x_0}, V_t}(z, v)dzdv \quad (8.3)$$

On considère maintenant que le transport se fait sans variation de densité (la masse d'un élément de volume ne varie pas le long du flot), on prend comme point de départ une variable aléatoire  $X_0$  distribuée selon  $\pi_0$  et l'ensemble des systèmes d'acquisition qui sont arrivés au temps  $t$  au point  $x \in E$ . On s'intéresse alors à la moyenne  $\mathbb{E}[f(V_t) | X_t = x, X_0]$ .

De la même manière on définit l'espérance régularisée en notant  $X_t$  l'ensemble des flots arrivés en  $x$  quels que soient leur points de départ distribués selon  $\pi_0$  :

$$\mathbb{F}^\delta(f(V_t))(X_t) = \int f(v)G^\delta(X_t(x_0), z)p^{X_t, V_t|X_0}(z, v|x_0)\pi_0(x_0)dzdvdx_0 \quad (8.4)$$

On pose alors pour une fonction mesurable  $f$  :

$$\begin{aligned} \Pi_t^\delta(f)(t, x) &\stackrel{def}{=} \mathbb{E}^\delta[f(V_t)|X_t = x, X_0] \\ &\stackrel{def}{=} \frac{\mathbb{F}^\delta(f(V_t))}{\mathbb{F}^\delta(\mathbb{1})}(x) \end{aligned} \quad (8.5)$$

ce qui pour un flot à densité constante donne  $\mathbb{P} - ps$  :

$$\langle f(U) \rangle_{t,x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Pi_t^\delta(f(V_t))(x) \quad (8.6)$$

C'est l'expression que l'on va utiliser pour modéliser et approcher la moyenne Eulérienne hors d'atteinte, en supposant que l'on ne s'éloigne pas des hypothèses de validité.

Le système Lagrangien à temps continu s'écrit alors

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} [V_t - \Pi_t^\delta(V_t)(X_t)] dt + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} dW_t \end{cases} \quad (8.7)$$

C'est la première transformation du système de dynamique. Dans cette démarche, on espère que le couplage avec le système d'acquisition d'observation et la résolution du problème de filtrage nous donneront une estimation correcte de  $\Pi_t^\delta(V_t)(X_t)$

### 8.1.2 Discrétisation du système Lagrangien

On considère le système d'acquisition Lagrangien  $(X_t, V_t = U_{t,X_t})$  à valeurs dans  $(E, E')$ , en ne mentionnant pas en exposant le point de départ  $x_0 \in E$  pour alléger les notations. Pour opérer la discrétisation on va supposer en outre que le système associé 8.7 est Markovien. La discrétisation se fait par un schéma d'Euler explicite simple qui est préférable pour un processus de Itô. Pour des temps  $0 < t_0 < \dots < t_n$  avec  $n > 0$  régulièrement espacés d'un intervalle  $\Delta t$ , on considère les vitesses  $V_0 = V_{t_0}, \dots, V_n = V_{t_n}$  et l'équation d'évolution sur la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{n+1} = V_n & - \nabla_x \langle p \rangle_n \Delta t \\ & + C_1 \frac{\varepsilon_n}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \Delta t \\ & + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_n} \Delta W_n \end{aligned} \quad (8.8)$$

avec  $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $C_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0$ . On note  $\Pi_n^\delta(V_n)(X_n)$  au temps  $t_n$  la valeur de  $\Pi_n^\delta(V_{t_n})(X_{t_n}) = \mathbb{E}^\delta[V_{t_n} | X_{t_n} = x, X_{t_{n-1}}]$  en usant du caractère Markovien.

Ce type d'équation est un modèle du type McKean-Vlasov, et sur les erreurs des schémas de discrétisations explicites d'Euler et sur l'approximation particulière de ces processus, on dispose pour des domaines finis des travaux pionniers de Denis Talay avec Vlad Bally (Bally et Talay (1996a), Bally et Talay (1996b)) ou ensuite avec Mireille Bossy (Bossy et Talay (1996b) ou Bossy et Talay (1995)) puis plus récemment Antonelli et Kohatsu-Higa (2002).

On sait alors que l'erreur commise par le schéma temporel est en  $\Delta t$  et pour les particules en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Sur les représentations particulières on peut aussi lire également [Kurtz et Xiong \(2001\)](#) ou [Gobet \*et al.\* \(2007\)](#). Les démonstrations utilisent l'intégration sur les trajectoires aléatoires pour estimer les erreurs et reposent sur le calcul de Malliavin (lire par exemple [Nualart \(1995\)](#) ou [Bally \(2001\)](#)).

Nous ne les présentons pas ici pour ne retenir que le résultat résumé dans le théorème que l'on peut lire dans l'article de revue de Mireille [Bossy \(2005\)](#) et qui est dû à F. Antonelli et A. Kohatsu-Higa. Ce théorème ne s'applique pas complètement à notre situation, nous ne sommes pas en mesure de satisfaire entièrement les hypothèses présentées dans [Antonelli et Kohatsu-Higa \(2002\)](#) (notamment  $b$  doit être une fonction infiniment dérivable à dérivées bornées), mais permet de se rassurer sur un comportement potentiellement raisonnable de la discrétisation 8.8 hors des régions « à problème ».

**Théorème 8.1.1** (Antonelli-Kohatsu-Higa 2002). *Sur l'espace des fonctions continues munis de la tribu de Borel  $(C([0, +\infty]; \mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, +\infty]; \mathbb{R}^d))$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , on considère le processus canonique  $V$  solution pour tout temps  $t > 0$  de :*

$$V_t = V_0 + \int_0^t b[V_s, \pi_s] ds + \int_0^t \sigma(V_s, \pi_s) dW_s \quad (8.9)$$

avec  $\pi_t = \text{loi}(V_t)$  et  $V_0$  est la condition initiale distribuée selon  $\pi_0$ . On considère l'ensemble de  $N$  particules  $V_t^i$  indépendantes de loi initiale  $\pi_0$  suivant l'équation de dynamique :

$$V_t^{i,N} = V_0^{i,N} + \int_0^t b[V_s^{i,N}, \pi_s^N] ds + \int_0^t \sigma(V_s^{i,N}, \pi_s^N) dW_s^i \quad (8.10)$$

avec  $\pi_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{V_t^{i,N}}$ . Soit  $\Phi^\delta$  un noyau de régularisation de paramètre  $\delta > 0$  (cut-off) et on définit  $\pi_t^{N,\delta}(v) = (\Phi^\delta \star \pi_t^N)(v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi^\delta(v - V_t^i)$ . Enfin pour un pas de discrétisation  $\Delta t$ , pour  $T = K\Delta t$  avec  $K > 0$ , on note  $t_k = k.\Delta t$  et on définit le processus discret  $V_k^i = V_{k.\Delta t}^i$  par le système de dynamique :

$$\begin{aligned} V_{n+1}^{i,N} &= V_n^{i,N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b[V_n^{i,N}, V_n^{j,N}] \Delta t + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sigma(V_n^{i,N}, V_n^{j,N}) \Delta W_{n+1}^i \\ V_0^{i,N} &= V_0^i \end{aligned}$$

et on note  $\pi_n^{N,\delta,\Delta t}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi^\delta(x - V_n^{i,N})$ .

Alors pour  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions Lipschitz bornées à dérivées bornées,  $\Phi^\delta$  un noyau gaussien et le paramètre de cut-off tel que  $\delta^2 = \Delta t$  et  $t \in [0, T]$ , on a le



### 8.1.3 Couplage micro-macro pour le système Lagrangien discrétisé

Dans ce système discret 8.12, il reste deux quantités  $\nabla_x \langle p \rangle_n$  et  $\varepsilon_n$  qu'il faut traiter pour le clore algébriquement. Ces 2 paramètres sont extérieurs à 8.12 et agissent comme 2 commandes. Ce sont des termes moyens déterministes et c'est par leur entremise que s'effectue l'interaction micro-macro.

Le terme micro-macro signifie qu'il existe de deux échelles spatiales ou temporelles distinctes couplées par des équations chacune relative à leur niveau d'échelle respectif. C'est ce que l'on écrit quand on modélise le mouvement Lagrangien d'une particule (niveau micro) à l'aide de moyennes Eulériennes issues d'un champ (niveau macro) déduit de l'équation de Navier-Stokes. Ce couplage micro-macro est intrinsèquement contenu dans la modélisation en champ moyen d'un processus. Le champ moyen correspond aux grandes échelles de temps caractéristiques élevés alors que le reste du modèle porte sur la composante rapide relative aux petites structures. En simulation cette séparation d'échelle qui amène également une séparation des techniques numériques permettant de résoudre chaque échelle porte le nom de Lagrangian Splitting (voir Weynans (2006)).

Pour résoudre notre problème de filtrage nous proposons au contraire de ne pas éclater les 2 niveaux mais de réaliser le couplage micro-macro par l'utilisation des informations contenues dans l'observation en apprenant par filtrage le milieu macro, ce qui nous permettra en même temps de proposer une fermeture algébrique originale pour 8.12. Sur le schéma 8.1 on a illustré en parallèle les méthodes de simulations des fluides turbulents avec le couplage et les fermetures des échelles micro-macro d'un côté et la technique que nous avons développée utilisant le filtrage pour coupler et fermer algébriquement les équations.

Cette technique de fermeture par l'observation permet de réduire le nombre de niveaux à simuler. En contrepartie elle conditionne à l'observation les densités de probabilités que l'on va estimer. Cela modifie profondément le problème initial qui n'utilise plus des lois a priori  $\pi_n$  mais des lois conditionnelles. De fait ce n'est plus un fluide qui est simulé, mais le fluide observé à chaque instant. Nous verrons les implications peu après.



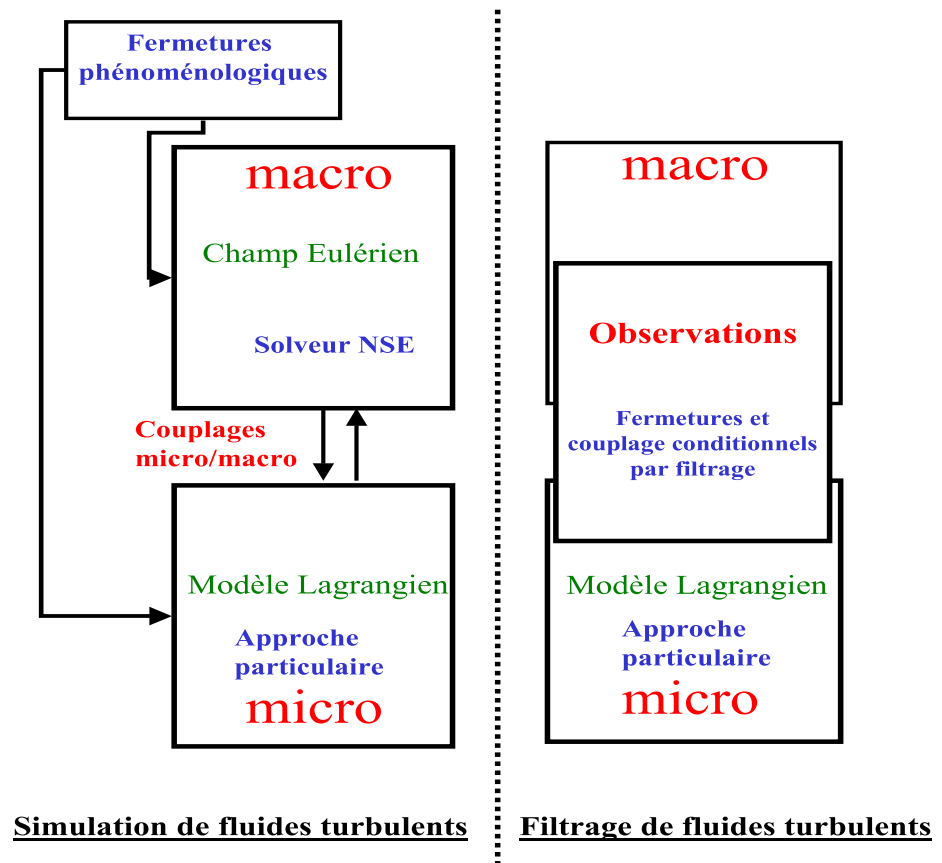


FIG. 8.1 – Couplage et Fermeture des échelles micro et macro dans le cas de la simulation et pour le filtrage des fluides turbulents

Les 2 paramètres  $\nabla_x \langle p \rangle_n$  et  $\varepsilon_n$  sont des commandes aléatoires et nous sommes dans la situation du filtrage d'un champ moyen comme traité dans la section 6.6 du chapitre 6 avec des lois conditionnelles du type  $Loi(X_n^2 | X_{[0,n]}^1, Y_{[0,n]})$ . On a vu alors que ces processus à champ moyen en terme de nombre de particules étaient coûteux à filtrer. Il est alors possible de réduire le nombre de ces systèmes de particules, en se dotant de modèles Markoviens pour les 2 commandes. La nature du modèle de Pope va nous le permettre. Nous détaillerons le problème de filtrage dans la section 8.2.

On repart du système discret 8.12 :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} = V_n - \nabla_x \langle p \rangle_n \Delta t + C_1 \frac{\varepsilon_n}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_n} \Delta W_n^V \end{cases}$$

On commence par définir l'incrément de vitesse discret  $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n$ .

On peut alors voir sur l'équation de la vitesse que l'espérance des incréments de vitesse va converger vers le gradient de pression moyenne. En effet pour le paramètre de régularisation tendant vers 0 on a :

$$\mathbb{E}[ V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n) ] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (8.14)$$

et puisque  $\nabla_x \langle p \rangle_n$  est indépendant du couple  $(X_n, V_n)$ , il vient :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}[ \Delta V_n ] = -\nabla_x \langle p \rangle_n \Delta t \quad (8.15)$$

La quantité  $-\nabla_x \langle p \rangle_n \Delta t$  vient du couplage avec l'échelle macro, elle est donc extérieure à la dynamique de  $(X_n, V_n)$ . On va la modéliser par l'espérance d'une variable aléatoire  $\alpha_n$  inconnue : on pose

$$\mathbb{E}[ \Delta V_n ] \stackrel{def}{=} \mathbb{E}[ \alpha_n ] \quad (8.16)$$

qui sera le premier terme de l'équation sur la vitesse.

Pour trouver un modèle concernant la quantité  $\varepsilon_n$  intervenant dans le terme quadratique, on revient à l'équation continue :

$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt + \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} [V_t - \Pi_t^\delta(V_t)(X_t)] dt + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} dW_t$$

On voit alors que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}[dV_t dV_t] = C_0 \cdot \varepsilon_t \cdot dt$ . On va utiliser cette remarque pour proposer de modéliser  $\varepsilon_n$  par l'espérance d'une nouvelle variable aléatoire encore notée  $\varepsilon_n$  et on pose :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n] \stackrel{def}{=} \frac{\mathbb{E}[\Delta V_n \Delta V_n]}{C_0 \Delta t} \quad (8.17)$$

Pour des pas de temps  $\Delta t$  et un paramètre de régularisation  $\delta$  suffisamment petits, les erreurs de modélisation seront faibles.

Le modèle de Pope discret et adapté que l'on va utiliser s'écrit alors

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} = V_n + \mathbb{E}(\alpha_n) + C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n)} \Delta W_n^V \end{cases} \quad (8.18)$$

On rappelle que le modèle recherché est valable pour la turbulence isotrope et que le taux de dissipation turbulent  $\varepsilon_n$  doit être un tenseur diagonal ce que respecte notre modèle. Il en va de même pour l'énergie cinétique turbulente  $k_n$ .

#### 8.1.4 Comportement du modèle de Pope adapté en régime laminaire

En écrivant cela on a profondément changé la nature du modèle de Pope, il perd de sa cohérence physique, notamment l'incompressibilité n'est plus assurée par le terme exact  $-\nabla_x \cdot p$ . Mais ce modèle est destiné à être utilisé dans un problème de filtrage, et les propriétés qui sont rompues vont être restaurées en observant et en apprenant les paramètres d'un fluide qui lui les a. C'est le conditionnement aux observations qui nous permet de garder cette cohérence. Nous l'explicitons au paragraphe 8.2.1.

Dans le processus de filtrage, les équations 8.16 et 8.17 sur les gradients de pression et le taux de dissipation turbulente sont des modèles de commande nous permettant de réduire le nombre de systèmes nécessaires pour l'approximation particulière des lois du filtre et du champ moyen, comme il a été vu au chapitre 6 section 6.6.

Avant d'aller plus loin, nous devons maintenant examiner le cas où  $k_n$  tend vers 0. On va trouver là une limite de validité du modèle de Pope avec l'apparition d'une transition entre le régime turbulent où le modèle est valide et le régime laminaire que l'on doit exclure.

En effet le terme qu'il faut contrôler quand  $k_n \rightarrow 0$  est

$$J_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \quad (8.19)$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} J_n &= C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \Delta t \\ &= C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{\mathbb{E}[\Delta V_{n+1} - \Delta V_n]^2} \frac{\mathbb{E}[\Delta V_{n+1} - \Delta V_n]^2}{\frac{1}{2}\mathbb{E}[(V_n - \mathbb{E}(V_n))^2]} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \Delta t \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\leq \frac{2.C_1}{C_0} \frac{\mathbb{E}[V_{n+1} - V_n - \mathbb{E}(V_n - V_{n-1})]^2}{\mathbb{E}[V_n - \mathbb{E}(V_n)]^2} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \quad (8.21)$$

ce qui donne finalement

$$J_n \leq \left[ \frac{\text{Var}(V_{n+1})}{\text{Var}(V_n)} + 1 \right] \cdot [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \quad (8.22)$$

donc quand la variance en vitesse tend vers 0 à l'instant  $n$  le modèle explose. Il s'agit d'une limite. Phénoménologiquement ce cas correspond à l'arrêt de la production de turbulence et au régime laminaire qui donne lui  $[V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \rightarrow 0$ . Il est difficile de lever cette indéterminée. On va donc considérer qu'en deçà d'un seuil d'agitation turbulente le modèle perd son sens et qu'il faut alors le remplacer par le modèle laminaire plus simple :

$$V_{n+1} = V_n + \mathbb{E}(\alpha_n) = V_n - \nabla_x \langle p \rangle_n \Delta t \quad (8.23)$$

Quoiqu'il en soit à la fois pour les contrôles des erreurs de discrétisation et du système particulière énoncées par le théorème 8.1.1 ou pour le contrôle du terme 8.19, il est nécessaire d'avoir une turbulence molle à l'échelle de l'échantillonnage, et le modèle sera lui-même avec des gradients assez lâches. Avec ce que l'on a vu sur l'échantillonnage d'une acquisition en 7.4 et 7.4.2 on peut penser que ces hypothèses seront toujours rencontrées dans nos expériences numériques.

D'autres conséquences sur la structure du modèle adapté vont apparaître lors du conditionnement aux observations. Nous détaillerons cela dans la section 8.2 consacrée au filtrage.

### 8.1.5 Simulations d'écoulements de fluides à l'aide du modèle de Pope discrétisé adapté

Suite à notre analyse, le système de Pope a été complètement remanié et il est loisible de se demander s'il représente toujours un modèle comportemental pour l'écoulement de fluide turbulent. Nous allons donc l'utiliser dans un emploi qui contredit nos remarques précédentes mais qui va nous permettre de vérifier son aptitude à produire un comportement pour un ensemble de particules proche de celui d'un fluide turbulent. Dans cet exercice pour tout pas de temps  $n$  de la simulation, on considère un ensemble de particules  $(X_n^i, V_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  qui vont évoluer conformément au système 8.18 dans un domaine rectangulaire de  $\mathbb{R}^2$ , c'est à dire que l'on va les conditionner à rester dans le domaine par une étape de sélection semblable à celle décrite section 8.2.3. La moyenne Eulérienne approchée intervenant dans 8.18,  $\Pi_n^\delta$  va être approchée selon une méthode de Monte-Carlo par l'ensemble des particules et on écrit :

$$\Pi_n^\delta(f)(X_n^i) \approx \Pi_n^{\delta,N}(f)(X_n^i) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(V_n^j) G^\delta(X_n^i - X_n^j)}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 \cdot G^\delta(X_n^i - X_n^k)} \quad (8.24)$$

avec  $G^\delta$  une gaussienne centrée de variance  $\delta$ . Comme noyau régularisant, il est également possible de choisir des splines, cubiques par exemple, mais en turbulence homogène avec des lois proches des gaussiennes, prendre un noyau de même nature nous a semblé plus pertinent. Dans la partie filtrage nous garderons cette idée en maintenant la nature gaussienne de la régularisation.

On l'a dit à plusieurs reprises,  $\mathbb{E}(\alpha_n)$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_n)$  jouent le rôle de commande. En les fixant on détermine l'ensemble de la dynamique. C'est ce fait que l'on utilise pour simuler un pseudo-écoulement fluide. Nous allons donner un champ de valeur pour chacune de ces 2 commandes, et nous allons simuler une évolution temporelle des particules, mais sans modifier la structure des  $\mathbb{E}(\alpha_n)$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_n)$ , ce que l'on devrait en toute logique faire pour simuler un véritable écoulement. Le champ de  $\mathbb{E}(\varepsilon_n)$  n'est pas vraiment conforme à la réalité, il devrait être moins lisse, mais il s'agit plus d'exemple numérique pour s'assurer que le modèle modifié garde une cohérence physique. En figeant les commandes on obtient des réalisations de trajectoires pour une dynamique stationnaire, ce que le physicien nomme turbulence figée. La figure 8.2 en haut montre les champs de vecteur gradient de pression et de taux de dissipation turbulente qui ont été utilisés.

La simulation est alors directe, l'interaction entre les particules se fait au travers de la moyenne Eulérienne. Nous n'avons pas pour cet exemple purement

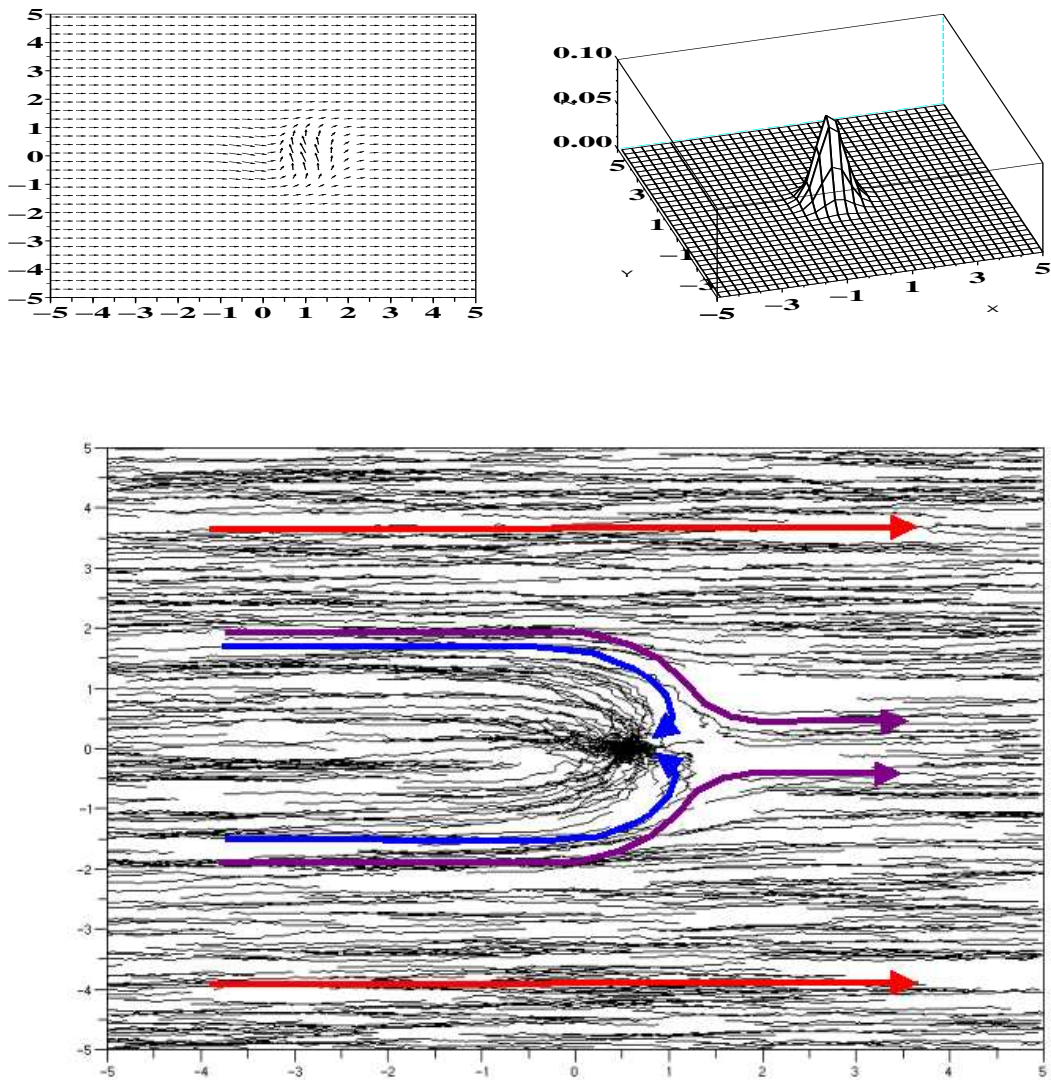


FIG. 8.2 – En bas, simulation des trajectoires d'un écoulement avec des commandes particulières. En haut à gauche le champ de gradient de la pression moyenne utilisé et à droite celui du taux de dissipation turbulente.

didactique gère les coïncidences. Sur la figure 8.2 sont tracées les trajectoires de 500 particules après 100 itérations. On peut voir que même sans réorganiser les champs  $\mathbb{E}(\alpha_n)$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_n)$  dans le temps apparaît l'ébauche d'une évolution tourbillonnaire telle que l'on s'attendait à la voir. La présence dans les commandes d'une zone de modification du gradient de pression conjoint à une augmentation de la dissipation turbulente génère cette amorce de vortex.

La seconde illustration est d'une autre nature. Nous avons cherché à modéliser l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle terminé par une ogive. En imposant des champs de commandes spécifiques on obtient la seconde simulation figurant sur l'illustration 8.3 pour 1000 particules et 100 itérations. C'est la forme du gradient de pression qui nous permet d'avoir la forme de l'écoulement.

Dans les 2 simulations les valeurs numériques de  $\mathbb{E}(\alpha_n)$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_n)$  ont été prises dans des gammes correspondantes aux écoulements atmosphériques. Ces illustrations n'ont d'autre but que de nous rassurer sur la capacité du modèle discret transformé à représenter une dynamique pouvant être celle du fluide.

## 8.2 Filtrage d'observations bruitées d'un fluide turbulent homogène

De notre étude sur le filtrage des processus à champ moyen au chapitre 6 et des propriétés sur les commandes du modèle de Pope que l'on vient de voir nous pouvons tirer des enseignements et proposer des algorithmes de filtrage. Le modèle 8.18 est du type équation de McKean-Vlasov à champ moyen et commande aléatoire, mettons cela en évidence.

Nous partons de

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} = V_n + \left[ \mathbb{E}(\alpha_n) / \Delta t + C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \right] \Delta t \\ \quad \quad \quad + \sqrt{C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n)} \Delta W_n^V \end{cases} \quad (8.25)$$

On pose alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{X}_n^1 = (\mathbb{E}(\alpha_n), \mathbb{E}(\varepsilon_n))$  et  $\mathcal{X}_n^2 = (X_n, V_n)$ . La loi de probabilité  $\Pi_n^\delta(V_n)(X_n)$  approche  $\mathbb{E}(V_n | X_n)$ . Mais dans un processus à commande

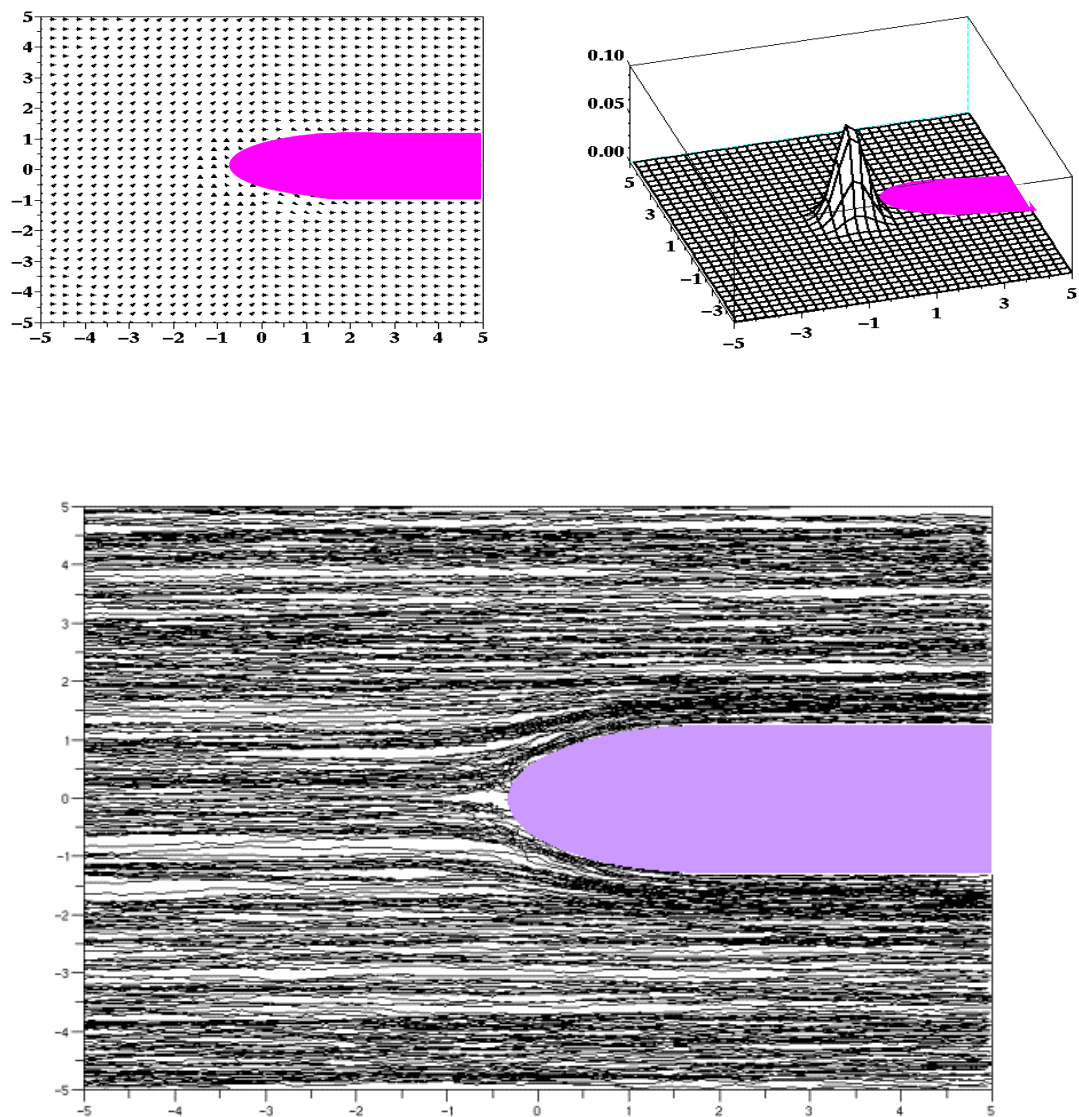


FIG. 8.3 – On simule les trajectoires d'un écoulement fluide lors du contournement d'un obstacle avec une forme choisie du gradient de pression et du taux de dissipation turbulente.



où la position du vecteur d'état  $\mathcal{X}_n^2$  à l'instant  $n$  dépend de la réalisation des commandes  $\mathcal{X}_0^1 \dots \mathcal{X}_n^1$ , il serait plus juste de considérer dans le champ moyen la loi de  $\mathcal{X}_n^2$  sachant  $\mathcal{X}_n^1$ . On note alors  $\pi_n = \text{loi}(\mathcal{X}_n^2 | \mathcal{X}_{[0,n]}^1)$ .

Toujours pour procéder à une analyse du modèle physique et lui donner un sens mathématique, les paramètres d'état  $\mathcal{X}_n^2$  ne peuvent être physiquement illimités. La vitesse d'un fluide est intrinsèquement bornée. Le modèle tel qu'écrit n'a pas cette finitude. La variable aléatoire peut prendre des valeurs infinies, rien ne limite la valeur de  $V_n$ , etc. Ce modèle n'est qu'une approximation mathématique de la réalité physique. On va faire le choix de prendre comme donnée du problème une fonction  $b$  Lipschitz bornée et l'on écrit alors le processus de dynamique au moyen de l'équation :

$$\mathcal{X}_{n+1}^2 = \mathcal{X}_n^2 + b(\mathcal{X}_n^1, \mathcal{X}_n^2, \pi_n) \Delta t + \sigma(\mathcal{X}_n^1) \Delta W_n \quad (8.26)$$

Afin de réaliser le couplage de 8.25 avec les observations, c'est à dire entre le système  $(X_n, V_n) \in (E \times E')$  et le système  $(V_n, Y_n) \in (E' \times E'')$ , on rajoute l'équation d'observation à valeurs dans  $E'' \subset \mathbb{R}^{d''}$ ,  $d'' \in \mathbb{N}$ , que l'on écrit de manière générique  $Y_n = H(\mathcal{X}_n) + \sigma^Y W_n^Y$  et on va résoudre le problème de filtrage permettant de trouver  $\text{Loi}(\mathcal{X}_n^2 | Y_{[0,n]})$  où  $Y_{[0,n]} = (Y_0, \dots, Y_n)$ .

Cette situation a été vue à la section 6.5 du chapitre 6. On sait donc qu'il existe une résolution particulière à ce problème de filtrage. Il nécessite soit une régularisation faible, un modèle Markovien pour  $X_n^1$  et 2 systèmes de particules avec au total  $N + d$  particules, soit en l'absence de modèle pour  $X_n^1$ ,  $d + 1$  systèmes d'un total de  $N \times d$  particules. Dans les 2 cas pour filtrer, il faut tirer au hasard des environnements, déduire les champs moyens associés puis les sélectionner par filtrage.

Avec les remarques faites sur le modèle de Pope, il est possible de se doter d'un modèle pour les commandes. En effet en adjoignant au système 8.25 les équations 8.16 et 8.17, on écrit un nouveau système sur lequel on va pouvoir travailler :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + \left[ \frac{\mathbb{E}(V_n - V_{n-1})}{\Delta t} + C_1 \frac{\mathbb{E}((V_n - V_{n-1})^2)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \right] \Delta t \\ &\quad + \sqrt{C_0 \mathbb{E}((V_n - V_{n-1})^2)} \Delta W_n^V \end{cases} \quad (8.27)$$

En posant cette fois pour tout instant  $n$  le vecteur d'état étendu

$$\mathcal{X}_n = (X_n, V_{n-1}, V_n)$$

et en notant  $\pi_n = \text{loi}(\mathcal{X}_n)$  on obtient l'équation de dynamique

$$\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_n + b(\mathcal{X}_n, \pi_n)\Delta t + \sigma(\mathcal{X}_n)\Delta W_n \quad (8.28)$$

avec les mêmes hypothèses sur  $b$  que pour le cas précédent pour rendre le problème réalisable.

Cette équation de dynamique nous ramène au problème de filtrage de la section 6.3. On dispose alors d'une solution particulière en 2 systèmes de  $N$  et  $d$  particules.

L'analyse du processus d'observation d'un champ le long d'un chemin nous conduit à considérer un problème différent et moins coûteux, en conditionnant le champ moyen de l'équation 8.28 et nous allons étudier son comportement. Le conditionnement correspond au couplage des systèmes d'acquisition Lagrangien et d'observation.

### 8.2.1 Conditionnement aux observations du système Lagrangien

Par le couplage des systèmes d'acquisition Lagrangien et d'observation, nous allons changer de modèle en conditionnant 8.28 aux observations. Le couplage est une méthode de fermeture, c'est une nouvelle approche, différente, que l'on propose, pour laquelle on espère pouvoir allier précision et performance. En effet le conditionnement comme vu au chapitre 6 diminue le nombre de particules nécessaires en exploitant et en apprenant l'information de grande échelle contenue dans les observations. La technique de conditionnement à un champ auxiliaire avait déjà été exploré par [Arnaud \*et al.\* \(2003\)](#) sur du filtrage d'image d'un champ bidimensionnel. Dans le chapitre 9 consacré aux applications sur des cas réels ou simulés, nous testerons notre méthode et la comparerons à la méthode plus classique décrite par le problème de filtrage associé à 8.28. En attendant présentons maintenant le conditionnement et ses implications.

Soit pour tout temps  $n \geq 0$  le système de dynamique :

$$\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_n + b(\mathcal{X}_n, \hat{\eta}_n)\Delta t + \sigma(\mathcal{X}_n)\Delta W_n \quad (8.29)$$

où  $\mathcal{X}_n = (X_n, V_{n-1}, V_n)$  est le signal fluide en champ moyen conditionnel et  $\hat{\eta}_n$  est la loi du filtre,  $\hat{\eta}_n = \text{loi}(\mathcal{X}_{[0,n]}|Y_{[0,n]})$ ,  $b$  et  $\sigma$  des fonctions avec les mêmes hypothèses

que plus haut. C'est le modèle stochastique que l'on se propose d'utiliser pour le filtrage d'un fluide.

On se donne les observations de vitesses bruitées  $Y_n = H(\mathcal{X}_n) + \sigma_n^Y W_n$ , et le problème de filtrage trajectoriel consistant à trouver la  $\mathcal{L}oi(\mathcal{X}_{[0,n]} | Y_{[0,n]})$ .

Le chapitre 6 section 6.4.2 nous permet alors de dire que la résolution particulière nécessite 1 système de  $N$  particules avec une erreur d'approximation proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . C'est un gain appréciable pour des applications devant tourner en temps réel.

Le système du fluide filtré associé s'écrit alors dans sa forme déployée :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + \mathbb{E}(\alpha_n | Y_0 \dots Y_n) \Delta t \\ &- C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)}{k_n} \left[ V_n - \frac{\int v G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right] \Delta t \\ &+ \sqrt{C_0 \mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)} \Delta W_n^V \\ Y_n &= H(V_n) + \sigma^Y W_n^Y \end{cases}$$

avec

$$k_n = \frac{1}{2} \int \left[ w - \frac{\int v G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right]^2 \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(z, w))$$

Lors de la résolution numérique du problème de filtrage à l'aide de particules, c'est ce système complet qui sera utilisé.  $\mathcal{X}_n$  est alors un processus de Markov conditionnel de loi de transition  $M_{n+1, \hat{\eta}_n}$  avec

$$M_{n+1, \hat{\eta}_n}((x, u), d(z, v)) = \mathbb{P}^{\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_0^n}(d(z, v) | (x, u))$$

Mais d'avoir changer le problème n'est pas sans conséquence sur la dynamique du signal fluide. Remarquons ici que l'on ne parle plus de vitesses d'un fluide, mais de signal fluide pour signifier la rupture avec le modèle physique.

## 8.2.2 Comportement du signal-fluide conditionnel

Par le conditionnement c'est-à-dire le couplage du modèle aux observations, la dynamique est fortement liée à celles-ci, et ses propriétés sont dépendantes de la qualité de la modélisation de l'équation d'observation. Considérant l'équation d'observation  $Y_n = H(V_n) + \sigma^Y W_n^Y$ , la variance des bruits d'observation  $\sigma^Y$  fournit en fait la résolution avec laquelle le signal fluide est vu.

Pour analyser ce comportement, il faut faire appel à la physique pour interpréter le terme central de l'équation de Pope  $\frac{\varepsilon_n}{k_n}[V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)]$ . Il est homogène à une force de frottement, où le coefficient de frottement dépend de l'énergie produite par la turbulence. C'est un terme de rappel à la moyenne, qui est dans l'équation de Pope, en compétition avec la partie Brownienne  $\sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_n} \Delta W_n$  dont la variance dépend du taux de dissipation de la turbulence. Le frottement produit est celui des éléments de fluide sur les structures générées par la turbulence (frottement du fluide sur lui-même). En régime laminaire, ce terme de frottement est faible. En revanche plus la turbulence est sévère, plus cette quantité grandit.

Pour une variance faible,  $\sigma^Y \sim 0$ , l'observation est quasiment parfaite. Dans ce cas pour tout temps  $n \geq 0$ , par l'observation  $Y_n$  on a accès directement à  $\mathbb{E}(V_n | Y_{[0,n]})$ . Le terme de frottement est alors nul, c'est à dire que l'écoulement est laminaire.

Pour comprendre qu'en observation parfaite de la turbulence, le modèle voit un écoulement laminaire, il faut revenir sur l'échantillonnage des acquisitions continues. Effectivement dans notre cas, une mesure ponctuelle discrète sur un fluide est une acquisition d'un champ multidimensionnel à laquelle un bruit a été ajouté. On a vu à la section 7.4 que l'acquisition discrète ne permet d'accéder qu'au champ d'échelles filtrées c'est à dire sans les structures les plus petites. A la résolution maximale on ne voit pas la turbulence des échelles filtrées, les éléments fluides ont un comportement laminaire.

En observation parfaite, on obtient les équations du fluide :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + \alpha_n \Delta t + \sqrt{C_0 \varepsilon_n} \Delta W_n^V \end{cases}$$

Quand le bruit de mesure grandit, il devient difficile de séparer le signal issu du champ d'échelle filtré du bruit lui-même. On est donc obligé de prendre en compte des structures de plus en plus fines. Pour  $\sigma^Y \gg 0$ , on se trouve dans un problème de résolution faible, on doit faire intervenir toutes les échelles des petites structures, pour à la fin sans les observations prendre toutes les structures sans filtrage d'échelle.

Nous n'aborderons pas le problème assez ardu de l'observabilité locale du système que l'on vient de décrire (lire [Bashirov \(2003\)](#)). Il semble seulement que

celui-ci se comporte au moins localement de manière correcte. Mais ce point mériterait un travail plus attentif.

### 8.2.3 Localisation du processus de filtrage comme acquisition d'une dynamique Lagrangienne

Les paragraphes précédents ont permis de décrire le couplage entre les systèmes d'acquisition Lagrangien et de l'observation. Nous en avons tiré les conséquences tant mathématiques, que physique et proposé un algorithme d'estimation. Il nous reste alors à terminer le couplage en astreignant le système à évoluer le long de la trajectoire du capteur de mesure. Le milieu est localement homogène, on utilise alors la méthode proposée en 7.2 qui est adaptée ici.

Quel que soit  $n \geq 0$ , le système Lagrangien  $(X_n, V_n)$  joint aux observations  $Y_n$  évolue selon  $M_{n+1, \hat{\eta}_n}$  avec une sélection  $S_{n, \eta_n}$  donnée par le potentiel  $G_n$  relie aux observations.

Le capteur a une trajectoire dans l'espace des sites  $E$  qui est donnée par la séquence  $(Z_n)_{n \in [0, T]} \in E$  et pour chaque pas de temps on dispose de boule centrées sur  $Z_n$  et de rayon  $R_n$ . Les rayons sont supposés connus ou déterminables en tout temps. On aura dans le chapitre consacré aux applications numériques une discussion sur le sens physique et les moyens de donner ces rayons.

Ainsi la séquence algorithmique pour le vecteur d'état partant de  $(X_0, V_0)$  distribué selon  $\hat{\eta}_0^{B_0}$  qui est donnée par le schéma temporel :

$$(X_{n-1}, V_{n-1}) \xrightarrow{\text{Sélection}} (\hat{X}_{n-1}, \hat{V}_{n-1}) \xrightarrow{\text{Mutation}} (X_n, V_n) \quad (8.30)$$

est complétée pour évoluer dans le système de boules associé à la trajectoire  $(Z_0, \dots, Z_n)$  :

$$(X_{n-1}^{B_{n-1}}, V_{n-1}^{B_{n-1}}) \xrightarrow{\text{Sélection d'observation}} (\hat{X}_{n-1}^{B_{n-1}}, \hat{V}_{n-1}^{B_{n-1}}) \\ \xrightarrow{\text{Mutation}} (\tilde{X}_n, \tilde{V}_n) \xrightarrow{\text{Sélection dans la boule } B_n} (X_n^{B_n}, V_n^{B_n})$$

On considère alors les 2 mesures de probabilité relatives à ce problème pour tout  $n \geq 0$  et  $f$  mesurable bornée :

$$\hat{\eta}_n^{B_n}(f) = \mathbb{E}[f(X_n, V_n) \mid Y_0, \dots, Y_n, X_0 \in B(Z_0), \dots, X_n \in B(Z_n)] \quad (8.31)$$

$$\eta_n^{B_{n-1}}(f) = \mathbb{E}[f(X_n, V_n) \mid Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_0 \in B(Z_0), \dots, X_{n-1} \in B(Z_{n-1})] \quad (8.32)$$

En terme d'évolution des lois, l'algorithme sur les vecteurs d'état est en fait la traduction des couplages de la dynamique aux observations et à la trajectoire du capteur. On part de  $\hat{\eta}_0^{B_0}(d(x, x')) = \mathbb{P}((X_0, V_0) \in d(x, x') | X_0 \in B_0(Z_0))$  et on a :

$$\tilde{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}} \xrightarrow{n-1, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}} \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}} \xrightarrow{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}} \eta_n^{B_{n-1}} \xrightarrow{n, \eta_n^{B_{n-1}}} \tilde{\eta}_n^{B_n} \quad (8.33)$$

avec

$$\begin{aligned} S_{n, \eta_n^{B_{n-1}}}^{B_n}((x, x'), d(z, z')) = \\ \mathbb{1}_{B_n \times E'}(x, x') \delta_{(x, x')}(d(z, z')) + [1 - \mathbb{1}_{B_n \times E'}(x, x')] \psi_n^B(d(z, z')) \end{aligned} \quad (8.34)$$

où  $\psi_n^B$  est la loi de redistribution dans  $B_n$  selon le prédicteur calculé à l'étape intermédiaire. La fonction de Boltzmann-Gibbs  $\psi_n^B$  s'exprime pour tout temps où  $\eta_n^{B_{n-1}}(\mathbb{1}_{B_n \times E'}) > 0$  :

$$\psi_n^B(d(z, z')) = \frac{\mathbb{1}_{B_n \times E'}(z, z') \eta_n^{B_{n-1}}(d(z, z'))}{\eta_n^{B_{n-1}}(\mathbb{1}_{B_n \times E'})} \quad (8.35)$$

Le potentiel peut s'annuler, mais avant toute chose il faut réinterpréter les processus de sélection.

En effet on note que  $\mathbb{E}(f(X_n, V_n) | X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n, Y_0, \dots, Y_n)$  est proportionnel à

$$\mathbb{E}(f(X_n, V_n) \prod_{p=0}^n \mathbb{1}_{B_p}(X_p) \prod_{p=0}^n G_p(V_p))$$

On a donc affaire à une sélection avec un potentiel double

$$G'_n(X_n, V_n) = \mathbb{1}_{B_n}(X_n) \times G_n(V_n) \quad (8.36)$$

Le couplage au chemin d'acquisition se fait cette fois sur la sélection avec un double potentiel alors que le premier couplage aux observations se faisait au niveau du modèle Markovien.

Le nouveau potentiel  $G'_n$  souffre de possibles annulations. Pour assurer la non-nullité comme au chapitre 7 il faut modifier les noyaux pour rendre l'ensemble Markovien. On suppose que tout pas de temps  $n \geq 0$  et tout couple  $(x, x') \in (E, E')$  on ait  $M_{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}}(G'_n)(x, x') > 0$  et on normalise comme suit :

$$\tilde{M}_{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}}((x, x'), d(y, y')) = \frac{M_{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}}((x, x'), d(y, y')) G'_n(y, y')}{M_{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}}(G'_n)(x, x')} \quad (8.37)$$

et

$$\tilde{G}_{n-1}(x, x') = M_{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}}(G'_n)(x, x') \quad (8.38)$$

Avec la renormalisation on obtient le schéma d'évolution en loi partant de  $\hat{\chi}_0^{B_0} = \hat{\eta}_0^{B_0}$  :

$$\underbrace{\hat{\chi}_{n-1}^{B_{n-1}}}_{\hookrightarrow \text{utilisant } Y_{n-1, B_{n-1}}} \xrightarrow{\tilde{M}_{n, \hat{\eta}_{n-1}^{B_{n-1}}}} \underbrace{\chi_n^{B_n}}_{\hookrightarrow \text{utilisant } Y_{n-1, B_n}} \xrightarrow{\tilde{S}_{n, \chi_n^{B_n}}} \underbrace{\hat{\chi}_n^{B_n}}_{\hookrightarrow \text{utilisant } Y_n, B_n} \quad (8.39)$$

où  $\chi_n^{B_n}$  est la loi du prédicteur pour le processus contraint à vivre dans les boules  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  et la loi du filtre associé est notée  $\hat{\chi}_n^{B_n}$ . Pour ces lois le noyau de sélection associé s'écrit

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{n, \chi_n^{B_n}}((x, x'), d(y, y')) \\ &= \tilde{G}_n(x, x') \delta_{(x, x')} (d(y, y')) + [1 - \tilde{G}_n(x, x')] \frac{\tilde{G}_n(y, y') \chi_n^{B_n}(d(y, y'))}{\chi_n^{B_n}(\tilde{G}_n)} \end{aligned} \quad (8.40)$$

Cette fois la description de l'algorithme est complète et on a réalisé la fusion des 3 systèmes d'acquisition Lagrangien, d'observation et le long du chemin du capteur. On peut envisager l'estimation particulière des lois de probabilités impliquées qui nous donnera la résolution numérique du filtre que l'on vient d'écrire pour les fluides.

### 8.3 Résolution particulière du filtre adapté aux fluides turbulents

Le filtre non-linéaire que l'on vient de décrire en terme de distribution de probabilité de Feynman-Kac est optimal, avec une étape de prédiction et une étape de mise à jour. Mais il n'est pas calculable analytiquement et sera approché par des systèmes de particules en interaction qui vont évoluer suivant les étapes de Mutation puis de Sélection. La sélection sera trajectorielle.

La convergence des méthodes particulières pour ce type de filtre se fait par arbres généalogiques et sur les lignes ancestrales. On peut lire le chapitre 5 et 6 de ce mémoire ou le livre de Pierre Del Moral (2004) et on a, écrit de manière abusives,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\text{lignes ancestrales}^{(i)}} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_n)$$

Pour compléter cela l'analyse d'erreur a été faite pour les processus d'acquisition discrets au chapitre 7

Pour le cas général, d'un point de vue théorique les présentations ont donc été faites, nous ne détaillons ici que la mise en application pour un filtrage des mesures faites sur un fluide turbulent au moyen de systèmes de particules en interaction. Cette description conduit finalement à l'algorithme du filtrage qui nous permettra au chapitre dernier de traiter les problèmes numériques.

Les schémas d'évolution associés aux distributions de Feynman-Kac sont itératifs permettant un algorithme d'estimation récursif.

C'est un problème de filtrage où l'on dispose pour tout temps  $n \geq 0$  des observations de  $V_n$ , de la position  $Z_n$  du capteur et de boules  $B_n = B(Z_n, R_n)$  où  $R_n > 0$  est un rayon connu ou fixé par la situation physique. Le problème du filtrage proprement dit consiste alors à trouver la  $\mathcal{L}oi(X_{[0,n]} | Y_{[0,n]}, X_{[0,n]} \in B_{[0,n]})$ . Le pas de temps est noté  $\Delta t > 0$

A l'étape initiale on distribue  $N$  particules selon la loi  $\eta_0$  connue a priori ou à défaut autour de  $Y_0$  selon la loi de probabilité du bruit de mesure pour  $V_0$  et selon une gaussienne centrée de variance  $\sigma_0$  pour  $X_0$ . Il conviendrait dans cette seconde situation d'étudier la stabilité de l'algorithme.

On obtient  $N$  couples de particules  $\mathcal{X}_0^i = (X_0^i, V_0^i)_{1 \leq i \leq N}$  que l'on conditionne à la boule  $B_0$  par une redistribution des particules de positions extérieures à  $B_0$  à l'intérieur.

On se place ensuite à la  $n$ -ième itération. On dispose alors de  $N$  couples  $\mathcal{X}_n^i = (X_n^i, V_n^i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  situés dans la boule  $B_n$  approchant empiriquement la loi  $\eta_n^{B_n}$ . L'étape de sélection  $\mathcal{X}_n^i = (X_n^i, V_n^i) \xrightarrow{\text{Sélection}} \hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i)$  utilise le noyau

$$G_n(X_n^i, V_n^i) = e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(Y_n - H(V_n^i))^2}$$



On a choisi une sélection génétique du type

$$S_{n,\eta_n^{B_n,N}}((x, x'), d(z, z')) = G_n(x, x')\delta_{x,x'}(z, z') + [1 - G_n(z, z')] \frac{G_n(z, z')\eta_n^{B_n,N}(d(z, z'))}{\eta_n^{B_n,N}(G_n)}$$

c'est-à-dire que l'on garde  $(X_n^i, V_n^i)$  avec la probabilité  $G_n(X_n^i, V_n^i)$  et on « redistribue sur le paquet » avec  $(1 - G_n(X_n^i, V_n^i))$  selon

$$\psi_n\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{(X_n^j, V_n^j)}\right) = \sum_{j=1}^N \frac{G_n(X_n^j, V_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(X_n^k, V_n^k)} \delta_{(X_n^j, V_n^j)}$$

Après cette sélection le système de particules contient celles qui correspondent au mieux à la dynamique du fluide observé. Qui plus est, la sélection s'est faite sur la trajectoire. Avec l'ensemble des trajectoires, on peut donner une estimation des paramètres non observés du modèle de dynamique.

En premier lieu on calcule les paramètres locaux de grandes échelles que l'on déduit des moyennes sur les incréments :  $\mathbb{E}(\alpha_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n)$  que l'on notera  $\hat{A}_n$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n)$  que l'on notera  $\hat{E}_n$ .

Ces espérances sont approchées par des moyennes empiriques sur les incréments de vitesses des particules sélectionnées :

$$\hat{A}_n^N = \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{V}_n^i - \hat{V}_{n-1}^i] \quad (8.41)$$

$$\hat{E}_n^N = \frac{\Delta t}{N \cdot C_0} \sum_{i=1}^N [\hat{V}_n^i - \hat{V}_{n-1}^i] \cdot [\hat{V}_n^i - \hat{V}_{n-1}^i] \quad (8.42)$$

Il faut remarquer que les écarts de vitesses  $V_n^i - V_{n-1}^i$  doivent être multipliés par le pas de temps  $\Delta t$  pour donner des incréments, d'où l'apparition du  $\Delta t$  au numérateur des fractions devant le signe somme. Toutes les particules du système utilisent ces 2 commandes.

Ensuite pour chaque particule il faut donner la vitesse moyenne locale propre approchée par l'espérance régularisée  $\Pi_n^\delta$  que l'on calcule de manière empirique. Cette vitesse moyenne dépend des autres particules et de leurs positions relatives :

$$\Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{V}_n^i)(\hat{X}_n^i) = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{V}_n^j G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^j)}{\sum_{k=1}^N G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^k)} \quad (8.43)$$

On calcule de la même manière l'énergie cinétique turbulente propre à chaque particule :

$$\hat{k}_n^i = \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=1}^N [\hat{V}_n^j - \Pi_n^{\delta,N}(\hat{V}_n^i)(\hat{X}_n^i)]^2 G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^j)}{\sum_{k=1}^N G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^k)} \quad (8.44)$$

Munit des paramètres locaux que l'on vient de déduire, l'étape de mutation utilise le modèle de signal fluide en champ moyen conditionné aux observations et à l'acquisition,  $\hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i) \xrightarrow{\text{selon } M_{n+1, \hat{\eta}_n^{B_n, N}}} \tilde{\mathcal{X}}_{n+1}^i = (\tilde{X}_{n+1}^i, \tilde{V}_{n+1}^i) :$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_{n+1}^i = \hat{X}_n^i + \hat{V}_n^i \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^{X,i} \\ \tilde{V}_{n+1}^i = \hat{V}_n^i + \hat{A}_n^N - C_1 \frac{\hat{E}_n^N}{\hat{k}_n^i} [\hat{V}_n^i - \Pi_n^{\delta, i, N}(\hat{V}_n^i)(\hat{X}_n^i)] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0 \hat{E}_n^N} \Delta W_n^{V,i} \end{array} \right. \quad (8.45)$$

Cette mutation nous amène à l'étape  $n + 1$  mais le déplacement n'est pas contraint au point d'acquisition suivant. Il faut localiser autour de la position suivante sur le chemin d'acquisition. Cette localisation est une sélection où l'on garde les particules déjà présentes dans  $B_{n+1}$ , de rayon  $R_{n+1}$  et on redistribue selon  $\hat{\eta}_{n+1}^{B_n, N}$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}_{n+1}^i = (\tilde{X}_{n+1}^i, \tilde{V}_{n+1}^i) \xrightarrow{\text{selon } S_{n+1, \hat{\eta}_{n+1}^{B_n, N}}} \mathcal{X}_{n+1}^i = (X_{n+1}^i, V_{n+1}^i)$ , et l'ensemble des particules  $(X_{n+1}^i, V_{n+1}^i)$  se trouvent dans  $B_{n+1}$ .

Il faut naturellement que les points centres des boules sur le chemin d'acquisition soient suffisamment rapprochés, c'est à dire que la fréquence d'échantillonnage du système d'observations soit élevée. C'est une condition nécessaire à la non-extinction de l'algorithme d'estimation.

Dans la situation d'un fluide homogène isotrope, l'algorithme que l'on vient de décrire est complet. Il sera mis en application dans le cas de fluides simulés ou réels pour des écoulements uni ou bidimensionnels en 9.1, 9.2 ou 9.3.

Pour des mesures dans l'atmosphère qui à l'échelle de la turbulence est fondamentalement un écoulement tridimensionnel, il est nécessaire de modifier le modèle de dynamique pour lui rendre des caractéristiques compatibles avec le fluide géophysique.

## 8.4 Adaptation d'un modèle de turbulence stratifié pour les mesures atmosphériques

L'atmosphère est un fluide gazeux et l'on va considérer ici que l'on ne parle que d'écoulement en air sec. On occulte volontairement la présence d'eau sous forme de vapeur ou de gouttelettes ou tout autre composé chimique réactant ou

passif et d'aérosols. La prise en compte de ces caractéristiques pourra faire l'objet d'améliorations successives du filtre que l'on présente maintenant.

La dynamique du fluide atmosphérique est caractérisée par l'existence de forces de flottaison et de gradients verticaux de vitesses et de températures. Pour un écoulement en dimension 3, il faut donc, outre les vitesses, modéliser des niveaux de températures. En ce qui concerne l'observation il sera alors utile de compléter la mesure de la vitesse du fluide par une mesure de la température. On expose en premier lieu un modèle Lagrangien de turbulence stratifié prévu pour simuler la dispersion des éléments infinitésimaux d'un fluide.

### 8.4.1 Modèle Lagrangien de dispersion de Das et Durbin pour un régime de turbulence stratifiée

Le modèle Lagrangien de turbulence stratifiée proposé par [Das et Durbin \(2005\)](#) pour la dispersion de composants passifs est une amélioration des modèles de Pope, avec l'utilisation d'une équation supplémentaire sur la température, un couplage entre les équations et l'ajout d'un terme correspondant aux propriétés de flottabilité des fluides. Partant d'une équation de Langevin identique à [3.5](#) les auteurs cherchent à mettre en forme des modèles Lagrangiens prenant en compte les effets de stratification induit par la flottabilité d'un fluide turbulent pesant et proposent des fermetures linéaires du second ordre. Ils obtiennent un jeu d'EDS de type Itô pour lesquels ils ajustent les constantes ou les paramètres liants les équations.

Présentons leur modèle en utilisant les systèmes d'acquisition Lagrangien. C'est une représentation physique, on doit supposer que toutes les quantités possèdent les régularités suffisantes, sont différentiables quand il le faut, et ne s'annulent pas quand elles se trouvent aux dénominateurs.

Soit  $Q_{t,x}$  un champ de vecteur dans l'espace des phases  $E'$  et un champ de vitesses  $U_{t,x} \in \mathcal{D} \subset E'$ .  $U_{t,x}$  peut être au besoin une partie des coordonnées de  $Q_{t,x}$ . On considère  $X_t^{x_0} \in E \subset \mathbb{R}^3$  le flot Lagrangien partant de  $x_0 \in E$ . On dispose alors de 2 systèmes d'acquisition, le premier  $(X_t^{x_0}, U_{t,x})$  fournit la vitesse Lagrangienne  $V_t = U_{t,X_t^{x_0}}$  et le second  $(X_t^{x_0}, Q_{t,x})$  donne le processus d'acquisition Lagrangienne  $Q_t$ . On note  $\tilde{q}_t$  la fluctuation de  $Q_t$  à la moyenne Eulérienne  $\langle Q \rangle_{t,x}$ .

On note alors la composante horizontale de la vitesse Lagrangienne du fluide

$V_t^h = U_{t, X_t^{x_0}}^h$ , la composante verticale  $W_t$  et l'acquisition Lagrangienne  $\Theta_t$  du champ de température  $\theta_{t,x}$ .

Les modèles de Das et Durbin sont relatifs aux fluctuations de ces grandeurs Lagrangiennes ( $V_t^h, W_t, \Theta_t$ ). Il est nécessaire d'introduire un certain nombre d'objets. Soient  $E'^h$  le sous-espace des vitesses horizontales, sous-ensemble de  $E'$ ,  $E'^W \subset E'$  le sous espace des vitesses verticales et  $E'^\Theta \subset E'$  le sous-espace des températures avec in fine  $E' = E'^h \oplus E'^W \oplus E'^\Theta$ .

On considère 3 processus de Wiener :  $B^h$  à valeurs dans  $E'^h$ ,  $B^W$  à valeurs dans  $E'^W$  et  $B^\theta$  dans  $E'^\Theta$ .

Le taux de dissipation turbulente reste noté  $\varepsilon_t$  et l'énergie cinétique turbulente  $k_t$  et leurs définitions sont identiques à celles introduites au chapitre 3.

Nous définissons le coefficient de flottabilité  $\beta_t$  par  $\beta_t = \frac{1}{\langle \theta \rangle_{t, X_t^{x_0}}}$ , la température est toujours strictement positive, et enfin la constante de pesanteur  $g$  qui n'est portée que par la composante verticale de la vitesse du fluide.

Le modèle de Das et Durbin s'écrit alors

$$\begin{cases} d\tilde{v}_t^h &= -\frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} \tilde{v}_t^h dt + (C_{2\theta} - 1) \tilde{w}_t \frac{d\langle V^h \rangle}{dz} dt + (C_0 \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^h \\ d\tilde{w} &= -\frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} \tilde{w}_t dt + (1 - C_{5\theta}) \beta_t g \tilde{\theta}_t dt + (C_0 \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W \\ d\tilde{\theta}_t &= -(C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}) \frac{\varepsilon_t}{k_t} \tilde{\theta}_t dt - \tilde{w}_t \frac{d\langle \Theta \rangle}{dz} dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta \end{cases} \quad (8.46)$$

où  $\langle V^h \rangle = \langle U^h \rangle_{t, X_t^{x_0}}$ ,  $\langle \Theta \rangle = \langle \theta \rangle_{t, X_t^{x_0}}$ . Des constantes ont été ajustées expérimentalement, ainsi  $C_{2\theta} = 0.6$  et  $C_{5\theta} = 1/3$ .

Ici  $C_0$  n'est plus la constante de Kolmogorov mais un paramètre calculé par

$$C_0 = \frac{2}{3} \left( C_1 - C_2 \frac{\langle \tilde{v}^h \tilde{w} \rangle}{\varepsilon_t} \frac{d\langle V^h \rangle}{dz} + C_5 \frac{\beta_t g}{\varepsilon} \langle \tilde{w} \tilde{\theta} \rangle - 1 \right) \quad (8.47)$$

avec  $\langle \tilde{v}^h \tilde{w} \rangle$  la moyenne Eulérienne du produit des fluctuations Lagrangiennes de  $V_t^h$  et  $W_t$  et  $\langle \tilde{w} \tilde{\theta} \rangle$  celle pour  $W_t$  et  $\Theta_t$ .  $C_2, C_5$  sont des constantes calibrées à  $C_2 = 0.6$  et  $C_5 = 1/3$ .

$C_1$  et  $C_{1\theta}$  sont réglées par

$$C_1 = \max \left( 1.8, 1 + C_2 \frac{\langle \tilde{v}^h \tilde{w} \rangle}{\varepsilon_t} \frac{d\langle V^h \rangle}{dz} - C_5 \frac{\beta_t g}{\varepsilon} \langle \tilde{w} \tilde{\theta} \rangle \right) \quad (8.48)$$

$$C_\theta = \max \left( 2.5, \frac{1}{2} (C_1 + R) \right) \quad (8.49)$$

Le terme  $C_\theta$  est donné lui par :

$$C_\theta = \frac{\varepsilon_t}{k_t} (2C_{1\theta} - C_1 - R) \langle \tilde{\theta}^2 \rangle \quad (8.50)$$

avec  $\langle \tilde{\theta}^2 \rangle$  la moyenne Eulérienne du carré de la fluctuation Lagrangienne de température et  $R = 1.5$ .

On renvoie à l'article de [Das et Durbin \(2005\)](#) pour éclairer la signification de l'ensemble des paramètres et des constantes choisies. On y trouvera également une discussion sur l'apport de leur modèle par rapport aux modèles antérieurs.

Pour notre part nous allons déduire de 8.46 un modèle Lagrangien stratifié que l'on pourra adapter au problème du filtrage.

### 8.4.2 Modèle Lagrangien de turbulence déduit pour l'atmosphère sèche

Par une simple lecture des termes des équations de dynamique, il est à noter que le modèle de Das et Durbin est très proche du modèle Lagrangien de Pope pour la turbulence homogène isotrope, seuls ont été rajoutés des couplages avec les vitesses verticales pour les composantes horizontales, le couplage avec la température pour la vitesse verticale et une équation diagnostique pour la température sous forme d'un processus d'Itô couplé à la vitesse verticale.

On va donc reprendre une partie du travail fait sur l'adaptation du modèle de Pope simplifié. Notre modèle donnera l'évolution non pas des fluctuations mais du quadruplet d'état  $(X_t, V_t^h, W_t, \Theta_t)$ . On réécrit donc les fluctuations comme la différence entre la quantité Lagrangienne et la moyenne Eulérienne. Pour se rapprocher du travail de S.B. Pope, on réintroduit sur la composante horizontale le gradient de pression horizontal  $\nabla_h \langle p \rangle$  qui donne le mouvement moyen. On note temporairement  $d \langle W \rangle$  et  $d \langle \theta \rangle$  les différentielles qui vont être estimés de la même manière que le gradient de pression dans le modèle simple par des moyennes d'incrément des vitesses et de la température. Notre modèle Lagrangien pour la turbulence stratifié s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
dX_t = V_t dt + \sigma^X dB_t^X \\
dV_t^h = -\nabla_h \langle p \rangle dt - \frac{C_1 \varepsilon_t}{2 k_t} (V_t^h - \langle V^h \rangle) dt \\
\quad + (C_{2\theta} - 1) (W_t - \langle W \rangle) \frac{d\langle V^h \rangle}{dz} dt + (C_0 \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h} \\
dW_t = d\langle W \rangle - \frac{C_1 \varepsilon_t}{2 k_t} (W_t - \langle W \rangle) dt \\
\quad + (1 - C_{5\theta}) \beta g (\Theta_t - \langle \Theta \rangle) dt + (C_0 \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W \\
d\Theta_t = d\langle \Theta \rangle - (C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (\Theta_t - \langle \Theta \rangle) dt \\
\quad - (W_t - \langle W \rangle) \frac{d\langle \Theta \rangle}{dz} dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta \\
X_0 = x_0 \\
V_0 = v_0, \quad W_0 = w_0 \\
\Theta_0 = \theta_0
\end{array} \right. \quad (8.51)$$

où l'on a noté  $X_t$  la position de l'élément du fluide partie de  $x_0$  et la vitesse Lagrangienne totale  $V_t = (V_t^h, W_t)$ .

Comme précédemment, les 2 quantités  $\varepsilon_t$  et  $C_\theta$  vont être approchées par des moyennes sur les carrés des incréments en apprenant les caractéristiques du fluide.

Il s'agit d'une première adaptation de ce que Das et Durbin ont écrit. On va se permettre quelques simplifications, d'abord en rendant constant un certain nombre de paramètres.

$C_0$  redevient la constante universelle de Kolmogorov avec  $C_0 = 2.1$ . Utilisant le travail de Das et Durbin et les ajustements expérimentaux qu'ils ont montrés, on choisit de prendre  $C_1 = 1.8$ ,  $C_5 = 1/3$ ,  $C_{1\theta} = 2.5$ ,  $C_{2\theta} = 0.6$  et  $C_{5\theta} = 1/3$ .

En second lieu, les moyennes Eulériennes sont approchées par l'opérateur de moyenne que l'on a construit  $\Pi_t^\delta$ .

Le coefficient de flottabilité  $\beta_t$  est lui approché directement par l'inverse de la température moyenne locale  $\Pi_t^\delta(\Theta_t)(X_t)$ ,  $\beta_t = \frac{1}{\Pi_t^\delta(\Theta_t)(X_t)}$ .

Il reste des paramètres cachés à l'observation directe, les gradients verticaux que l'on note par  $\Gamma_t^h = \frac{d\langle V^h \rangle}{dz}$  et  $\Gamma_t^\theta = \frac{d\langle \Theta \rangle}{dz}$ , où  $z$  signe la dimension verticale. Le filtre sera chargé de les apprendre, nous détaillons cela paragraphe 8.4.3.

Le modèle, bien que plus touffu, fait toujours partie de la classe des équations de McKean-Vlasov à champ moyen. Sa discrétisation se fait également par un schéma d'Euler explicite.

On peut écrire le système total en utilisant des notations déjà utilisées :

$$\begin{aligned} A_n^h &= \mathbb{E}[V_n^h - V_{n-1}^h] & E_n^h &= \frac{\mathbb{E}[V_n^h - V_{n-1}^h]^2}{C_0 \Delta t} \\ A_n^W &= \mathbb{E}[W_n - W_{n-1}] & E_n^W &= \frac{\mathbb{E}[W_n - W_{n-1}]^2}{C_0 \Delta t} \\ A_n^\theta &= \mathbb{E}[\Theta_n - \Theta_{n-1}] & C_\theta &= \frac{\mathbb{E}[\Theta_n - \Theta_{n-1}]^2}{C_0 \Delta t} \end{aligned}$$

On choisit de modéliser et de définir les énergies cinétiques turbulentes pour l'horizontale et pour la verticale de manière différente pour rendre compte du caractère stratifié :  $k_n^h = \frac{1}{2} \Pi_n^\delta ([V_n^h - \Pi_n^\delta(V_n^h)]^2)(X_n)$  et  $k_n^W = \frac{1}{2} \Pi_n^\delta ([W_n - \Pi_n^\delta(W_n)]^2)(X_n)$ .

Pour l'équation sur la température on choisit d'utiliser les modules des  $k_n^2 = (k_n^h)^2 + (k_n^W)^2$  et des  $E_n^2 = (E_n^h)^2 + (E_n^W)^2$ .

Munit de ces différentes modélisations, le système de dynamique est régi par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma^X \Delta B_n^X \\ V_{n+1}^h = V_n^h + A_n^h - \frac{C_1}{2} \frac{E_n^h}{k_n^h} [V_n^h - \Pi_n^\delta(V_n^h)(X_n)] \Delta t \\ \quad + (C_{2\theta} - 1) [W_n - \Pi_n^\delta(W_n)(X_n)] \Gamma_n^h \Delta t + (C_0 E_n^h)^{\frac{1}{2}} \Delta B_n^h \\ W_{n+1} = W_n + A_n^W - \frac{C_1}{2} \frac{E_n^W}{k_n^W} [W_n - \Pi_n^\delta(W_n)(X_n)] \Delta t \\ \quad + (1 - C_{5\theta}) \beta_n g [\Theta_n - \Pi_n^\delta(\Theta_n)(X_n)] \Delta t + (C_0 E_n^W)^{\frac{1}{2}} \Delta B_n^W \\ \Theta_{n+1} = \Theta_n + A_n^\theta - (C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}) \frac{E_n^\theta}{k_n^\theta} [\Theta_n - \Pi_n^\delta(\Theta_n)(X_n)] \Delta t \\ \quad - [W_n - \Pi_n^\delta(W_n)(X_n)] \Gamma_n^\theta \Delta t + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} \Delta B_n^\theta \\ X_0 = x_0 \\ V_0^h = v_0, \quad W_0 = w_0 \\ \Theta_0 = \theta_0 \end{array} \right. \quad (8.52)$$

Le modèle discret que l'on vient d'écrire a quelque peu perdu le sens physique que Das et Durbin lui avaient donné, mais il a été préparé pour servir dans un filtre et l'on compte sur l'observation du fluide pour en retrouver les caractéristiques.

### 8.4.3 Adaptation de l'algorithme particulière de filtrage pour les fluides atmosphériques

L'algorithme de filtrage reposant sur le système 8.52 est identique dans sa structure à celui servant pour les fluides homogènes isotropes. Il s'agit d'assurer

le couplage entre les systèmes d'acquisition Lagrangienne, d'observation et le long du chemin du capteur.

Par hypothèse, on dispose à chaque pas de temps  $n \geq 0$  des observations  $Y_n$  et des boules  $B_n$  centrées sur la position du capteur  $Z_n \in E$  de rayon  $R_n > 0$ .

On a alors le même schéma d'évolution destiné à contraindre les processus d'acquisition à vivre dans le système de boules associé à la trajectoire du capteur  $(Z_0, \dots, Z_n)$  :

$$\begin{aligned} (X_{n-1}^{B_{n-1}}, V_{n-1}^{h, B_{n-1}}, W_{n-1}^{B_{n-1}}, \Theta_{n-1}^{B_{n-1}}) &\xrightarrow{\text{Sélection d'observation}} (\hat{X}_{n-1}^{B_{n-1}}, \hat{V}_{n-1}^{h, B_{n-1}}, \hat{W}_{n-1}^{B_{n-1}}, \hat{\Theta}_{n-1}^{B_{n-1}}) \\ &\xrightarrow{\text{Mutation}} (\tilde{X}_n, \tilde{V}_n^h, \tilde{W}_n, \tilde{\Theta}_n) \xrightarrow{\text{Sélection dans la boule } B_n} (X_n^{B_n}, V_n^{h, B_n}, W_n^{B_n}, \Theta_n^{B_n}) \end{aligned}$$

Les étapes de sélection conduites par l'observation et les conditionnements aux suites de boules ne sont pas différentes de celles décrites dans le cas simple et détaillées dans les paragraphes 8.2.3 pour les lois exactes et 8.3 pour la résolution particulière associée. Aussi nous ne rédigeons ici que l'étape de mutation et l'estimation du noyau de transition conditionnel par des systèmes de particules en interaction.

A l'étape initiale on dispose de  $N$  quadruplets  $(\hat{X}_0^i, \hat{V}_0^{h,i}, \hat{W}_0^i, \hat{\Theta}_0^i)$ , distribués selon  $\eta_0$  tous placés dans la boule  $B_0 = \mathcal{B}(Z_0, R_0)$ .

On se place à la  $n$ -ième itération après l'étape de sélection aux observations. On dispose des particules  $(\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^{h,i}, \hat{W}_n^i, \hat{\Theta}_n^i)_{1 \leq i \leq N}$ . Avec cet ensemble de particules, on estime les paramètres locaux qui viennent d'être sélectionnés :

$$\begin{aligned} \hat{A}_n^{h,N} &= \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{V}_n^{h,i} - \hat{V}_{n-1}^{h,i}] & \hat{E}_n^{h,N} &= \frac{\Delta t}{N \cdot C_0} \sum_{i=1}^N [\hat{V}_n^{h,i} - \hat{V}_{n-1}^{h,i}]^2 \\ \hat{A}_n^{W,N} &= \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{W}_n^i - \hat{W}_{n-1}^i] & \hat{E}_n^{W,N} &= \frac{\Delta t}{N \cdot C_0} \sum_{i=1}^N [\hat{W}_n^i - \hat{W}_{n-1}^i]^2 \\ \hat{A}_n^{\theta,N} &= \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{\Theta}_n^i - \hat{\Theta}_{n-1}^i] & \hat{C}_\theta^N &= \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N [\hat{\Theta}_n^i - \hat{\Theta}_{n-1}^i]^2 \end{aligned}$$

On calcule également en utilisant l'ensemble des particules les gradients verticaux moyens locaux qui sont aussi des composantes de grande échelle,  $\Gamma_n^h$  et  $\Gamma_n^\theta$ .

Pour procéder à cette estimation on propose de séparer le nuage de particules



en 2 sous-ensembles, l'un étant au-dessus du centre de gravité du nuage, l'autre au dessous. On calcule alors la quantité moyenne pour chacun des 2 nuages et la position de leur centre de gravité respectifs. Le gradient est alors estimé par le rapport des différences.

Pour le vent horizontal, on obtient les 2 valeurs moyennes  $\bar{V}_{1,n}^h$  et  $\bar{V}_{2,n}^h$  avec comme hauteurs des centres de gravité  $\bar{X}_{1,n}^{3,h}$  et  $\bar{X}_{2,n}^{3,h}$ . De même pour la température on obtient  $\bar{\Theta}_{1,n}$  et  $\bar{\Theta}_{2,n}$  avec les positions sur la verticale  $\bar{X}_{1,n}^{3,\theta}$  et  $\bar{X}_{2,n}^{3,\theta}$ . On estime alors les gradients moyens sur l'ensemble des particules par :

$$\Gamma_n^{h,N} = \frac{\bar{V}_{2,n}^h - \bar{V}_{1,n}^h}{\bar{X}_{2,n}^{3,h} - \bar{X}_{1,n}^{3,h}} \quad (8.53)$$

$$\Gamma_n^{\theta,N} = \frac{\bar{\Theta}_{2,n} - \bar{\Theta}_{1,n}}{\bar{X}_{2,n}^{3,\theta} - \bar{X}_{1,n}^{3,\theta}} \quad (8.54)$$

Pour chaque particule on calcule les moyennes locales qui lui sont propres à savoir  $\Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{V}_n^{h,i})(\hat{X}_n^i)$ ,  $\Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{W}_n^i)(\hat{X}_n^i)$ ,  $\Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{\Theta}_n^i)(\hat{X}_n^i)$  et  $\beta_n^{i,N} = \frac{1}{\Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{\Theta}_n^i)}$  mais aussi les énergies cinétiques turbulentes  $k_n^{h,i,N}$ ,  $k_n^{W,i,N}$  et  $k_n^{i,N}$ .

On rappelle l'expression de la moyenne régularisée approchée pour le vent horizontal :

$$\Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{V}_n^{h,i})(\hat{X}_n^i) = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{V}_n^{h,j} G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^j)}{\sum_{k=1}^N G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^k)} \quad (8.55)$$

où  $G^\delta$  est le noyau de régularisation faible de la masse de Dirac. Les autres moyennes s'approchent de manière analogue.

Tous les paramètres ont été estimés, chaque particule  $1 \leq i \leq N$  suit le modèle de dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_{n+1}^i = \hat{X}_n^i + \hat{V}_n^i \Delta t + \sigma^X \Delta B_n^{X,i} \\ \tilde{V}_{n+1}^{h,i} = \hat{V}_n^{h,i} + \hat{A}_n^{h,N} - \frac{C_1}{2} \frac{\hat{E}_n^{h,N}}{k_n^{h,i,N}} [\hat{V}_n^{h,i} - \Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{V}_n^{h,i})(\hat{X}_n^i)] \Delta t \\ \quad + (C_{2\theta} - 1) [\hat{W}_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{W}_n^i)(\hat{X}_n^i)] \Gamma_n^{h,N} \Delta t + (C_0 \hat{E}_n^{h,N})^{\frac{1}{2}} \Delta B_n^{h,i} \\ \tilde{W}_{n+1}^i = \hat{W}_n^i + \hat{A}_n^{W,N} - \frac{C_1}{2} \frac{\hat{E}_n^{W,N}}{k_n^{W,i,N}} [\hat{W}_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{W}_n^i)(\hat{X}_n^i)] \Delta t \\ \quad + (1 - C_{5\theta}) \beta_n^{i,N} g [\hat{\Theta}_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{\Theta}_n^i)(\hat{X}_n^i)] \Delta t + (C_0 \hat{E}_n^{W,N})^{\frac{1}{2}} \Delta B_n^{W,i} \\ \tilde{\Theta}_{n+1}^i = \hat{\Theta}_n^i + \hat{A}_n^{\theta,N} - (C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}) \frac{E_n^N}{k_n^{i,N}} [\hat{\Theta}_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{\Theta}_n^i)(\hat{X}_n^i)] \Delta t \\ \quad - [\hat{W}_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(\hat{W}_n^i)(\hat{X}_n^i)] \Gamma_n^{\theta,N} \Delta t + (\hat{C}_\theta^N)^{\frac{1}{2}} \Delta B_n^{\theta,i} \end{array} \right. \quad (8.56)$$

Cette étape de mutation terminée, on conditionne le système de particules à la boule suivante  $B_{n+1}$  par le noyau de sélection  $\mathcal{S}_{n+1, \tilde{\eta}_{n+1}^{B_{n+1}, N}}^{B_{n+1}}$  et on obtient le système  $(X_{n+1}^i, V_{n+1}^{h,i}, W_{n+1}^i, \Theta_{n+1}^i)$  où l'on peut sélectionner les particules en utilisant la nouvelle observation  $Y_{n+1}$  pour obtenir  $(\hat{X}_{n+1}^i, \hat{V}_{n+1}^{h,i}, \hat{W}_{n+1}^i, \hat{\Theta}_{n+1}^i)_{1 \leq i \leq N}$ , ce qui conclut la description de l'itération de l'algorithme de filtrage par particules.

La méthode qui vient d'être décrite pour filtrer les mesures réalisées sur les écoulements tridimensionnels atmosphériques devra être complétée dans des travaux à venir. Il conviendrait notamment de détailler les erreurs que l'on commet dans nos différentes approximations, ainsi que leur propagation dans le système de dynamique.

En attendant nous avons décrit nos méthodes d'estimations, présenté divers filtres pour des écoulements homogènes isotropes ou pour des fluides pesant s'écoulant en 3 dimensions. Nous pouvons passer aux applications numériques afin d'illustrer sur des cas simulés ou réels de vents leur capacité à filtrer et vérifier leur efficacité attendue.

# Chapitre 9

## Applications aux mesures du vent atmosphérique

Tout au long des chapitres précédents, nous avons construit les outils théoriques nouveaux et déduit les algorithmes pratiques innovants pour filtrer des mesures prises par un capteur placé dans un milieu aléatoire et bruitées par le système de mesure. Nous avons particularisé l'application pour correspondre à la mesure des vitesses relevées dans un fluide turbulent.

Ce dernier chapitre est la concrétisation de notre travail et est à la fois numérique et expérimental.

Nous devons confronter nos filtres à des données réelles. Mais avant cela, il est nécessaire de vérifier l'aptitude de l'algorithme à filtrer des mesures simulées par un modèle identique à celui du filtrage. Cette étape permet de s'assurer de la pertinence de nos choix. Dans un second temps on pourra tenter la même expérience sur des données réelles. Dans ce cas ce sont à la fois l'algorithme du filtre et le modèle retenu pour simuler la dynamique dans le filtre qui sont évalués.

Dans chacun des tests, nous utilisons des données de référence, réelles ou simulées, supposées parfaites que l'on bruit artificiellement. Les bruits rajoutés numériquement sont bâtis sur des variables aléatoires gaussiennes par simplicité, mais n'importe quelle loi aurait pu être retenue. Il est alors demandé aux divers filtres partant du signal ainsi bruité d'estimer le signal de référence.

On conclura ce chapitre expérimental en évaluant sur quelques cas les erreurs commises par les filtres que l'on propose.

Nous débutons par un signal unidimensionnel généré au moyen du modèle Lagrangien simplifié de Pope que l'on perturbe et que le filtre doit débruiter.

## 9.1 Filtrage de vitesses unidimensionnelles simulées

### 9.1.1 Simulation des vitesses d'un fluide en écoulement unidimensionnel

Cette première application démarre par la simulation d'un signal unidimensionnel utilisant le modèle simplifié pour la turbulence homogène isotrope. Pour générer la donnée on reprend le système 8.18 et on se munit d'un système de particules évoluant de manière a priori. Pour alimenter le système, il est nécessaire de produire une série de commandes  $A_n = \mathbb{E}(\alpha_n)$  et  $E_n = \mathbb{E}(\varepsilon_n)$ .

Pour le terme  $A_n$  on choisit de construire un signal composé de plusieurs sinusoïdes de périodes différentes. Pour le terme  $E_n$  il faut procéder de manière plus réaliste. Dans la littérature physique, voir Frisch (1995), on s'aperçoit que le taux de dissipation turbulente d'un fluide fournit une série temporelle caractéristique. On propose de simuler cette variable par les incréments d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable croissant. Ainsi la série temporelle déduite est positive presque sûrement non nulle.

Ce type de processus est la somme de sauts d'amplitude appartenant à  $[0, \infty[$ , souvent petits mais pouvant prendre de grandes valeurs par moments en fonction de  $\alpha$ . En utilisant les incréments d'un tel processus, pourvu qu'on ait éliminé les sauts d'amplitude infinie, on retrouve l'allure des séries temporelles des taux de dissipation turbulentes.

Soit la mesure de Lévy unilatérale d'ordre  $\alpha \in [0, 1[$  définie sur  $[0, \infty[$  par

$$\nu(dx) = \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

On peut définir le processus de Lévy  $L_t$  par sa fonction caractéristique :

$$\Phi_{L_t}(u) = \exp\left(t \int_0^\infty (\exp(i.u.x) - 1)\nu(dx)\right) \quad (9.1)$$

Pour simuler ce processus il faut supprimer les petits sauts arrivant trop fréquemment, c'est à dire avec une fréquence infinie, et l'on restreint  $\nu(dx)$  à l'intervalle  $[\delta, \infty[$  avec le paramètre de cut-off  $\delta > 0$ . On obtient par un calcul immédiat  $\int_{\delta}^{\infty} \nu(dx) = \frac{1}{\alpha\delta^{\alpha}}$ . La restriction est alors la somme de processus de Poisson marqués de paramètre  $\lambda^{\delta} = \frac{1}{\alpha\delta^{\alpha}}$  et de loi de densité  $\frac{\alpha\delta^{\alpha}}{x^{1+\alpha}}$ .

La simulation discrète du processus de Lévy de cut-off  $\delta$  se fait alors par la méthode d'inversion de la fonction de répartition. On retient alors pour  $E_n$  les incréments du processus simulé. Pour l'expérience numérique on retient  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\delta = 10^{-3}$ . La figure 9.1 montre un exemple de telles simulations. La série des  $E_n$  a bien l'allure que l'on attend pour une série temporelle de taux de dissipation turbulent, avec des pics d'intensité et de fréquence variable et restant supérieure à une valeur moyenne non nulle.

On utilise pour tout instant  $n > 0$  un système de  $N$  particules  $(X_n^i, V_n^i)_{1 \leq i \leq N}$ . A l'instant initial on distribue  $(X_0^i, V_0^i)$  selon une loi normale centrée sur  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $V_0 \in \mathbb{R}$ . Les particules sont en interaction par le champ moyen et évoluent selon l'équation de dynamique :

$$\begin{cases} X_{n+1}^i &= X_n^i + V_n^i \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^{X,i} \\ V_{n+1}^i &= V_n^i + A_n - C_1 \frac{E_n}{k_n^i} [V_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(V_n^i)(X_n^i)] \Delta t \\ &+ \sqrt{C_0 \cdot E_n} \Delta W_n^{V,i} \end{cases} \quad (9.2)$$

avec  $\Pi_n^{\delta,i,N}(V_n^i)(X_n^i)$  telle que défini en 8.43,  $k_n^i$  est donné par 8.44 et les  $W_n^{X,i}$  et  $W_n^{V,i}$  sont des processus de Wiener standard.

A chaque pas de temps on prend la moyenne empirique des vitesses des particules pour former  $V_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_n^i$  la vitesse locale simulée pour notre écoulement 1D de commande  $A_n$  et  $E_n$ .

Pour l'application numérique on utilise un système de 300 particules. On initialise l'algorithme autour de 0 pour les positions et 2 pour les vitesses. Comme commande, on se sert des simulations présentées figure 9.1 et on obtient un signal 1D qu'illustre les 2 graphiques 9.2. L'allure de ces graphiques est semblable aux mesures réelles pratiquées sur un fluide. La vue de détail permet de voir des effets d'intermittence que l'on a cherché à reproduire en utilisant le processus de Lévy pour la commande  $E_n$ .

Comme nous travaillons dans le domaine de la turbulence homogène, on peut confronter cette simulation à K41 et notamment vérifier que le spectre de puissance des vitesses suit en diagramme logarithmique une pente en  $-5/3$ . On note sur

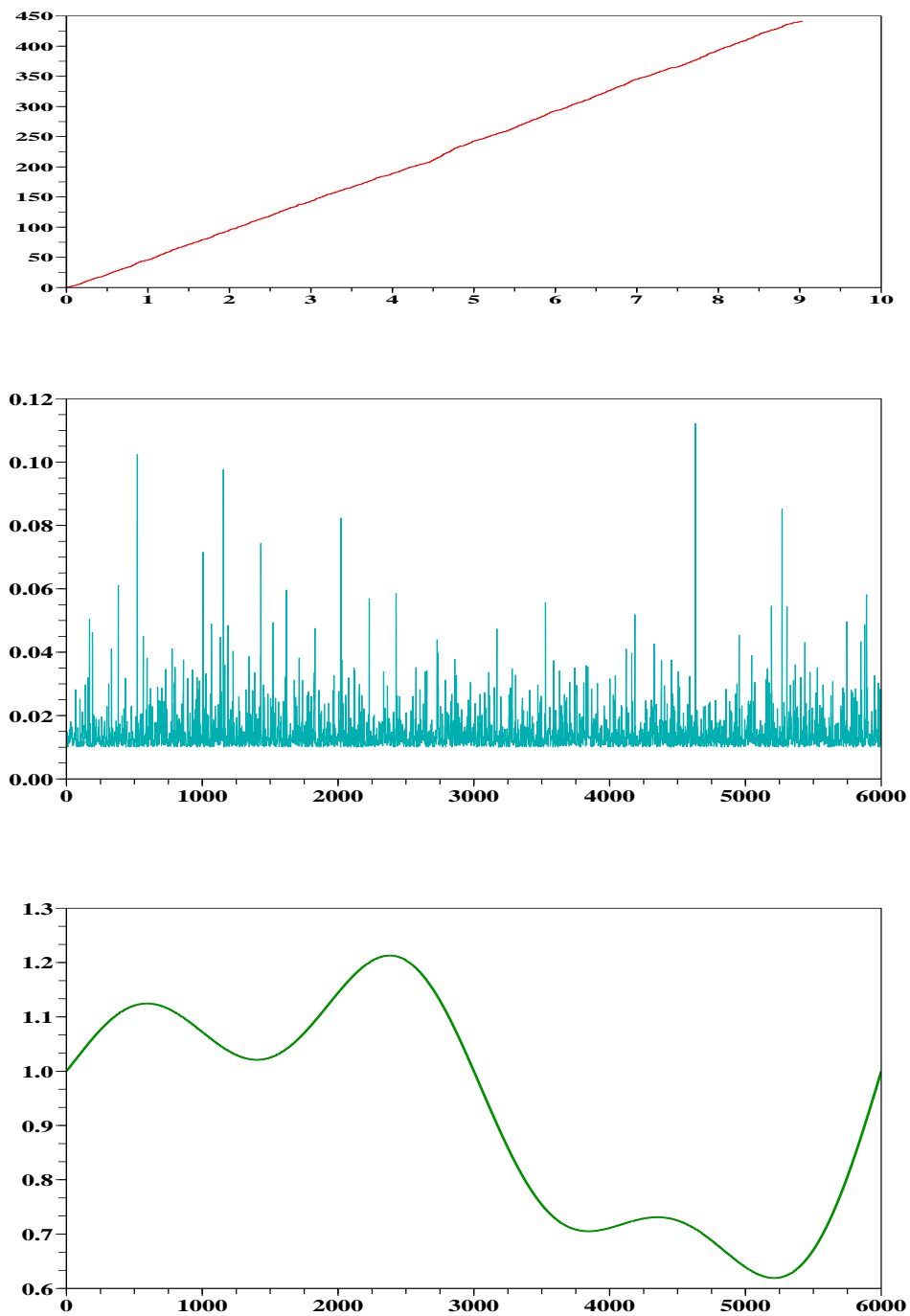


FIG. 9.1 – Exemple de simulation d’un processus de Lévy  $\alpha$ -stable de paramètre  $\alpha = \frac{1}{2}$  et du processus  $\mathbb{E}(\alpha_n)$ . En haut la série temporelle du processus de Lévy croissant et au milieu celle de ses incréments  $E_n$  et en bas une série pour la commande  $A_n$ .

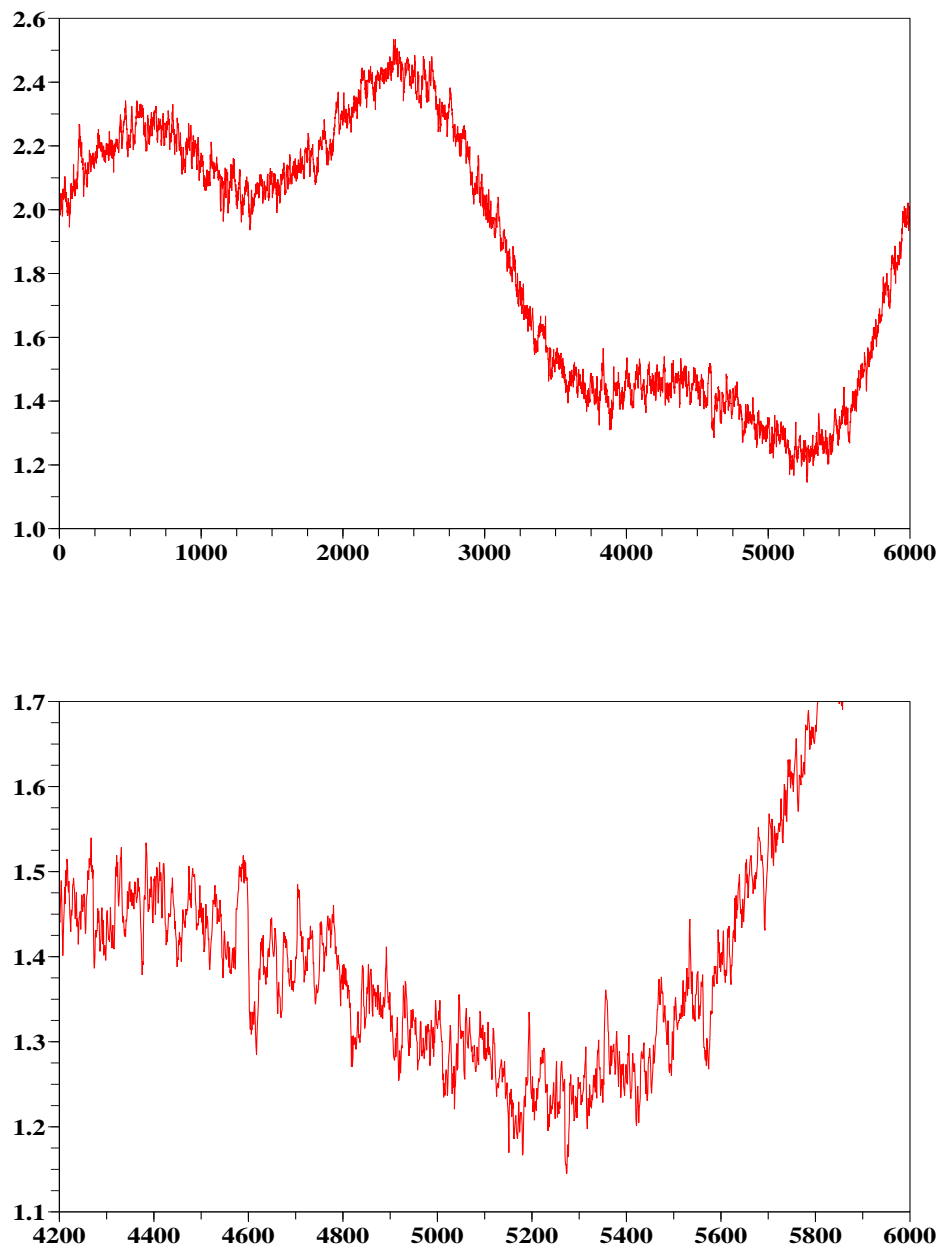


FIG. 9.2 – Exemple de simulation des vitesses d'un fluide en écoulement unidimensionnel. En haut la série temporelle complète et en bas un détail montrant des passages intermittents.

la figure 9.3, en haut, que le spectre de puissance relève légèrement la queue, signe de la présence d'un peu d'intermittence dans le signal. Pour le vérifier on peut examiner en 9.3 en bas l'histogramme empirique des incréments de vitesses, Lagrangiens et forcément longitudinaux. On y voit avec la courbe en rouge que l'allure gaussienne est globalement respectée, mais que les queues de la distribution empiriques sont un peu plus lourdes, ce qui confirme que notre simulation a généré un peu du phénomène d'intermittence.

Ces simulations peuvent nous servir de base pour tester notre filtre particulière.

### 9.1.2 Filtrage des vitesses d'un fluide 1D simulé

On utilise des signaux numériques tels que l'on vient de les construire et on leur ajoute un bruit, que l'on prend gaussien en première intention. Cet exercice somme tout académique demande alors au filtre de retrouver le signal de référence en observant le signal bruité et permet de tester notre algorithme en lui-même.

Tant pour la simulation du signal référant que pour l'étape de mutation du filtrage, on utilise le système 9.2. On a bien là un test de la procédure de filtrage. Le fait d'avoir pris un bruit d'observation gaussien est un handicap dans le cas présent. On l'a vu sur la figure 9.3 les incréments de vitesses sont proches d'une distribution gaussienne. Cette « gaussianité » du bruit d'observation rend paradoxalement le filtrage plus difficile.

Le couplage entre les systèmes d'acquisition Lagrangien et d'observation donne une dynamique à champ moyen conditionnée par les observations. Le filtre associé à ce type de problème reprend les différentes étapes décrites dans le chapitre précédent, avec le modèle de dynamique donné par 9.2 et une sélection génétique suivant le noyau 8.40.

Dans cette application, on choisit un bruit d'observation de variance  $1/4$ , un système de 300 particules, des particules initialisées autour de la première observation par une gaussienne centrée réduite et des positions distribuées autour de l'origine. Le pas de temps est arbitrairement fixé à  $1/20$  de seconde pour se rapprocher des cas réels que l'on verra par la suite.

Le rayon des boules autour du capteur pour conditionner les particules à la trajectoire de celui ci est un problème. Nous n'avons pas de règle physique ou théorique nous permettant de le déterminer a priori. Ce sujet est d'ailleurs l'une



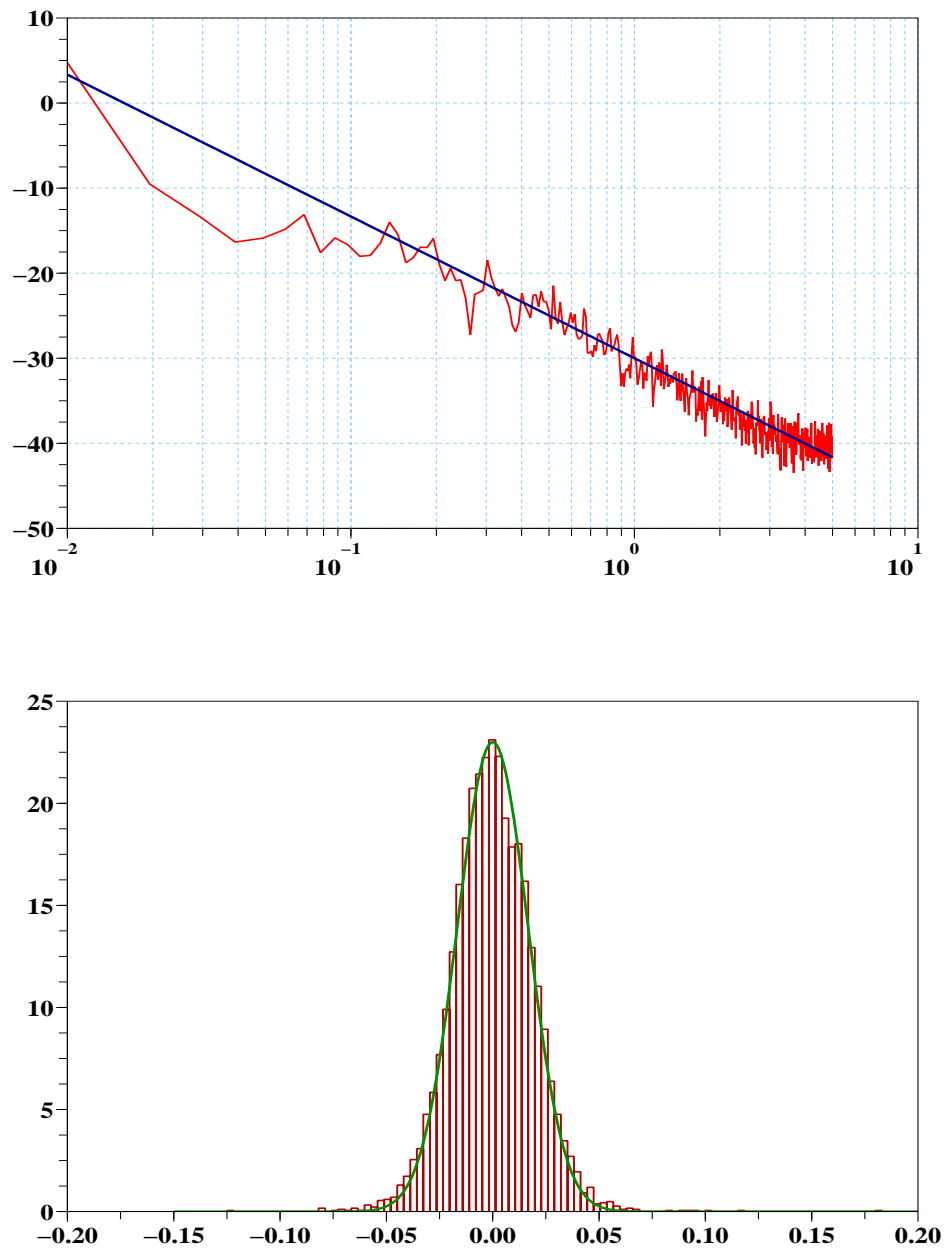


FIG. 9.3 – En haut le spectre de puissance des vitesses du fluide que l'on a simulé avec en bleu foncé la pente en  $-5/3$  caractéristique de la turbulence homogène isotrope. En bas l'histogramme empirique des incréments des vitesses superposé en vert de la courbe d'une loi normale centrée.

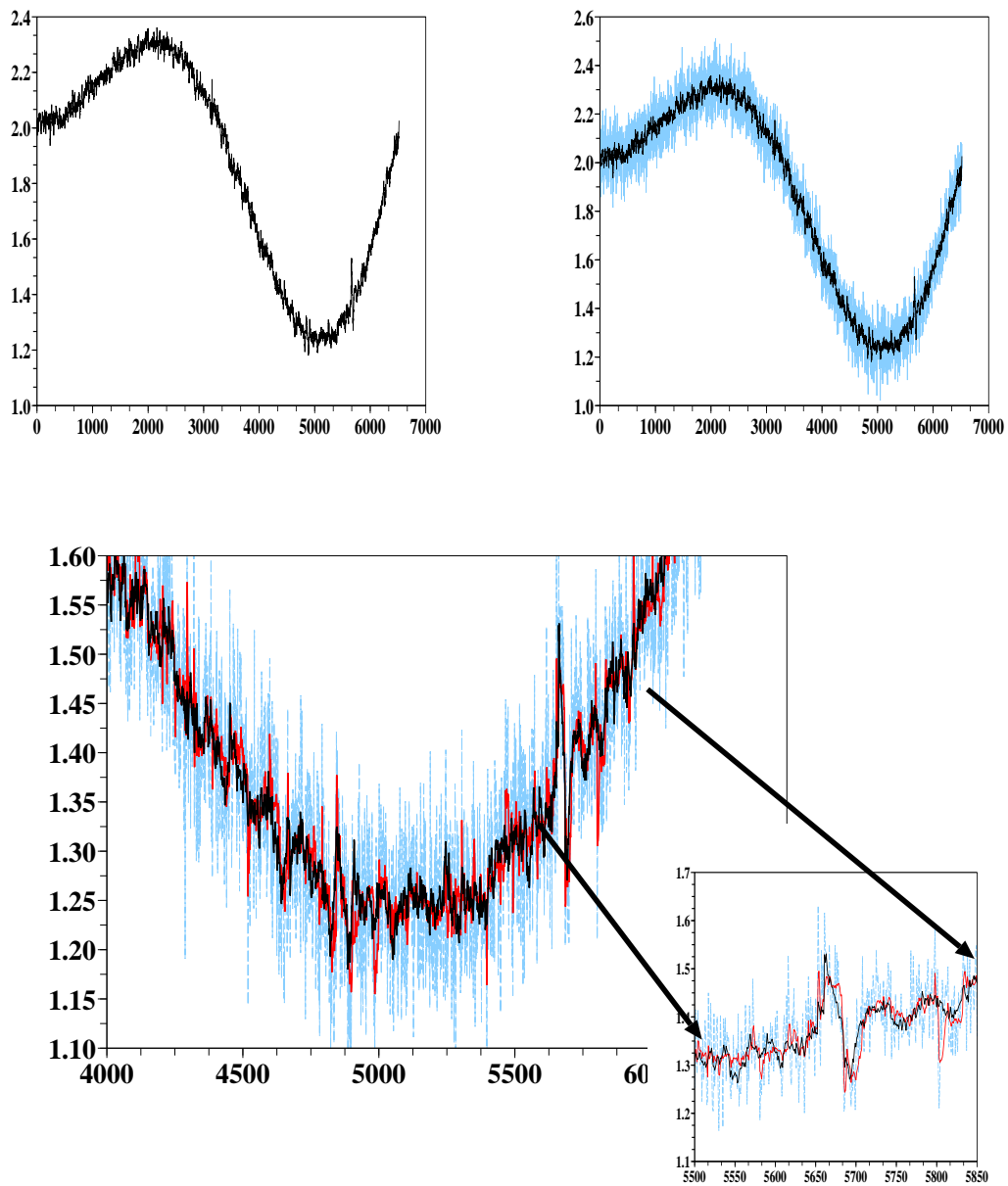


FIG. 9.4 – En haut une série temporelle de vent simulé avec à droite le bruit d'observation rajouté en cyan. En bas, en rouge, le résultat du filtrage sur le dernier tiers de la série avec un détail montrant le bon suivi du filtre particulaire malgré les fortes perturbations.

des voies d'amélioration de notre algorithme de filtrage. Nous prenons donc ici un rayon constant arbitrairement fixé à 1.

Pour cet exemple, et ce sera toujours le cas dans ce mémoire, la variance du bruit d'observation est supposée connue. Mais dans un cadre plus général cette hypothèse n'est pas nécessaire et le filtre peut apprendre cette variance en la considérant comme un état caché du système d'observation. Cette apprentissage alourdit néanmoins les calculs, et nous avons préféré le considérer ici comme une donnée du problème.

Le code Scilab de cette partie est donné en annexe C.

Sur la figure 9.4, on peut voir en haut à gauche le signal de référence avec à droite le signal bruité numériquement. En bas de cette figure, on a en rouge le résultat du filtrage, avec une vue de détail sur un moment contenant un battement caractéristique de l'intermittence. On note que les structures mêmes rapides sont respectées avec des dynamiques semblables. Par le filtrage on a obtenu une réalisation possible de l'écoulement étant donné les paramètres du milieu que l'on a appris, c'est la différence que l'on remarque entre le signal de référence et le signal estimé par filtrage.

Les pics que l'on peut observer ça et là sont des moments où le filtre suit le bruit qui a une dynamique proche de celle de la turbulence et le battement est alors considéré comme plausible.

Le résultat du filtrage peut s'examiner sur la série temporelle, mais aussi, et surtout dans le cas des vitesses d'un fluide turbulent, sur le diagramme du spectre de puissance qu'illustre la figure 9.5. En cyan le spectre de puissance (DSP) du signal bruité. On note que dès 0.2 Hz la ligne spectrale s'aplatit pour ne montrer qu'un bruit blanc. On a en noir la DSP à retrouver et en rouge la restitution du filtre particulière. Le filtre a donc retrouvé correctement la cascade spectrale avec les bons niveaux d'énergie. Les pentes sont respectées et sont comparables à la droite verte de pente  $-5/3$ . Les structures de la DSP sont retrouvées et on peut noter vers 0.4 Hz le bon accord entre l'aspect du spectre filtré et celui de référence.

Fort de ce premier succès sur un signal synthétique, on peut chercher à filtrer un signal réel issu de mesures atmosphériques dont on ne prend qu'une seule composante.

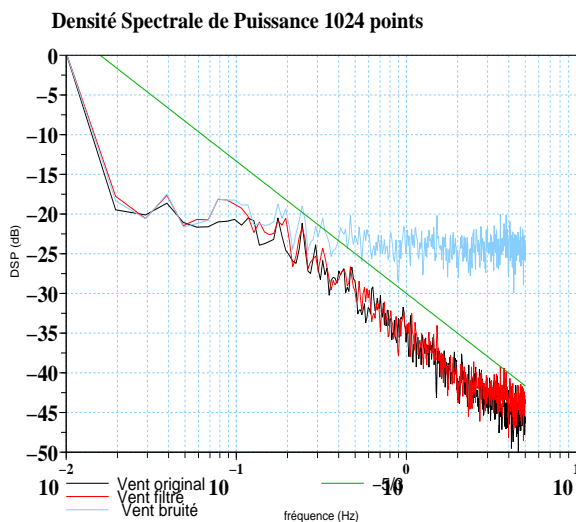


FIG. 9.5 – Densité spectrale de puissance pour le signal bruité en cyan, le signal de référence à retrouver en noir et le signal filtré en rouge. La droite verte correspond à la pente en  $-5/3$  de K41.

## 9.2 Filtrage d'une composante de vent réel

### 9.2.1 Les données anémométriques expérimentales en atmosphère réelle

Pour pouvoir traiter des mesures réelles nous avons cherché des données réputées de qualité, c'est à dire ne comprenant pas de bruits instrumentaux. Le chapitre sur les systèmes d'acquisition nous a convaincu de la nécessité de posséder des échantillonnages serrés et donc d'avoir des capteurs rapides. Pour obtenir ces données à haute cadence, notre choix s'est porté vers des anémomètres soniques qui ont également la particularité d'être non intrusifs et ne perturbent pas l'écoulement dans le domaine de mesure. Le lecteur averse de technologie peut se reporter à la page internet du fabricant qui a conçu et industrialisé le **Gill Solent HS Research Sonic Anemometer** que nous utiliserons. Ce capteur permet d'obtenir les 3 composantes du vent (2 composantes horizontales et 1 verticale). Par sa technologie il fournit également une mesure de la température. Nous reviendrons sur ce point dans la section 9.4.

Les données seront, soit issues d'un site de mesures opérationnelles à Saint-Sardos dans le Tarn et Garonne dans le cadre de la campagne expérimentale CarboEurope, soit issues d'un mât de mesures du vent que l'équipe 4M du CNRM-

Toulouse a implanté à notre demande sur le site de Météo-France à Toulouse. Le site expérimental de Toulouse était motivé par le besoin de surveiller le système de mesure afin d'obtenir des données assurément sans perturbations instrumentales.

Sur le site de Saint-Sardos les mesures ont été réalisées à une fréquence de 20 Hz alors que sur le site expérimental de Météo-France à Toulouse elles se sont étagées entre 5 et 50 Hz. Dans les 2 cas, les capteurs sont placés à 10 m pour se trouver hors de la couche limite de surface.

Dans cette première étape expérimentale, les capteurs sont restés fixes. Pour une seconde phase il est projeté de réaliser des mesures mobiles, mais la faisabilité et le protocole de mesures n'ont à ce jour pas encore permis de procéder à cette seconde campagne qui nécessite de prendre des précautions particulières pour obtenir des données sans bruit.

## 9.2.2 Filtrage de données unidimensionnelles réelles

Pour l'application de ce paragraphe, on enregistre des données de vent réelles. Les vitesses recueillies sont décomposées sur les 3 axes horizontaux et vertical. Dans le domaine de la mesure et à la vitesse d'échantillonnage que l'on a choisi l'atmosphère peut être considérée comme étant homogène et isotrope sur le plan horizontal. On ne considère qu'une seule composante horizontale. Pour l'application numérique on sélectionne l'instant de l'expérience au hasard dans la base de données expérimentale en ne vérifiant que la qualité du signal qui nous servira de référence.

On ajoute alors au signal réel un bruit numérique. On le choisit de nouveau Gaussien et on prend un écart-type de  $1/3$ . On se donne un ensemble de 300 particules que l'on initialise autour de la première observation.

La méthode et l'algorithme sont alors en tout point équivalents à ceux que l'on a présenté pour le débruitage de données simulées.

La figure 9.6 illustre les séries temporelles pour le signal de référence à estimer en noir, le signal bruité introduit dans le filtre en cyan, et les vitesses estimées par notre algorithme particulière en rouge. Avec le même code couleur, l'illustration 9.7 montre les densités spectrales de puissance pour les 3 signaux.

Il est remarquable de voir l'accord entre le signal turbulent réel et ce qu'a

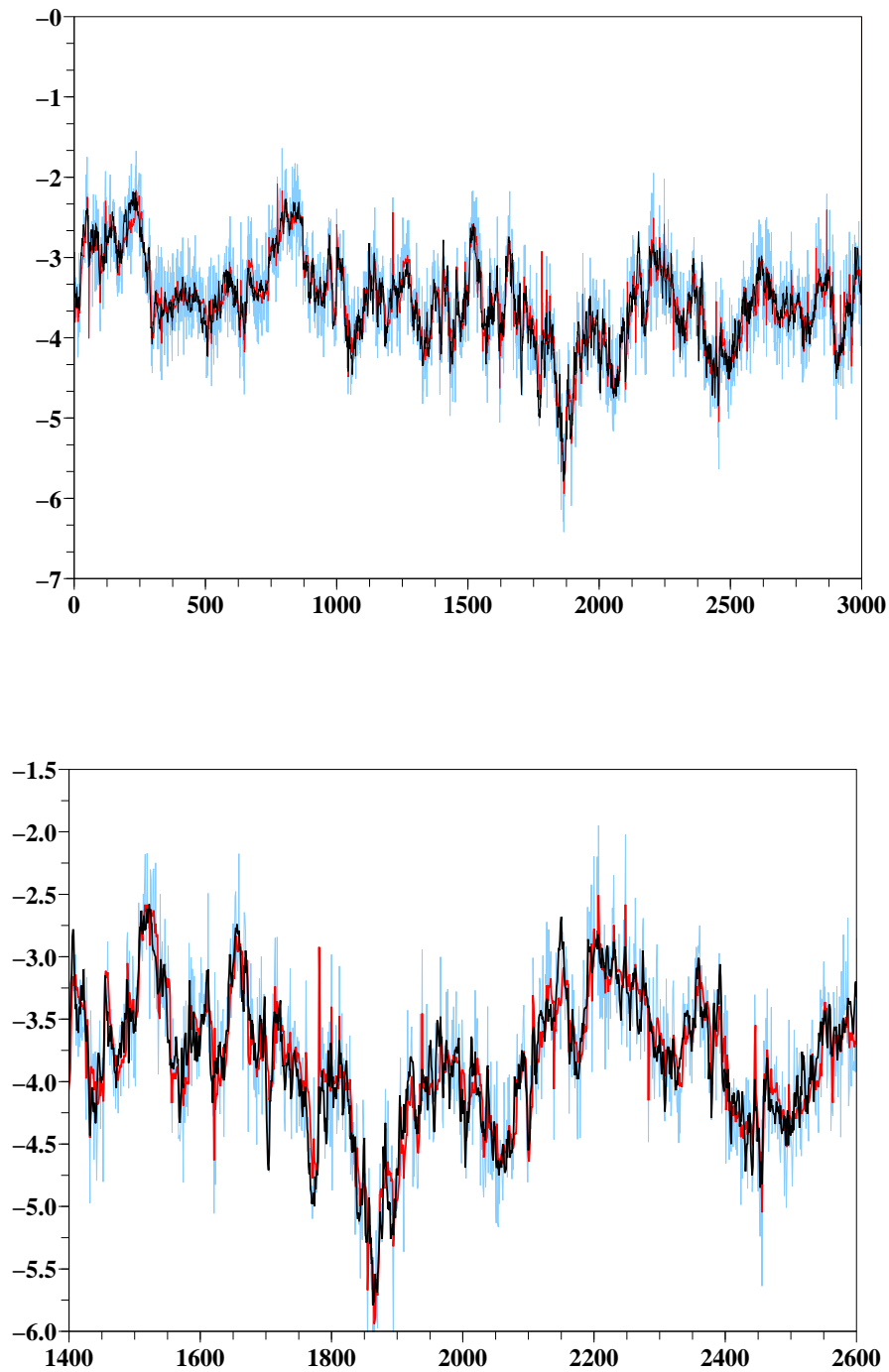


FIG. 9.6 – Filtrage d'un vent 1D réel à 20 Hz mesuré sur le site de Saint-Sardos le 10 janvier 2005 entre 12h00 et 12h03 UTC filtré par algorithme particulière conditionnel avec 300 particules. En pointillé bleu le signal bruité, en noir le signal de référence et en rouge le vent estimé.

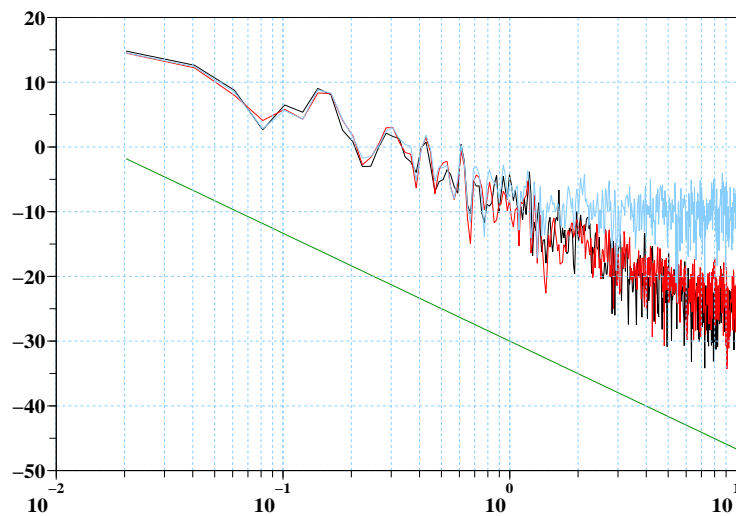


FIG. 9.7 – Densité spectrale de puissance pour le signal bruité en cyan, le signal réel à retrouver en noir et le signal filtré en rouge. La droite verte correspond à la pente en  $-5/3$  de K41.

restitué le filtre que nous avons développé. Il semble que le modèle proposé par S.B. Pope pour la turbulence homogène isotrope ait une certaine pertinence pour l'atmosphère à l'échelle de nos mesures. Il ne s'agissait pas de vérifier le bien-fondé de cette modélisation par son utilisation dans un filtre, mais cela peut nous rassurer sur la possibilité d'user des modèles Lagrangiens pour filtrer des mesures expérimentales réalisées dans l'atmosphère réelle.

La figure 9.6 permet de voir que le filtre rend la trajectoire d'une réalisation possible des vitesses. On note qu'il y a toujours ces pics à des instants où l'algorithme a trop suivi les bruits. La DSP délivrée par notre filtre non-linéaire permet de revenir aux bons niveaux d'énergie avec une pente qui respecte la loi en puissance de Kolmogorov.

On peut alors modifier légèrement l'algorithme de traitement pour pouvoir passer aux mesures bidimensionnelles.

## 9.3 Filtrage d'un vent bidimensionnel réel

### 9.3.1 Filtrage d'un vent horizontal dans un cas standard

Dans l'atmosphère la vitesse verticale du fluide a une dynamique différente des composantes horizontales. Cette différence vient du phénomène de flottaison des éléments de fluide et de stratification thermique. On peut alors imaginer pouvoir traiter le vent horizontal de façon autonome en considérant l'écoulement bidimensionnel.

A l'échelle de mesure, sur le plan horizontal le fluide est isotrope. Cet argument peut amener une facilité en traitant indépendamment les mesures bruitées par le filtre unidimensionnel dont on a montré la validité. Cette simplification permet un traitement immédiat sans travail supplémentaire mais ne permet pas de profiter de la nature du fluide bidimensionnel.

Pour tirer parti de l'écoulement 2D on propose d'écrire le modèle de dynamique pour les particules avec une énergie cinétique turbulente  $k_n$  et un taux de dissipation turbulente  $\varepsilon_n$  identiques sur les 2 coordonnées. De plus on propose une sélection de la particule sur les 2 composantes de vitesses en même temps (contrairement à la technique simple qui pouvait sélectionner une composante de vitesse d'une particule et en redistribuer l'autre).

En notant les 2 composantes horizontales de la vitesse au  $n$ -ième instant  $(U_n, V_n)$ , le modèle de dynamique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1}^{U,i} = X_n^{U,i} + U_n^i \Delta t + \sigma_n^U \Delta W_n^{X,U,i} \\ X_{n+1}^{V,i} = X_n^{V,i} + V_n^i \Delta t + \sigma_n^V \Delta W_n^{X,V,i} \\ U_{n+1}^i = U_n^i + A_n^U - C_1 \frac{E_n}{k_n^i} [U_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(U_n^i)(X_n^{U,i})] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0 \cdot E_n} \Delta W_n^{U,i} \\ V_{n+1}^i = V_n^i + A_n^V - C_1 \frac{E_n}{k_n^i} [V_n^i - \Pi_n^{\delta,i,N}(V_n^i)(X_n^{V,i})] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0 \cdot E_n} \Delta W_n^{V,i} \end{array} \right. \quad (9.3)$$

En écrivant l'observation  $Y_n = (Y_n^U, Y_n^V)$ , l'équation associée est

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_n^U = H(U_n) + \sigma_n^{Y,U} \cdot W_n^{Y,U} \\ Y_n^V = H(V_n) + \sigma_n^{Y,V} \cdot W_n^{Y,V} \end{array} \right. \quad (9.4)$$

où pour tout instant  $n$ ,  $W_n^{Y,U}$  et  $W_n^{Y,V}$  sont des processus de Wiener standard.



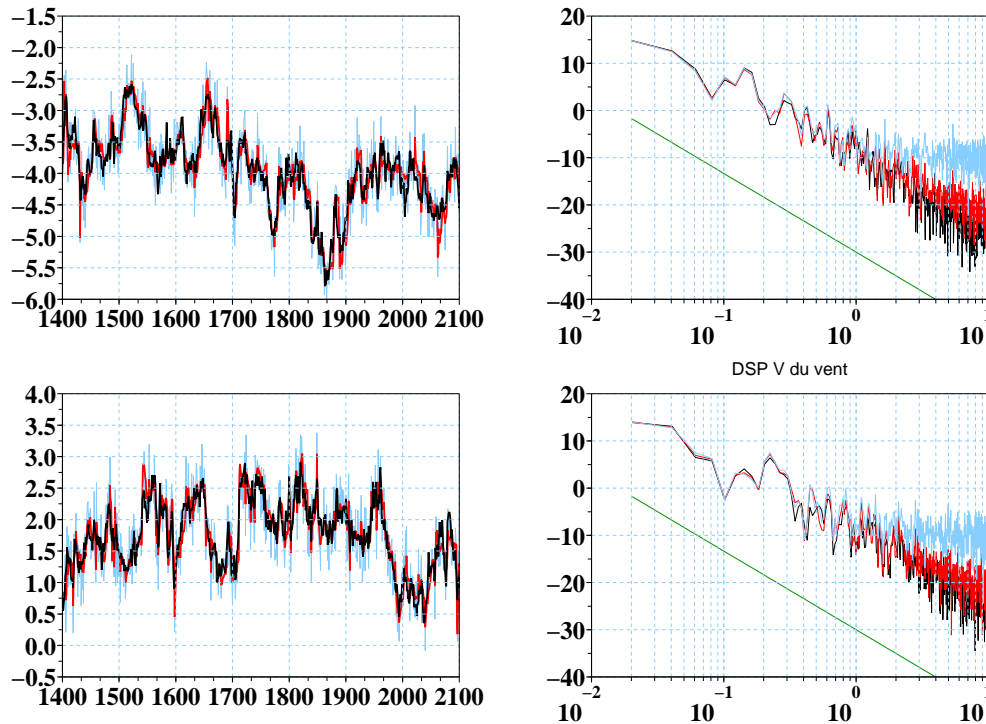


FIG. 9.8 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un signal bidimensionnel. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Sur le diagramme des DSP est rajouté une droite de couleur verte de pente en  $-5/3$ . Le filtrage utilise 300 particules.

Le potentiel de sélection est alors  $G_n(U_n, V_n) = \exp\left(-\frac{(Y_n^U - U_n)^2 + (Y_n^V - V_n)^2}{2\sigma_n^Y}\right)$  avec  $(\sigma_n^Y)^2 = (\sigma_n^{Y,U})^2 + (\sigma_n^{Y,V})^2$ .

En pratique sur un jeu de données réelles sont extraites les 2 composantes horizontales et il leur est ajouté numériquement le bruit d'observation. On demande alors au filtre d'estimer l'état observé et on le compare au signal de référence.

L'application numérique utilise le même jeu de données que pour le paragraphe 9.2.2, soit les mesures de la station de Saint-Sardos le 10 janvier 2005 entre 12h00 et 12h03. Le filtre conditionnel opère avec un ensemble de 300 particules.

On illustre cette application sur la figure 9.8 qui montre un extrait des séries temporelles bruitées, filtrées et réelles, ainsi que leur densités spectrales de puissance respectives. Graphiquement les résultats du filtre sont du même niveau de qualité que pour le cas unidimensionnel traité auparavant. Néanmoins on peut remarquer que les spectres des signaux estimés restent dans les fréquences les plus

hautes au dessus du spectre de référence. C'est un signe d'excès d'énergie dans ces fréquences là que l'on peut attribuer à la difficulté de séparer des bruits d'observation et de dynamique équivalents ainsi qu'au modèle qui en dimension 2 dans l'atmosphère ne prend pas en compte tous les phénomènes physiques, notamment les ajustements dus aux forces de gravité.

### 9.3.2 Variations sur le filtrage du vent en dimension 2

On profite de cet exemple qui se rapproche de la physique avec des coûts numériques encore raisonnables pour tester l'algorithme dans différentes configurations de bruit d'observation. Ces bruits seront choisis pour avoir des caractéristiques se rapprochant de la réalité, par exemple en étant Gaussiens auto-régressifs ou Gaussiens et blancs avec une variance dépendant des niveaux de turbulence atteints.

Dans le cas de bruits colorés Gaussiens, la figure 9.9 montre les spectres de puissance des bruits colorés qui ont été rajoutés sur les 2 composantes horizontales du vent. Pour ce cas nous avons repris les mesures de la station de Saint-Sardos le 10 janvier 2005 entre 12h00 et 12h03 et utilisé 300 particules. Les séries temporelles et les DSP des signaux bruités, de référence et estimés sont montrés sur la représentation 9.10. L'accord entre les vitesses estimées et les vitesses de référence reste très bon, la correction spectrale est spectaculaire. D'avoir changé le type de bruit d'observation en le rendant différent du bruit de dynamique (à cette échelle de mesure) a amélioré la séparation entre le signal et le bruit.

On peut alors varier le bruit d'observation et le rendre dépendant de la variance des vitesses sur dans un intervalle de longueur finie. Ce type de bruit est proportionnel au niveau de turbulence, et s'apparente à ce que l'on peut trouver expérimentalement lors de mesures mobiles dans la nature. Pour l'application numérique nous avons choisi des mesures réalisées sur le site de Météo-France le 26 Juillet 2006 à 19h30 UTC. Cette série a été retenue pour montrer une variation de niveau dans la turbulence de l'écoulement. La figure 9.11 montre les séries temporelles et les DSP des 3 signaux, bruités réels et estimés, avec un filtre conditionnel de 300 particules. Ce type de bruit est plus délicat à filtrer car il dépend de la bonne estimation des vitesses sur l'intervalle de calcul de la variance qui entre en compte dans celle du bruit d'observation. On peut dire que spectralement la réponse est correcte, on retrouve le spectre initial. Sur les séries temporelles on voit que le suivi est un peu plus perturbé, avec vers la fin de la série temporelle, quand la turbulence devient faible, un trop grand maintien de l'agitation turbulente par

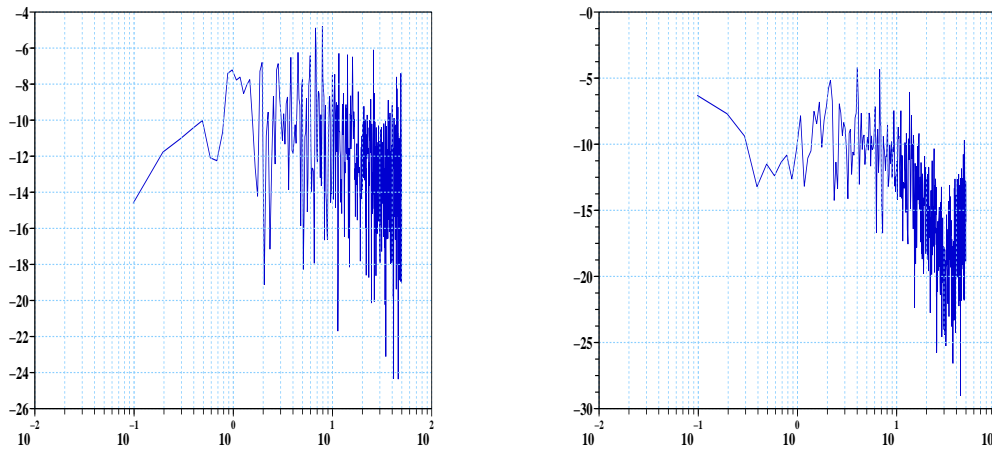


FIG. 9.9 – Spectres de puissance des bruits autorégressifs pour chacune des composantes horizontales  $U$  et  $V$ .

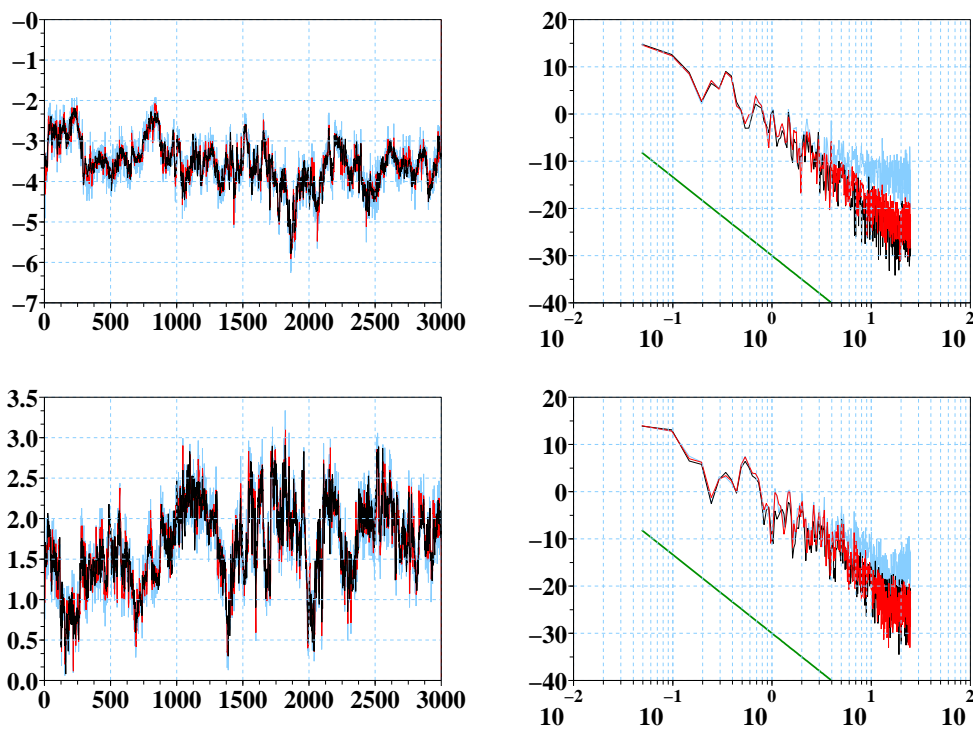


FIG. 9.10 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un signal bidimensionnel avec un bruit autorégressif. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 300 particules.

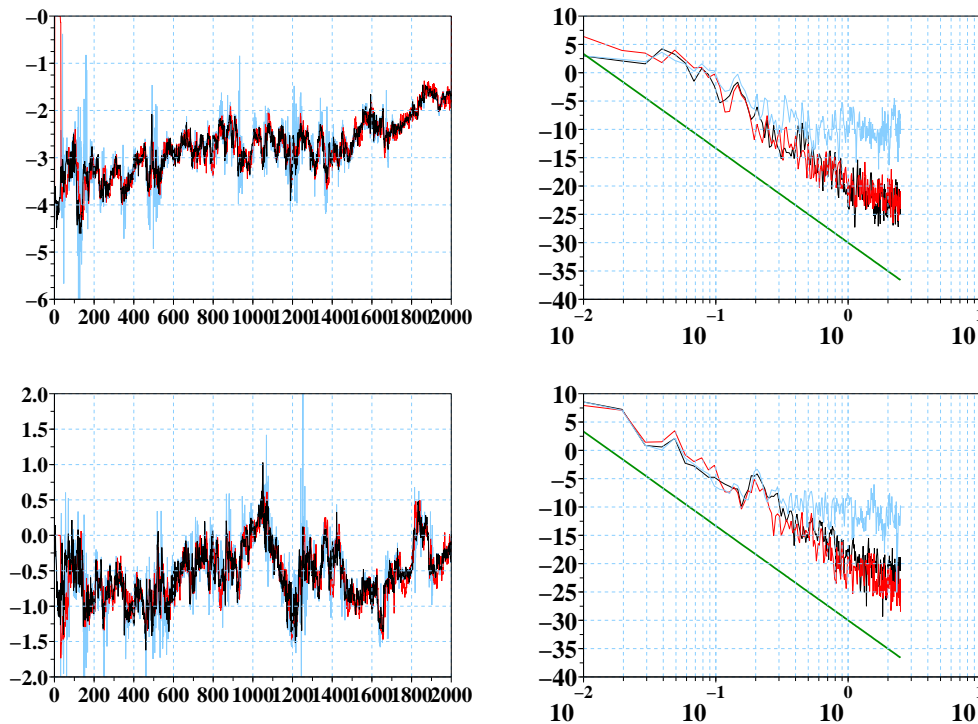


FIG. 9.11 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un bruit dépendant du niveau de turbulence. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 300 particules.

notre filtre. Nous allons reparler du cas des écoulements laminares un peu plus bas.

Pour continuer les tests sur notre filtre, on propose ensuite de comparer sur une même série le résultat du filtre conditionnel et le résultat obtenu par le filtre que l'on peut coder en utilisant des mutations selon les lois a priori.

Ce filtre est relativement différent de notre filtre conditionnel. En effet, nous sommes dans la situation d'une dynamique à champ moyen avec commande (sans modèle Markovien pour la commande) et les lois du champ moyen sont conditionnées à la réalisation de celle-ci.

Comme l'a montré le chapitre 6, il faut dans ce cas faire tourner un ensemble de  $M$  systèmes de  $d$  particules pour apprendre la loi du fluide a priori et faire le filtrage sur un système indépendant dont les  $N$  particules évoluent selon la loi apprise. Le filtrage et la sélection se font sur ce système supplémentaire. Nous maintenons une étape de localisation pour maintenir le couplage avec le capteur.

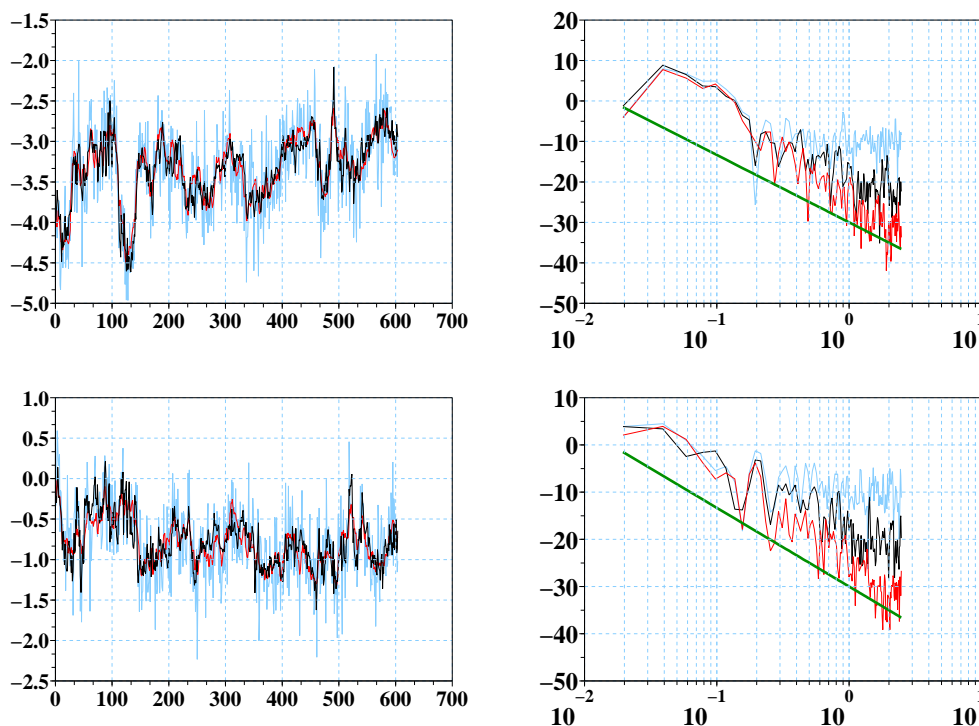


FIG. 9.12 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour des vitesses bidimensionnelles traitées par le filtre usant de mutation de loi a priori. Le filtrage utilise 70 systèmes de 300 particules.

Pour l'application numérique nous choisissons de prendre 70 systèmes de 100 particules. Nous utilisons les données du site de Toulouse du 26 Juillet 2006 à 19h30 UTC que l'on bruit d'un bruit blanc Gaussien d'écart-type  $1/3$ . L'illustration 9.12 montre les séries temporelles et les DSP obtenues par ce filtre a priori. Sur la figure 9.13 la même séquence de vent mais filtrée par le filtre conditionnel avec 300 particules.

Sur les spectres de puissance on peut voir que le filtrage conditionnel a une meilleure cascade d'énergie par rapport au filtre a priori qui semble voir les détails fins avec moins d'acuité.

Le filtre conditionnel est relativement robuste, il est possible de le faire agir sur des données issues de différents moments d'une journée. Mais on rencontre une difficulté lorsque le vent faiblit, que la turbulence se réduit et que l'écoulement devient trop laminaire. Dans ce cas, le signal restitué est « trop turbulent ». Ce fait vient de la nature essentiellement turbulente du modèle de Pope, ce qu'a montré le paragraphe 8.1.4 et le filtre particulière reposant sur cette dynamique considère le bruit d'observation en partie comme de l'agitation turbulente.

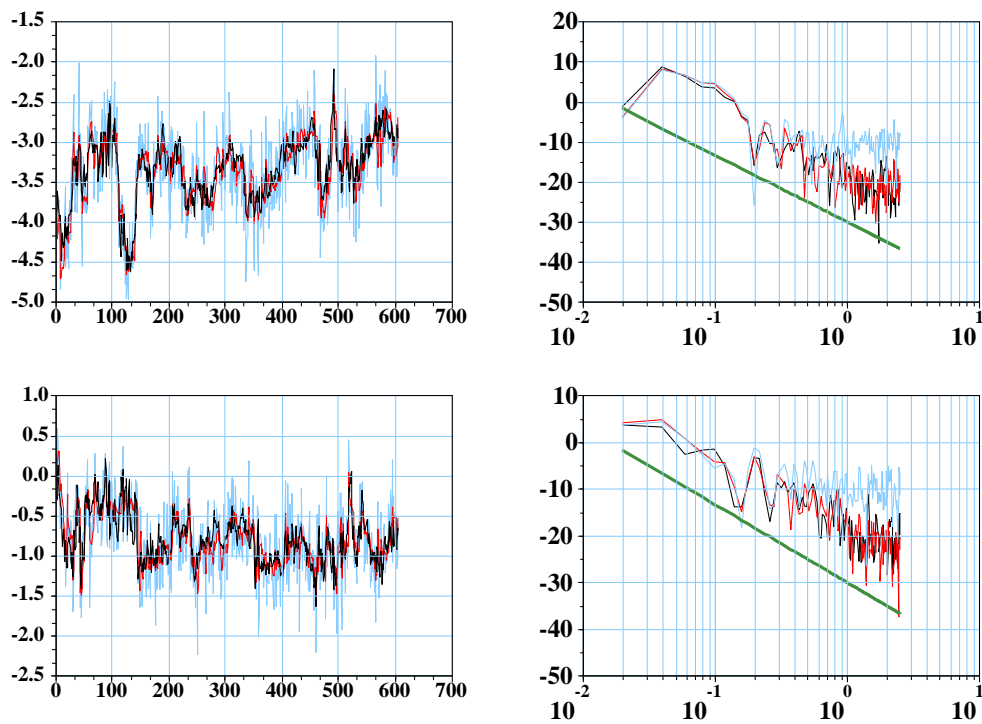


FIG. 9.13 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour des vitesses bidimensionnelles traitées par le filtre conditionnel. Le filtrage utilise 300 particules.

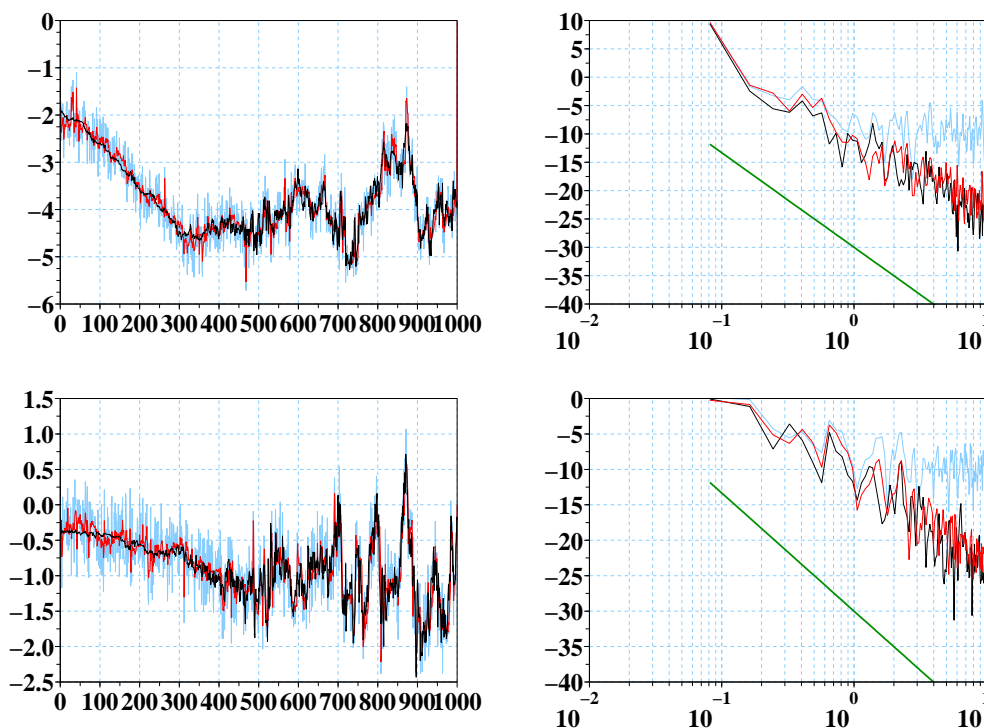


FIG. 9.14 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour un écoulement laminaire puis devenant turbulent. En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 300 particules

Pour illustrer sur un cas pratique, nous reprenons les données du 26 Juillet 2006 sur le site de Toulouse en nous plaçant à 19h15 UTC. On rajoute à la mesure de référence un bruit blanc Gaussien de variance  $1/9$ . L'algorithme conditionnel avec 300 particules est utilisé pour filtrer. Les résultats sont montrés sur la figure 9.14.

Les mesures de référence montrent que la première partie du signal est relativement laminaire alors que la seconde est plus turbulente. On voit que, par construction, le filtre surestime le niveau de turbulence et retrouve des estimées correctes dans la seconde partie. Les spectres pris sur l'ensemble des 2 épisodes montrent que la correction spectrale a été satisfaisante. C'est ici une limite structurelle de notre modèle. Pour palier à cette faiblesse, il conviendrait de modifier les constantes du modèle comme le font Das et Durbin pour devenir des fonctions où entrent en jeu l'énergie cinétique  $k_n$  et le taux de dissipation turbulent  $\varepsilon_n$ .

Ces différents essais ont permis de voir l'efficacité du filtre conditionnel, de noter son intérêt conceptuel et son avantage en terme de coûts de calculs. Son

amélioration naturelle sera l'introduction des forces de pesanteur et pour se faire il faut passer au problème de l'écoulement de dimension 3.

## 9.4 Filtrage de la température et d'un vent réel tridimensionnel

Dans l'atmosphère il existe différents phénomènes amenant des mouvements turbulents désordonnés et des mouvements ordonnés, orientés dans des directions déterminées. Ces phénomènes ont des origines diverses, comme la régulation des champs de pression de grandes échelles, le transport d'énergie par les masses d'air humide, la convection due aux chauffages des surfaces par le rayonnement solaire, l'expression des forces d'Archimède sur les éléments fluides ou dans une autre gamme d'échelle les forces de Coriolis pour les déplacements synoptiques.

Pour l'expérience numérique qui vient, nous nous limitons au domaine de la turbulence d'échelle métrique qui, avec les cadences de mesures réalisées, peut être considérée comme localement homogène. Il y a dans cette gamme d'échelle une différence de comportement entre les vitesses dans le plan horizontal et la vitesse verticale. Cette dernière est impactée par les forces de flottabilité dues aux différences de température sur la verticale. Il est nécessaire d'enrichir le modèle simplifié de Pope pour prendre en compte ces couplages entre les vitesses des éléments du fluide et leur température.

Au paragraphe 8.4.2, nous avons déduit du modèle de turbulence stratifiée de Das et Durbin nos modèles comportementaux pour les écoulements atmosphériques puis dans la section 8.4.3 nous avons décrit les algorithmes particuliers pour filtrer ce type de mesures. Les vecteurs d'état comportent alors les 3 composantes de la vitesses du fluide et la température. Il est alors pertinent de mesurer la température du fluide en même temps que le vent.

Instrumentalement il faut que les mesures soient colocalisées afin de ne pas avoir de déphasages entre les données. Ce déphasage est aléatoire et dépend de la vitesse du fluide lui-même. Il est possible de le supprimer automatiquement mais le décalage repose sur des transformées de Fourier et utilise la force moyenne du vent dans un intervalle suffisamment long pour que les FFT ne soient pas trop perturbées par les effets de bord. In fine le recalage automatique introduit des erreurs de mesures difficiles à supprimer ensuite. Pour des applications futures



on pourra dans la modélisation d'un ensemble de capteurs prendre en compte les mesures non colocalisées, mais en traitant les décalages dans le modèle de dynamique que l'on fait évoluer au pas de temps le plus fin.

Pour notre application numérique nous avons préféré utiliser les mesures de température réalisées par les anémomètres soniques eux-mêmes. Mesurer une température par ce type d'instrument n'est pas forcément optimal. Mais en réduisant les fréquences de mesures pour limiter les perturbations et en choisissant des moments de la journée où la mesure de température est de meilleure qualité, on obtient des valeurs colocalisées, synchronisées, avec le meilleur compromis instrumental, pouvant servir de référence pour les températures.

Dans la suite les différents exemples reposeront sur les données recueillies sur le site de Météo-France à Toulouse le 30 Août 2006 avec des mesures instrumentales à 50 Hz ramenées numériquement à 5 Hz par un filtrage des fréquences au dessus de 5 Hz par la méthode de Fourier suivie d'une décimation des données. Le vent de référence est donc lui aussi à 5 Hz. Dans chacun des cas, nous avons choisi de perturber les données par un bruit Gaussien dont la variance dépend du niveau de turbulence, choix qui nous paraît correspondre le mieux aux perturbations que subissent les systèmes de mesures mobiles. Dans toutes les illustrations le filtre conditionnel utilise 800 particules et est initialisé sur chacune des 4 composantes par des Gaussiennes centrées réduites. Les étapes du filtre sont les mêmes que dans les cas uni ou bidimensionnel, on ajoute seulement lors de l'étape de mutation le calcul des gradients verticaux par la méthode proposée en 8.53.

Le premier exemple utilise des mesures réalisées entre 17h00 et 17h10 UTC. On montre sur les figures 9.15 et 9.16 les séries temporelles et densités spectrales de puissance pour les signaux bruités en cyan, de référence en noir et filtrés en rouge.

Le filtre reçoit un signal assez fortement bruité par moment, le suivi du filtre est relativement correct avec par endroit quelques décrochages notamment sur la température. Les spectres sont nettement corrigés reproduisant les bons niveaux d'énergie avec des cascades satisfaisantes. Ce résultat est rassurant, le modèle tridimensionnel que l'on a construit est valable pour filtrer un signal dans l'atmosphère. L'initialisation de la composante température des particules par des Gaussiennes ne s'est pas fait sans heurt et le filtre a appris le milieu et corrigé les niveaux de température de nos particules. Sans l'avoir étudié, on peut augurer d'une certaine stabilité du filtre particulaire bâti sur le modèle de Das et Durbin. Il y a des effets de couplages entre les composantes, mais les erreurs commises sur

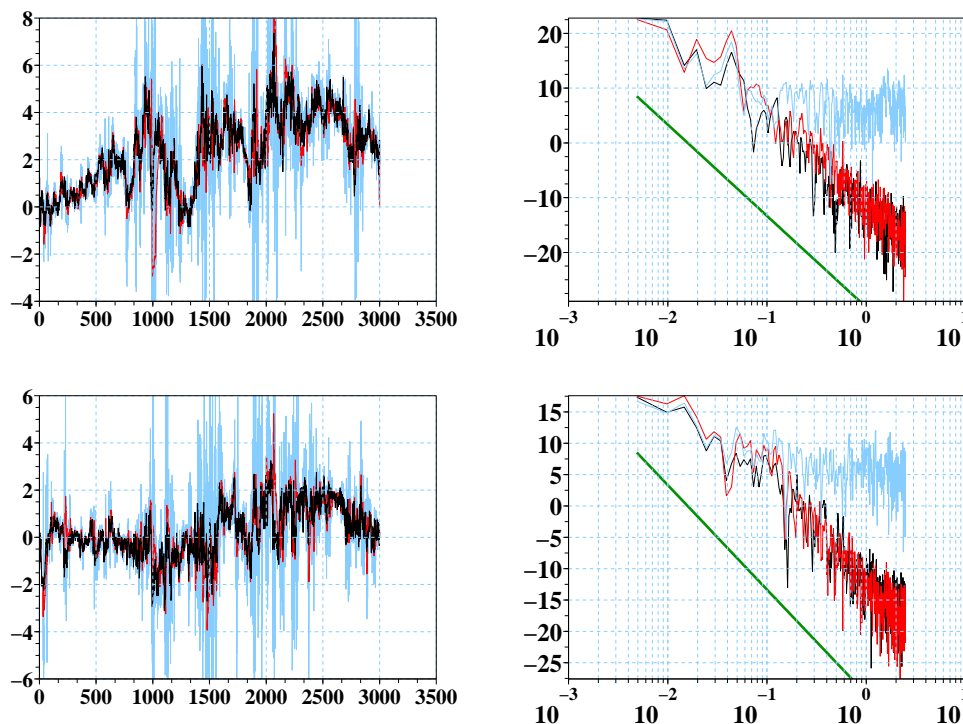


FIG. 9.15 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour le vent horizontal dans un écoulement atmosphérique de dimension 3 (composante  $U$  en haut,  $V$  en bas). En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 800 particules

l'une d'entre elles ne se répercutent que peu sur les estimées des autres.

L'allure des 4 séries temporelles est caractéristique et montre les différences de comportement entre les séries de vents horizontaux, de la vitesse verticale et de la température. Pour la température nous sommes aux limites de résolution du capteur sonique pour ce paramètre et malgré nos précautions nous ne pouvons assurer la pertinence de la température de référence.

Si les estimés sur les paramètres d'état nous paraissent avoir un sens physique, on peut extraire de la séquence de filtrage les quantités utilisées dans le modèle de dynamique et montrer ce qui est la meilleure estimée de chacun d'entre eux. En y mettant les guillemets nécessaires, le filtrage nous a permis de fournir une estimation haute cadence des paramètres caractéristiques de la turbulence (les guillemets portent sur l'exactitude et la pertinence physique du modèle de dynamique au travers duquel ces quantités sont évaluées). Sur la figure 9.17 en haut à gauche on trouve la série temporelle pour le paramètre  $E_n$  qui s'apparente à un taux de dissipation de la turbulence. Par abus de langage, on nommera cette série

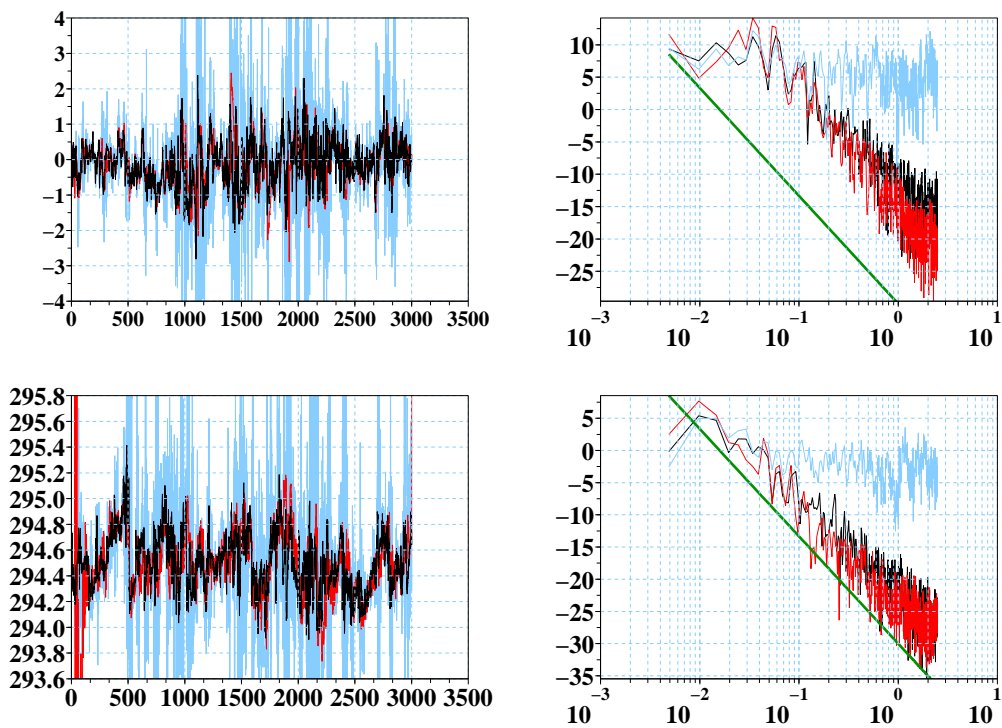


FIG. 9.16 – Séries temporelles et densité spectrale de puissance pour le vent vertical et la température dans un écoulement atmosphérique de dimension 3 (composante  $W$  du vent en haut, température  $\theta$  en bas). En cyan le signal bruité, en noir le signal réel à retrouver et en rouge le signal filtré. Le filtrage utilise 800 particules

« taux de dissipation turbulente ». En haut à droite sur un plan horizontal le long de la trajectoire nous avons placé les composantes horizontales de  $A_n$  qui sont liées à  $\nabla_h \langle p \rangle dt$ . Sur cette image on peut remarquer l'ébauche de structures tourbillonnaires. Au milieu et en bas de 9.17 on voit les valeurs retenues pour les gradients verticaux  $\frac{dU_n}{dz}$ ,  $\frac{dV_n}{dz}$  et  $\frac{d\theta_n}{dz}$  ainsi que celles du coefficient de flottabilité  $\beta_n$ . Sur la série de  $\beta_n$  et sur le gradient  $\frac{d\theta_n}{dz}$  on retrouve les soucis d'initialisation dont nous avons parlé pour la température.

L'observation est alors clairement une méthode d'apprentissage des caractéristiques du fluide. Chaque particule réalise une trajectoire possible de celui-ci dans l'espace des phases, et notre estimé  $\mathbb{E}[V_n | Y_{[0,n]} X_{[0,n]} \in B_{[0,n]}]$  est une réalisation moyenne du fluide étant données les caractéristiques de la turbulence. A terme nous pouvons espérer utiliser ces techniques dans les problèmes d'assimilation des modèles météorologiques hectométriques.

Pour cette application le capteur était fixe, seul le fluide se déplaçait, mais la mesure peut être considérée comme mobile dans un fluide stationnaire ce qui correspond au régime dit de turbulence figée. Dans ce fluide fixe, on peut restituer la pseudo-trajectoire du système d'acquisition. C'est ce que montre la représentation 9.18 où l'on a extrait la trajectoire d'une particule entre les pas de temps 840 et 1040. On retrouve des ébauches de tourbillons pour cette trajectoire en 3 dimensions.

Des 4 composantes d'état, la température est le paramètre estimé le moins satisfaisant. A grande échelle et sur les DSP, les mesures filtrées sont tout à fait valables mais sur certaines périodes, les séries estimées et de référence ont des séquences très différentes.

Soit la mesure du capteur était médiocre et nous avons une référence de piètre qualité, soit le modèle utilisé était trop simple, soit par nos modifications nous avons dégradé la pertinence de la modélisation sur la température. Une voie d'amélioration sera à l'avenir de redonner aux constantes la forme de fonction que leur avaient attribué Das et Durbin.

D'un point de vue purement météorologique il est certainement nécessaire d'avoir une meilleure modélisation du fluide atmosphérique, notamment avec une meilleure prise en compte des phénomènes liés à la convection, la flottabilité, la densité et à la température. Cela passera également par l'introduction d'eau dans le modèle que ce soit sous forme de vapeur ou de contenu en eau.

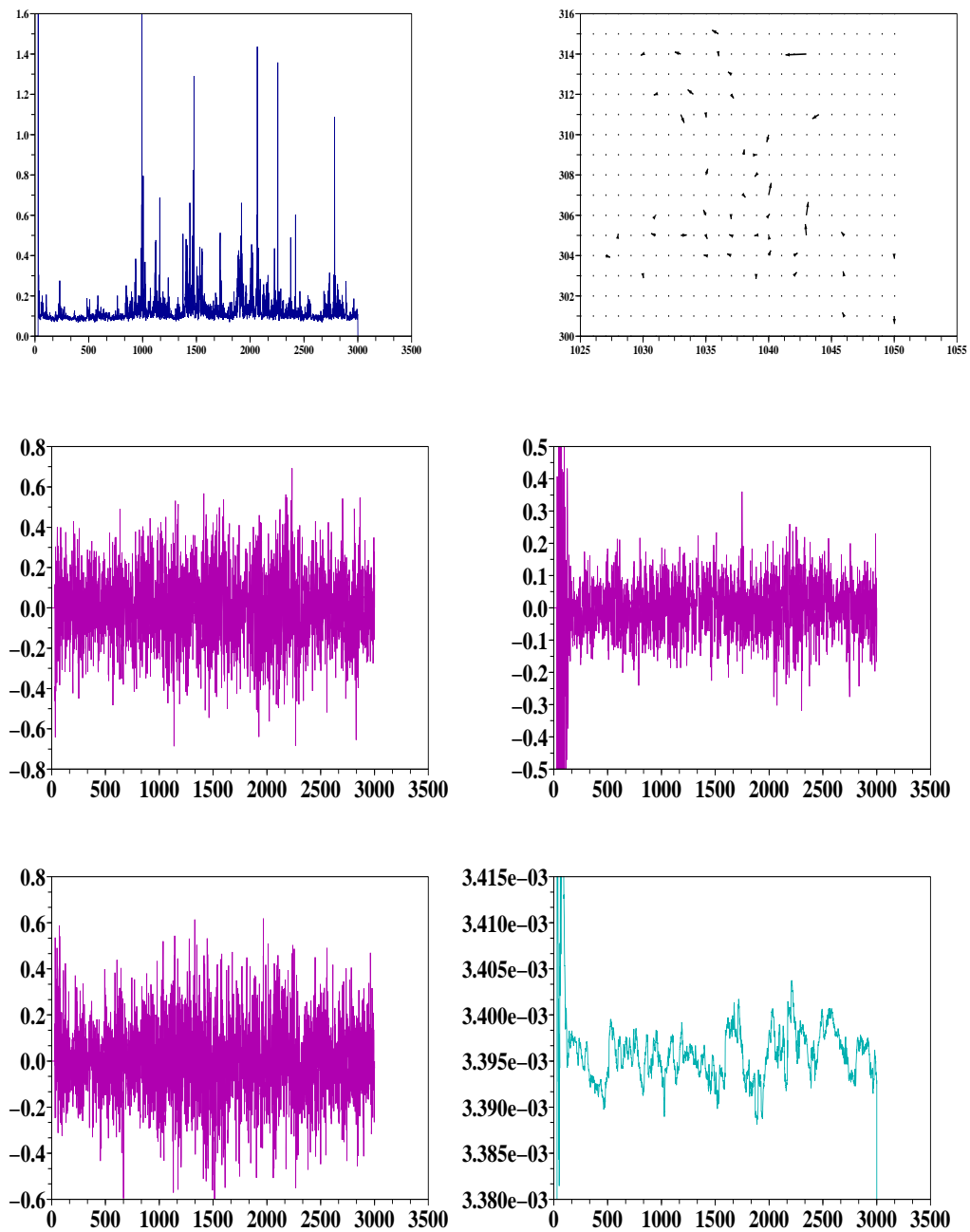


FIG. 9.17 – Séries temporelles des paramètres estimés par le filtre conditionnel avec 800 particules. En haut le taux de dissipation turbulente total  $\varepsilon_n$  et un extrait des vecteurs  $\nabla_h \langle p \rangle dt$  le long de la trajectoire. En bas à gauche les gradients verticaux  $\frac{dU_n}{dz}$  et  $\frac{dV_n}{dz}$  et à droite le gradient  $\frac{d\theta_n}{dz}$  et le coefficient de flottabilité  $\beta_n$ .

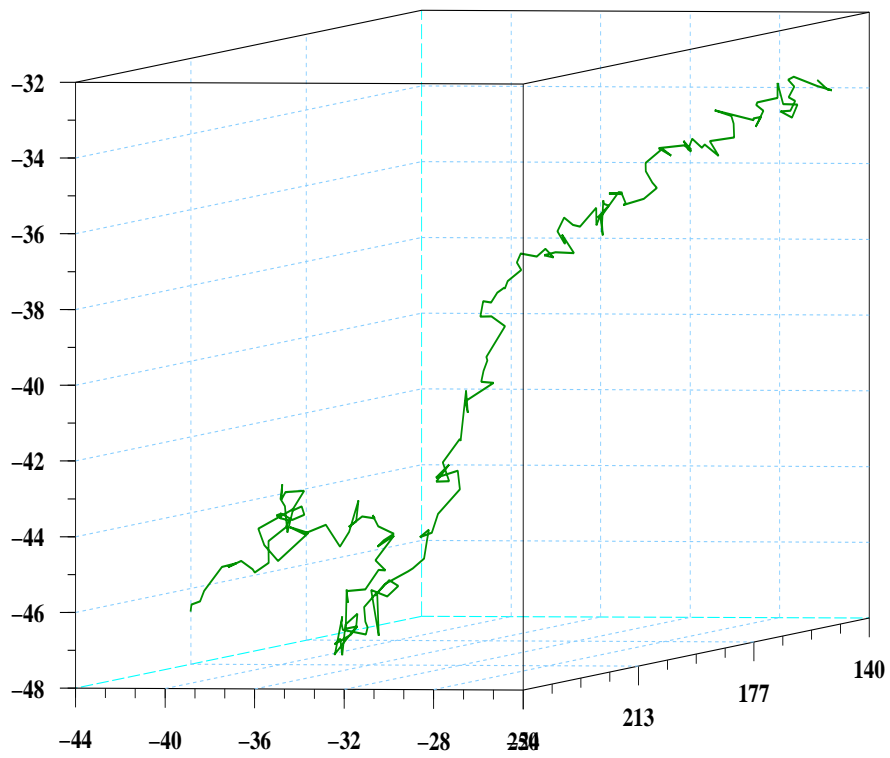


FIG. 9.18 – Trajectoire d'acquisition du système couplé au capteur pour 1 particule entre les instants 840 et 1040.

Néanmoins, notre filtre pour la turbulence atmosphérique est assez robuste, il permet de traiter nombre de cas, mais comme les filtres uni ou bidimensionnel, il a des difficultés à suivre le signal lorsque les écoulements deviennent laminaires. Pour mettre ceci en image, nous présentons sur les 3 figures 9.19, 9.20 et 9.21 les résultats de filtrages sur différents moments de la journée du 30 Août 2006 sur le site de Météo-France à Toulouse, à 03h00, 12h00 et 16h00 UTC, toujours à 5 Hz et pour un filtre contenant 800 particules. Ces 3 cas montrent bien les difficultés que l'on rencontre sur les températures, notamment à 03h00 UTC alors que dans le même temps les composantes du vent restent bien traitées.

Après ces quelques cas pratiques mis en images sur des exemples simulés ou réels de vent, on peut souhaiter avoir des précisions numériques sur la qualité du filtrage en fonction du bruit, du nombre de particules ou s'interroger sur l'apport proprement dit des modèles à champ moyen. C'est ce que nous examinons dans la section suivante.

## 9.5 Estimations numériques des erreurs du filtrage particulaire unidimensionnel

Graphiquement on ne peut juger pleinement de la qualité d'un filtre. Sur les séries temporelles on peut déjà voir que les signaux estimés ne divergent pas du signal de référence, on a pu souligner une certaine stabilité lors d'initialisations inappropriées. L'examen des spectres de puissance a montré que la structure énergétique du signal estimé était correcte, avec le bon niveau de puissance. Mais il faudrait pour terminer pouvoir mesurer objectivement l'écart que l'on commet entre la loi du processus exacte et la loi estimée par le filtre, ou mesurer l'écart en fonction du nombre de particules entre la loi exacte du filtre et la loi approchée que nos particules ont échantillonnée. Ce travail est assez délicat, nous n'avons pas accès aux lois exactes. En revanche dans toutes les applications il a été utilisé un vent de référence qui a servi au bruitage, et auquel on a comparé l'estimée. Ce vent de référence est une réalisation du milieu aléatoire étant donnés les paramètres de celui-ci, ce n'est pas la quantité à estimer, mais on propose de l'utiliser comme telle et de calculer l'écart moyen que le signal filtré a avec lui.

En utilisant cet écart terme à terme entre le signal de référence et le vent estimé on va pouvoir par le calcul d'une moyenne et d'une variance regarder son comportement quand le nombre de particules augmente, ou quand le niveau de

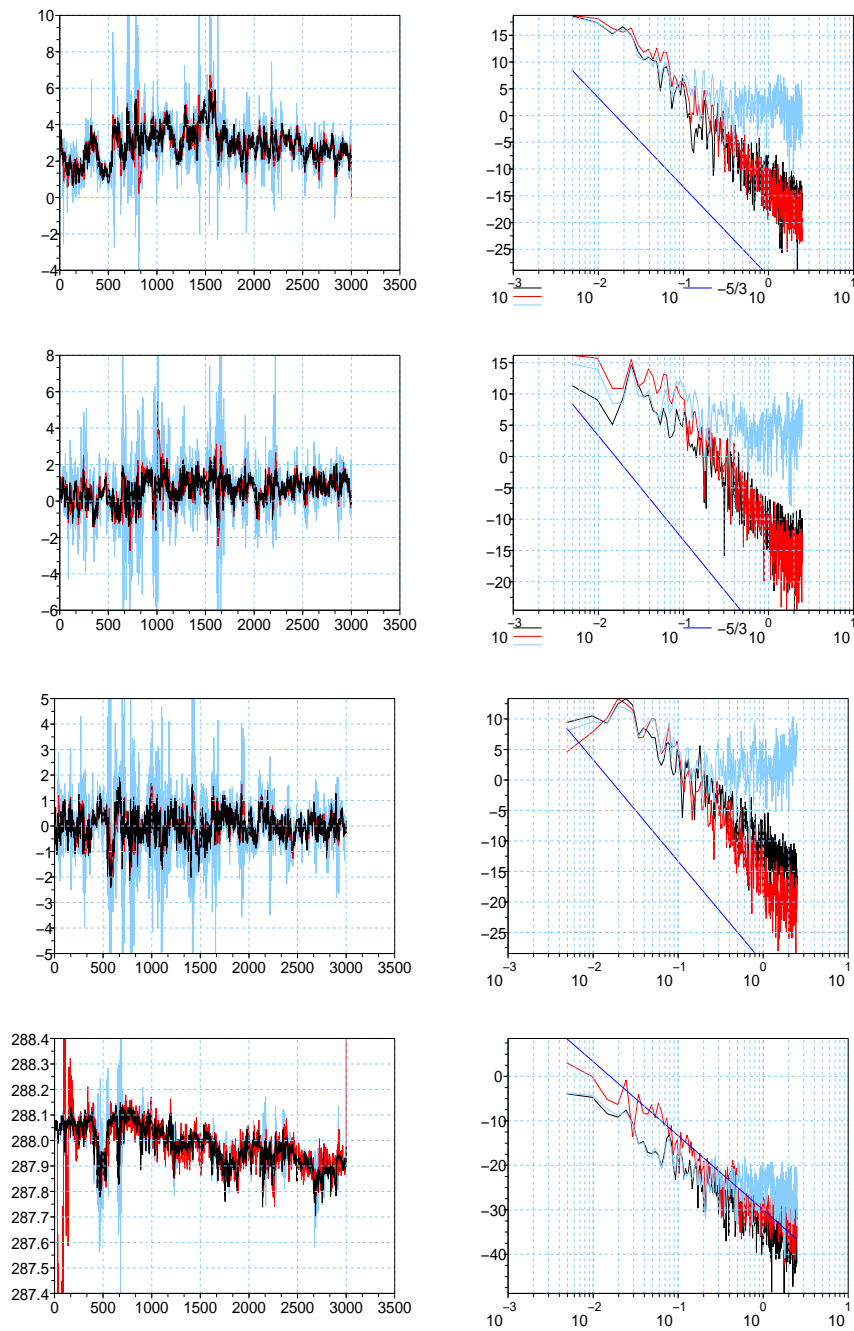


FIG. 9.19 – Séries temporelles et DSP pour le filtrage des données du 30 Août 2006 à 03h00 UTC sur le site de Toulouse. Le filtrage utilise 800 particules. De haut en bas les 2 composantes horizontales du vent, la vitesse verticale  $W$  puis la température  $T$ .



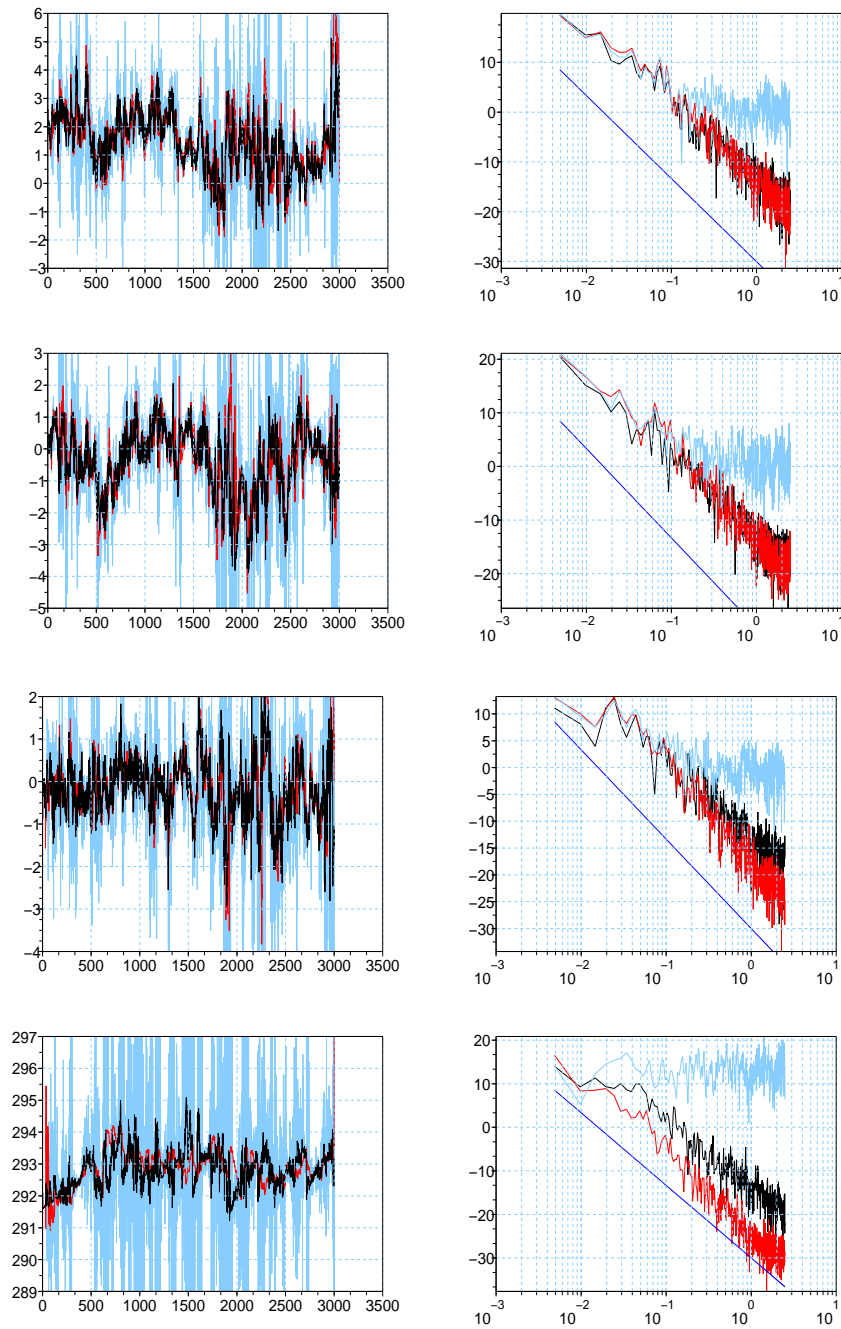


FIG. 9.20 – Séries temporelles et DSP pour le filtrage des données du 30 Août 2006 à 12h00 UTC sur le site de Toulouse. Le filtrage utilise 800 particules. De haut en bas les 2 composantes horizontales du vent, la vitesse verticale  $W$  puis la température  $T$ .

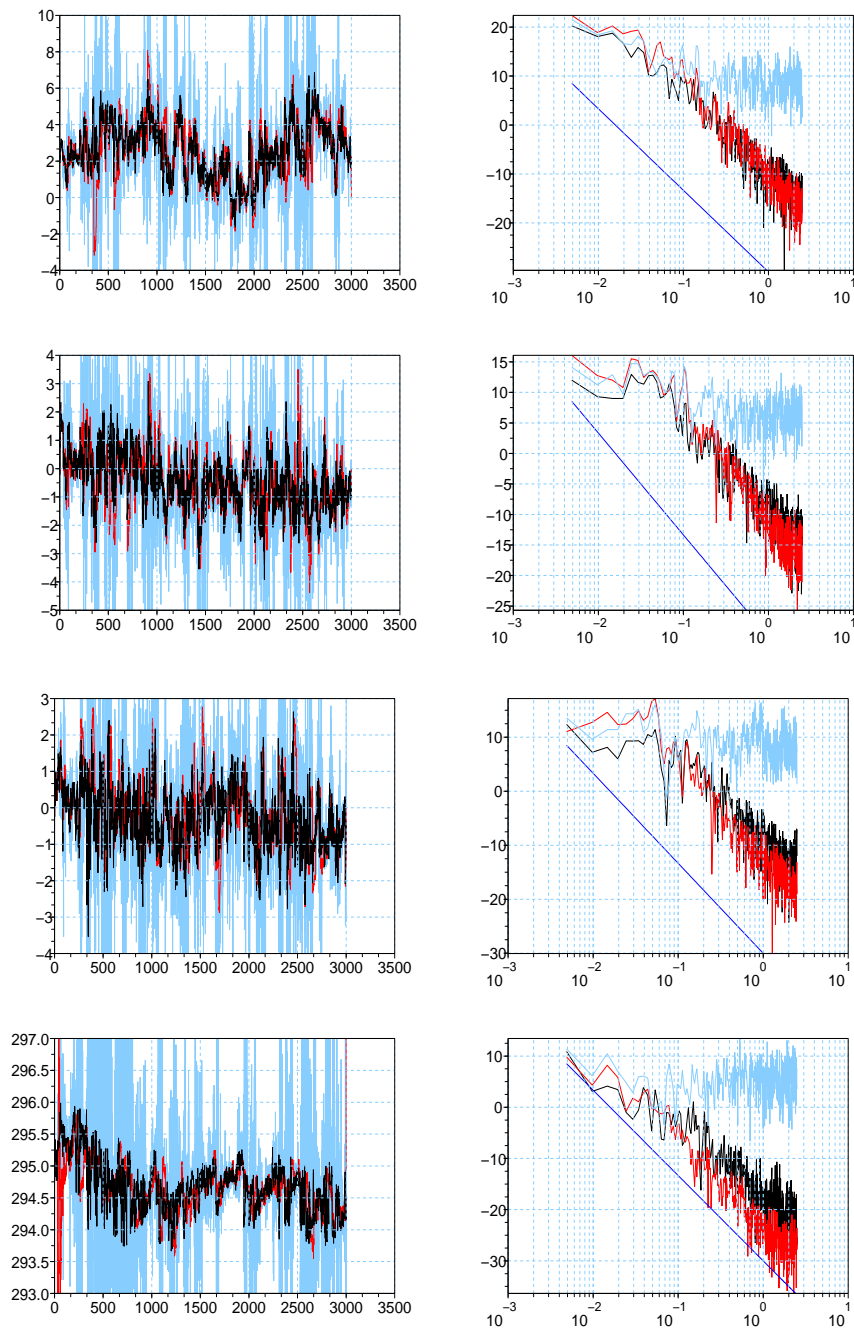


FIG. 9.21 – Séries temporelles et DSP pour le filtrage des données du 30 Août 2006 à 16h00 UTC sur le site de Toulouse. Le filtrage utilise 800 particules. De haut en bas les 2 composantes horizontales du vent, la vitesse verticale  $W$  puis la température  $T$ .

bruit varie pour un vent simulé ou pour un vent réel. On va pouvoir également marquer l'intérêt des modèles Lagrangiens à champ moyen notamment en les modifiant. On dégrade d'abord notre modèle Lagrangien exact en supprimant le terme de fréquence turbulente (le rapport  $\frac{\varepsilon_n}{k_n}$ ) puis dans un second temps en enlevant totalement le terme de rappel au champ moyen  $V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)$ .

Dans les résultats graphiques présentés, on a pu noter des comportements similaires des séries temporelles de vents estimés comparativement à leur référence alors que les composantes du vent horizontal étaient uni, bi ou tridimensionnelles. Ainsi on se contentera pour limiter les coûts numériques de conduire les tests sur des vitesses unidimensionnelles.

### 9.5.1 Ecart au vent de référence simulé ou réel

Dans l'ensemble des tests numériques qui vont suivre, on utilisera soit le signal unidimensionnel que l'on a simulé et présenté sur la figure 9.2 ou le signal réel relevé sur le site de Saint-Sardos le 10 janvier 2005 à 12h00 comme montré sur le graphique 9.6.

Dans les deux cas réel ou simulé, on reprend le même algorithme de filtrage qui nous a permis de produire les illustrations. Pour se faire les lois du filtrage ont été approchées par des systèmes de particules évoluant selon les équations 8.45 qui correspondent au modèle de dynamique :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + \left[ \mathbb{E}(\alpha_n) / \Delta t + C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)] \right] \Delta t \\ &\quad + \sqrt{C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n)} \Delta W_n^V \end{cases} \quad (9.5)$$

Pour l'observation nous choisissons le modèle direct, le plus simple :

$$Y_n = V_n + \sigma W_n^Y \quad (9.6)$$

où  $W_n^Y$  est un processus de Wiener standard et  $V_n$  est une variable bornée.

Notre filtre particulière sera d'abord testé avec un nombre grandissant de particules de 100 à 700 particules et des écarts-types du bruit Gaussien s'étageant entre  $\frac{1}{7}$  et  $\frac{3}{2}$ . Pour chaque configuration, nous avons calculé l'écart à chaque pas de temps entre le vent de référence et l'estimé, puis calculé la moyenne absolue et la variance empirique de tous les écarts. Nous avons ensuite répété l'opération

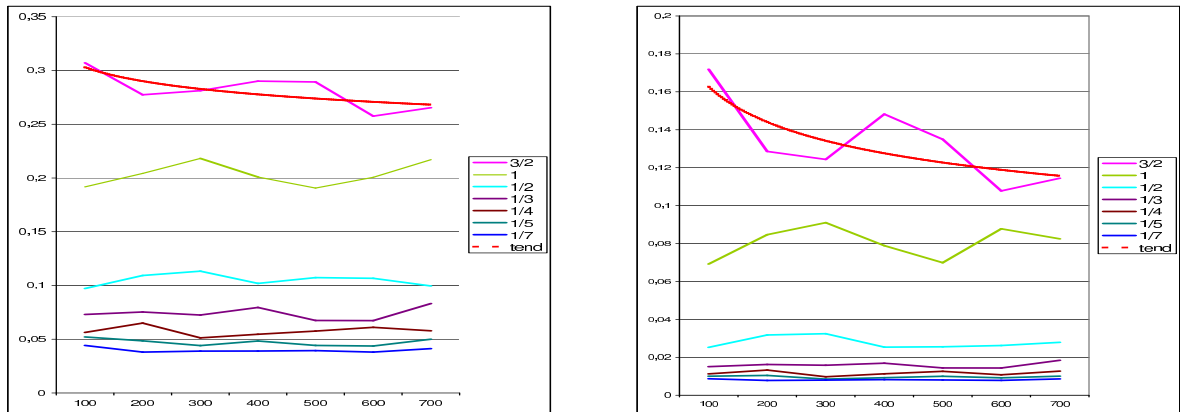


FIG. 9.22 – Ecart entre le vent de référence simulé et le vent estimé. Moyenne et variance sur un échantillon de 5 réalisations en fonction du nombre de particules et du niveau de bruit.

sur plusieurs simulations. Par le nombre de simulations à faire et les temps de calculs, elles ont été limitées à 5. C'est insuffisant pour des statistiques mais cela permettra d'avoir des tendances sur le comportement de l'algorithme particulière. Nous nous bornerons à des constatations en ébauchant des explications.

Les illustrations 9.22 et 9.23 donnent les courbes des moyennes absolues et écarts-types tracés à partir des tableaux de l'Annexe B.

La figure 9.22 concerne les écarts entre le vent simulé et ses estimés. Les écarts-type du bruit sont de  $\frac{3}{2}$  (courbe rose), 1 (vert),  $\frac{1}{2}$  (cyan),  $\frac{1}{3}$  (violet),  $\frac{1}{4}$  (marron),  $\frac{1}{5}$  (bleu-vert) et  $\frac{1}{7}$  (en bleu). En abscisse les systèmes de particules sont composés de 100, 200, 300, 400, 500, 600 et 700 éléments. A été rajoutée la courbe rouge qui est l'ajustement au sens des moindres carrés d'une courbe du type  $y = A.x^{-B}$ . Pour la moyenne le paramètre  $A$  vaut 0,303 et  $B = 0,0627$ , pour la variance  $A = 0,1627$  et  $B = 0,1752$ .

Plusieurs éléments sont à constater. D'abord pour un bruit élevé, la décroissance en fonction du nombre  $N$  de particules se fait selon une loi en puissance plus plate que la fonction  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . L'aplatissement est total pour des bruits faibles mais sans aller au zéro.

Quand les bruits sont peu importants, il n'est nécessaire que de peu de particules pour débruiter. Quand le nombre de particules de filtrage devient important celles-ci restent proches des mêmes états donnant une forte concentration de particules dans l'espace d'état. D'un autre côté la dynamique à champ moyen conditionnel nécessite un nombre suffisant de points de l'espace des phases échantillonnés pour approcher correctement la loi conditionnelle. On peut alors penser

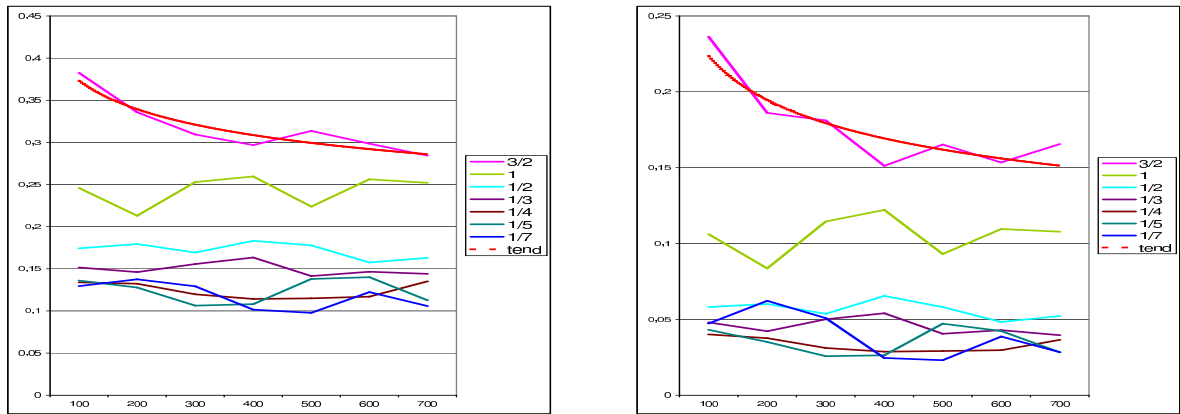


FIG. 9.23 – Ecart entre le vent de référence réel et le vent estimé. Moyenne et variance sur un échantillon de 5 réalisations en fonction du nombre de particules et du niveau de bruit

qu'avec des bruits petits le champ moyen n'est pas correctement suivi et que la dynamique n'est pas suffisamment bien reproduite, d'où le peu de gain par augmentation du nombre de particules.

Nous ne pouvons pas conclure de manière certaine, l'écart portant sur une réalisation du milieu pris comme référence et peu de simulations ont été faites, mais si c'est le cas il conviendrait de se tourner vers la technique classique où le champ moyen est appris sur des systèmes évoluant a priori.

Dans la seconde situation, dont les résultats sont visibles sur la figure 9.23, nous comparons les écarts entre le vent réel pris en référence et les estimés du filtre. Les niveaux de bruits et le code couleur sont identiques à la figure précédente. Les courbes d'ajustement ont pour coefficients  $A = 0,3731$ ,  $B = 0,1368$  pour la moyenne et  $A = 0,2237$  et  $0,2008$  pour la variance.

Quel que soit le niveau de bruit, les courbes ont des pentes plus marquées que pour le cas simulé. On note également qu'elles ont des niveaux plus élevés. Les différences de comportement de ces moyennes et variance par rapport aux écarts aux vitesses simulées peuvent être dues à un modèle de dynamique qui n'est pas parfait pour les données réelles unidimensionnelles. Il est vrai que la donnée originale provient d'un écoulement de dimension 3 d'un fluide pesant pour lequel nous n'avons retenu qu'une composante horizontale.

Ces essais nous ont permis de dégager les difficultés du filtrage conditionnel pour un processus à champ moyen, particulièrement lorsque les bruits de mesures se réduisent. Pour le traitement du vent réel on s'est interrogé sur la qualité du modèle Lagrangien. On peut noter que l'échantillon de vent réel a des vitesses

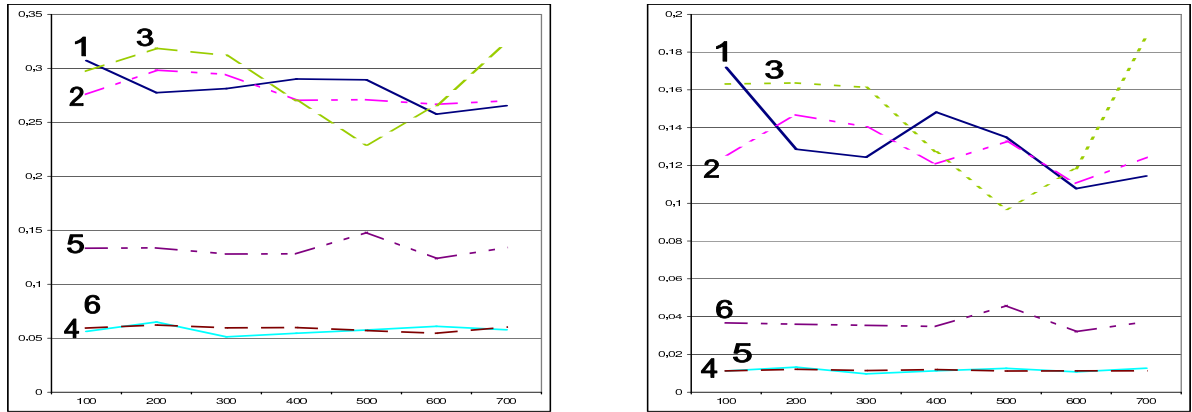


FIG. 9.24 – Écarts entre le vent estimé et le vent simulé avec les 3 sortes de modèles. A gauche les moyennes sur un jeu de 5 séries de simulation, à droite la variance. 1- Modèle exact,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 2- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 3- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 4- Modèle exact,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 5- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 6- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{1}{4}$

deux fois supérieures à la celui de la simulation. L'étape de localisation pour suivre le capteur qui est nécessaire à la modélisation Lagrangienne doit perturber plus fortement le filtrage dans le cas réel.

### 9.5.2 Modifications du modèle et erreurs correspondantes

Maintenant, pour tester la pertinence et l'apport du modèle Lagrangien à champ moyen, on propose de dégrader progressivement le modèle de Pope, d'abord en rendant fixe la fréquence turbulente, le rapport  $\frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n)}{k_n}$ , qui pondère dans le modèle 9.5 le terme de rappel au champ moyen, puis en supprimant complètement le terme de champ moyen,  $V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)$ .

On conduit alors les mêmes expériences avec un nombre de particules qui s'échelonnent entre 100 et 700 et les mêmes niveaux de bruits.

Pour les graphiques qui suivent, pour des raisons de clarté nous ne présentons que 2 niveaux de bruits d'observations, un fort  $\sigma = \frac{3}{2}$  et un faible  $\sigma = \frac{1}{5}$ . Nous comparons alors les moyennes et variances des écarts pour le modèle complet exact, pour le modèle avec la fréquence turbulente constante et valant 1 et pour le modèle sans champ moyen se réduisant à  $V_{n+1} = V_n + \mathbb{E}(\alpha_n) + C_1[V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)]\Delta t + \sqrt{C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n)} \Delta W_n^V$ . Nous prenons comme référence d'abord le vent simulé, figure 9.24 puis le vent réel, figure 9.25.

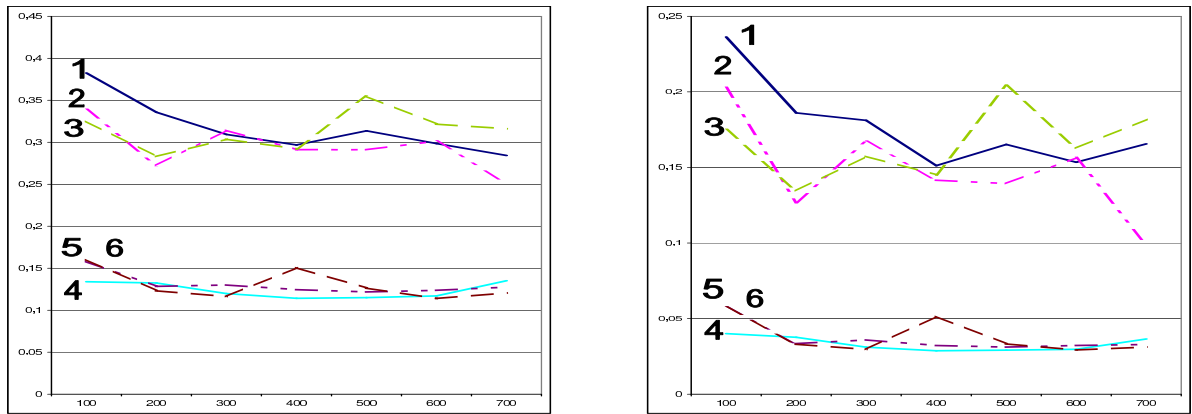


FIG. 9.25 – Écarts entre le vent estimé et le vent réel avec les 3 sortes de modèles. A gauche les moyennes sur un jeu de 5 séries de simulation, à droite la variance. 1- Modèle exact,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 2- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 3- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 4- Modèle exact,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 5- Modèle sans fréquence turbulente,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , 6- Modèle sans champ moyen,  $\sigma = \frac{1}{4}$

Sur le graphique 9.24 on remarque qu'en bruit fort, les résultats semblent légèrement meilleurs avec un champ moyen que sans, même avec une fréquence turbulente constante, mais qu'en bruit faible l'absence de pondération par la fréquence turbulente dégrade fortement le filtrage. Des 3 modèles seul le modèle complet possède des courbes de moyenne et de variance suivant une fonction puissance.

Pour un vent réel, sur le graphique 9.25, on voit qu'en bruit faible les courbes pour le modèle exact ou le modèle sans champ moyen sont remontées et revenues au niveau de la courbe avec une fréquence turbulente constante. L'erreur sur le modèle est alors moins flagrante. Là encore la prise en compte du champ moyen semble avoir un apport positif quand le nombre de particule augmente.

On termine la présentation de ces graphiques en juxtaposant pour le vent réel et le vent simulé les résultats des modèles exact et des modèles sans champ moyen sur la figure 9.26 pour les 2 niveaux de bruits fort et faible.

On retrouve les caractéristiques que l'on vient de décrire, mais il est surtout intéressant de noter que dans le cas d'un bruit faible, le décalage entre les courbes pour le vent simulé et le vent réel est constant. Cette différence pourrait s'interpréter comme l'erreur systématique du modèle de Pope vis à vis de l'écoulement atmosphérique.

Dans les bruits faibles la contribution du champ moyen est moins nette, mais les moyennes et variance seules ne sont pas suffisantes pour porter un jugement. On va conclure ce chapitre par l'examen des séries et spectres de puissance du

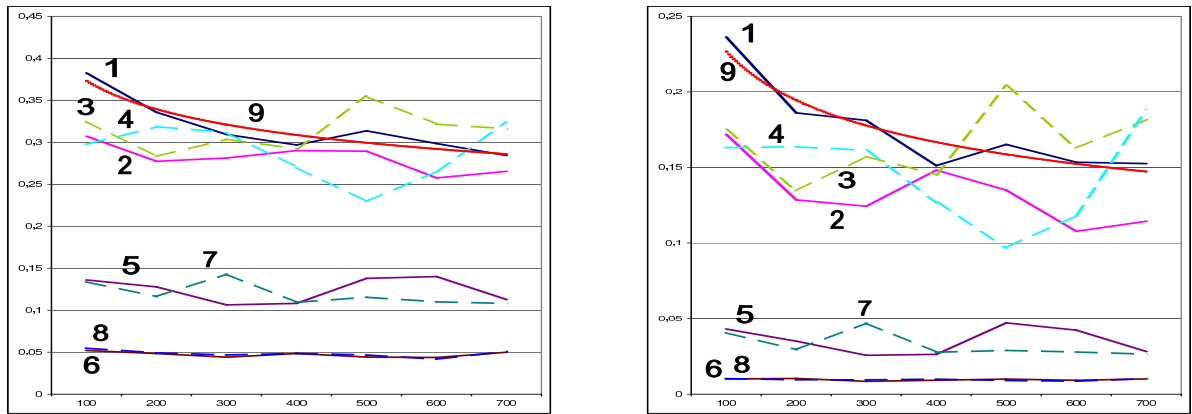


FIG. 9.26 – Comparaison entre le modèle exact et le modèle sans champ moyen, pour les écarts entre le vent estimé et les vents réel ou simulé. A gauche les moyennes sur un jeu de 5 séries de simulation, à droite la variance. 1- Modèle exact vent réel,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 2- Modèle exact vent simulé,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 3- Modèle sans champ moyen vent réel,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 4- Modèle sans champ moyen vent simulé,  $\sigma = \frac{3}{2}$ , 5- Modèle exact vent réel,  $\sigma = \frac{1}{5}$ , 6- Modèle exact vent simulé,  $\sigma = \frac{1}{5}$ , 7- Modèle sans champ moyen vent réel,  $\sigma = \frac{1}{5}$ , 8- Modèle sans champ moyen vent simulé, bruit  $\frac{1}{5}$ , 9- Courbe de tendance de la série n° 1

filtrage obtenu par ce modèle dégradé.

### 9.5.3 Essais de filtrage utilisant le modèle sans champ moyen

La section précédente nous a permis de comparer les résultats du filtrage obtenu par l'algorithme utilisant le modèle Lagrangien complet avec le même modèle sans le champ moyen. Nous pouvons montrer le résultat du filtrage d'une série temporelle de vent réel perturbée par un bruit gaussien et débruitée en suivant le modèle dégradé sans champ moyen. La figure 9.27 montre le résultat pour un filtre particulière à sélection génétique, avec une étape de localisation pour suivre le capteur utilisant 500 particules.

Sur la série temporelle il est visible que les structures de grandes échelles sont respectées mais que les variations rapides sont moins bien restituées. Ce fait est confirmé par la réponse spectrale qui creuse et ne s'ajuste pas à celle du signal de référence. Ainsi sans le terme de champ moyen le signal estimé suit une trajectoire médiane reflétant moins les caractéristiques du milieu. Le terme de champ moyen qui est un rappel à l'isotropie et une modélisation des fluctuations rapides est donc important dans la modélisation du fluide pour le processus de filtrage.



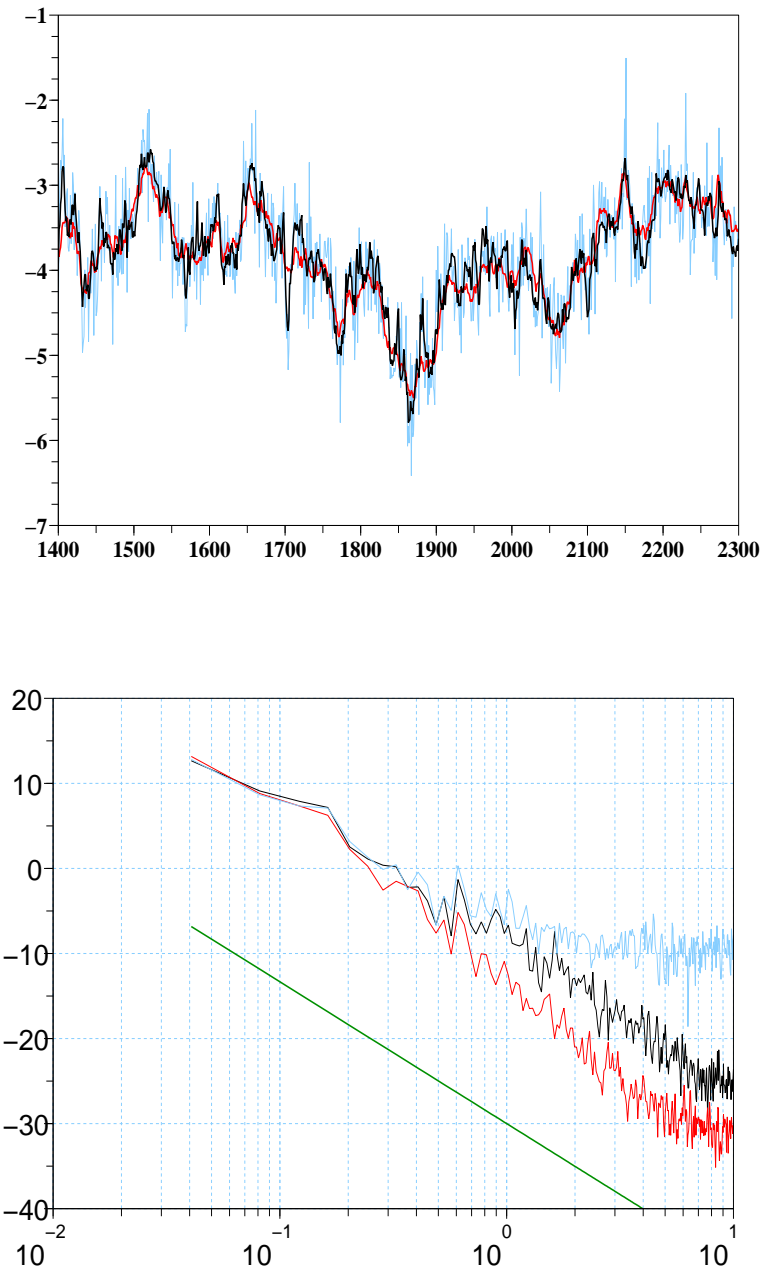


FIG. 9.27 – Séries temporelles et DSP pour le filtrage de Saint-Sardos utilisant un filtre particulaire génétique avec 500 particules

Pour confirmer cette remarque et vérifier que le fait ne vient pas de notre algorithme de filtrage, on peut proposer d'utiliser un autre type de filtre.

En effet, profitant de la structure plus simple de la dynamique, en fait linéaire, l'occasion nous est donnée de mettre en œuvre au lieu du filtre génétique, un système de filtres de Kalman en interaction. Chaque filtre de Kalman utilise le résultat des autres pour apprendre et nourrir le paramètre  $\mathbb{E}(\alpha_n)$ , ensuite les Kalman évoluent et sont mis en compétition dans une étape de sélection. La description des filtres de Kalman en interaction est faite dans l'annexe A.

Le graphique 9.28 présente une réalisation du filtrage sur la même série que précédemment avec le modèle dégradé et des filtres de Kalman interagissants. Dans ce dernier cas, pour ce qui est des séries temporelles, on note que le signal estimé a moins tendance à moyenniser, mais qu'il est en permanence en retard, comme pour un filtre de Kalman en phase de poursuite pour capturer le bon état dans l'espace des phases. Pour la densité spectrale de puissance on obtient la même structure que précédemment ce qui confirme la nécessité de placer un terme de champ moyen dans la dynamique pour restituer correctement les cascades énergétiques.

In fine le filtre que nous avons développé est celui qui possède les meilleurs compromis de précision, de propriétés spectrales, énergétiques et de coût de calcul. C'est également celui qui répond le plus complètement au problème de la mesure mobile dans un champ vectoriel aléatoire.

L'ensemble des applications numériques que nous avons menées a été présenté dans ce chapitre. Elles ont été la concrétisation des techniques de filtrage nouvelles que nous avons développées. Nous en avons vu l'efficacité et les limites, et également les défauts. Tout ceci nous donne la matière à conclure et la voie à suivre pour les développements futurs.

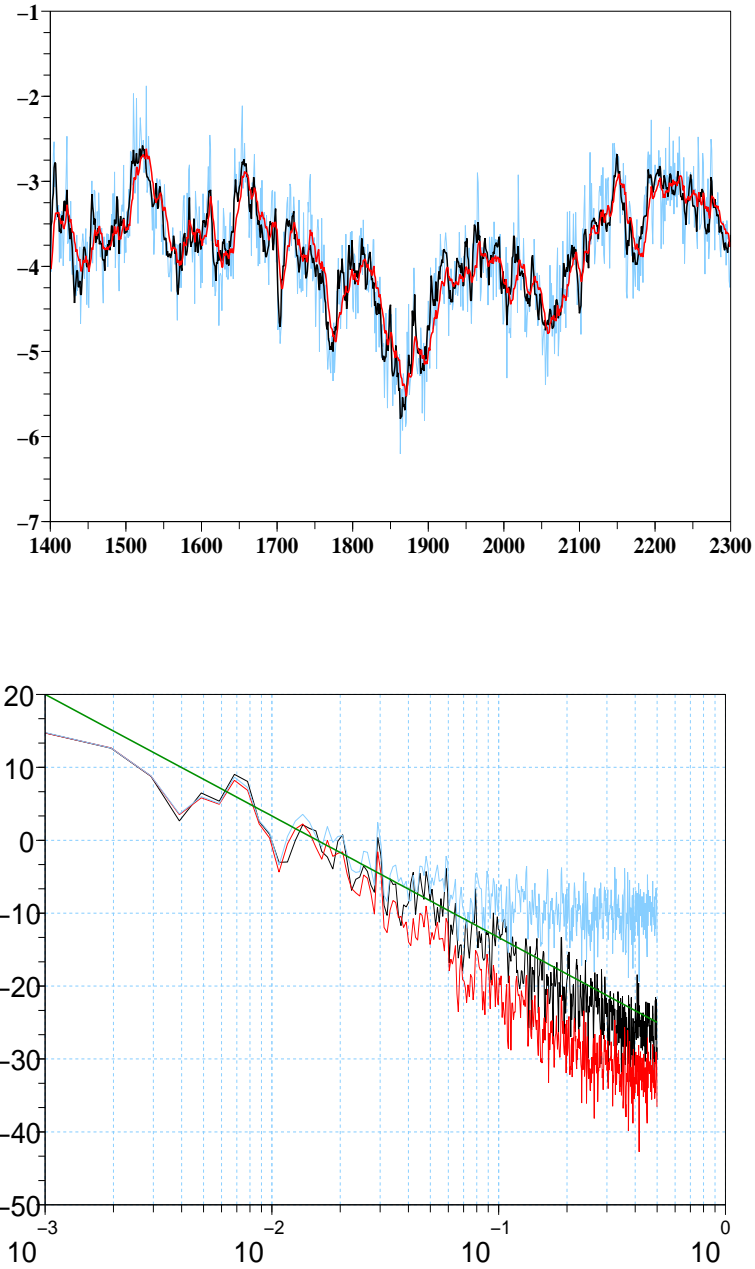


FIG. 9.28 – Séries temporelles et DSP pour le filtrage de Saint-Sardos utilisant 1000 filtres de Kalman en interaction

# Chapitre 10

## Conclusions et Perspectives

L'étude que nous avons conduite dans cette thèse nous a permis de défricher et de proposer des premières solutions pour un domaine qui était vierge de toute entreprise. Ce travail d'ingénierie stochastique a également été la source de développements de modélisation mathématiques innovantes pour la mécanique des fluides, la turbulence atmosphérique et les mesures réalisées ponctuellement dans un milieu aléatoire.

Au cours de la dernière décennie, la technique du filtrage particulaire a pris un essor particulier, tant du côté des mathématiques appliquées que du côté des sciences de l'ingénieur. La théorie probabiliste est maintenant bien en place et les applications en physique, en chimie, en statistique, en finance sont nombreuses. L'approximation particulaire du filtrage non-linéaire donne lieu maintenant à des traitements en temps réel dans les problèmes de poursuite de cibles, de suivi de terrain et de débruitage de signaux radar ou sonar.

Mais les travaux appliqués n'ont que peu porté sur la mécanique des fluides. Les premiers d'entre eux sont à mettre au crédit d'Anne Cuzol et Etienne Mémin de l'IRISA de Rennes sur le suivi d'un fluide bidimensionnel à l'aide d'image par une technique de filtrage stochastique.

Sur le débruitage des signaux issus de mesures expérimentales recueillis dans un fluide turbulent il n'existait pas de filtres non-linéaires adaptés. Dans ce mémoire, nous avons développé et analysé une méthode permettant de traiter ce type de données et fournit son approximation particulaire.

Dans les premiers chapitres nous avons présenté les connaissances sur lesquelles

notre étude s'est assise et posé le problème du filtrage non-linéaire d'un processus aléatoire. Afin de pouvoir être appliqué à la mécanique des fluides nous avons dans le chapitre 6 étendu le filtrage aux processus à champ moyen en traitant divers cas, dont celui d'un processus conditionné aux observations.

Dans le chapitre 7 nous avons présenté un nouvel outil, l'acquisition d'un champ de vecteur stochastique le long d'un chemin aléatoire. Cet objet mathématique nous a permis alors de réaliser le couplage entre les modèles Lagrangiens, le système d'observation et la trajectoire d'un capteur mobile. Le modèle Lagrangien est alors fermé par l'observation en conditionnant le noyau de Markov, la poursuite du point de mesure s'effectue par un processus de sélection en conditionnant le processus à vivre dans des boules autour du chemin d'acquisition. Ces couplages permettent d'obtenir un filtre à champ moyen conditionnel qui est numériquement moins coûteux que l'algorithme utilisant une dynamique a priori.

Le filtre non-linéaire pour les fluides turbulents et son approximation particulière présentée au chapitre 8 ne sont alors plus qu'une conséquence des algorithmes correspondants au filtrage des processus à champ moyen et à l'estimation des processus d'acquisitions couplés. Les filtres ont été écrits pour des écoulements allant du symbolique fluide unidimensionnel au fluide atmosphérique tridimensionnel pesant avec des couplages par la température du milieu et par les gradients verticaux de vitesse.

Nous avons testé la méthode sur des cas typiques de filtrage de mesures issues de fluides turbulents dans le domaine de la turbulence inertielle.

Notre algorithme nous a permis de débruiter les mesures de vitesses d'un fluide turbulent tantôt simulé tantôt réel et d'en estimer les paramètres caractéristiques. Nous avons alors pu faire varier les types et les niveaux de bruits et comparer différentes techniques de filtrage.

La puissance des techniques particulières stochastiques a été mise en valeur, notamment en permettant le couplage des systèmes d'acquisition et la fermeture du modèle Lagrangien par les observations. Les résultats probants obtenus ici ont pu être en partie quantifiés, nous rassurant quant au comportement du filtre quand le nombre de particules va en augmentant. Cette dernière partie nous a montré également certaines difficultés portant sur le degré de finesse de la modélisation Lagrangienne que nous avons retenue.

Pour poursuivre ce travail, il serait intéressant d'appliquer cette méthode à

d'autres cas d'écoulement, aussi bien numériques que réels, atmosphériques mais aussi de laboratoire. Cette étude en ouvrant un domaine peu exploré nous a également suggéré de nombreuses perspectives.

Tout d'abord dans le domaine de l'ingénierie stochastique, la technique des processus d'acquisition est prometteuse. Elle permet de rendre compte des mesures dans un fluide qu'elles soient fixes ou mobiles, mais aussi d'aborder les problèmes de modélisation et d'assimilation de processus aléatoires sous-maille approchés par leurs modèles Lagrangiens autour des points de grille.

Pour filtrer les mesures de systèmes d'acquisition comme pour toute autre donnée, il faut 2 jeux d'équations. L'un porte sur la dynamique du signal suivi, l'autre porte sur l'observateur. Les améliorations du filtre passeront par de meilleures modélisations de ces deux processus.

Les mesures atmosphériques sont rarement effectuées directement. Dans le cas des mesures anémométriques par ultrasons, comme celle que nous avons utilisée, la mesure réelle est un temps de propagation acoustique. Il y aurait intérêt à prendre comme mesure de base ces temps afin de débruiter à la source de la mesure. Dans le problème des mesures mobiles en atmosphère nous n'avons pas accès directement à la mesure de la vitesse du fluide seulement à l'influence de la vitesse relative du capteur par rapport au fluide sur ces divers éléments sensibles. Dans cette mesure mobile le problème de filtrage se rattache en premier lieu à un problème d'estimation du milieu par fusion de données. Ce travail sur la formalisation de l'équation d'observation est essentielle et prend une grande part dans la qualité des résultats, c'est elle qui donne sa pertinence à l'étape de sélection.

Cette amélioration importante dans l'estimation des mesures faites par les capteurs mobiles sera alors applicable pour les mesures aéroportés et pourra être proposée à la communauté des micro-physiciens de l'atmosphère comme filière de traitement des données rapides et pourra également initier la conception d'une nouvelle génération de systèmes de mesures croisées, intégrées dans un même dispositif.

Pour valider expérimentalement la technique proposée pour les mesures directes et mobiles de vent, il sera nécessaire de mettre au point et de réaliser une campagne expérimentale de mesure où les capteurs seront montés sur une plateforme ayant une trajectoire rectiligne et pour laquelle on peut faire varier la vitesse de déplacement.

Cette thèse amène également des suites plus météorologiques. D'abord en travaillant sur une meilleure modélisation de la dynamique Lagrangienne du fluide atmosphérique dans le domaine turbulent. Le chapitre 9 nous avait montré que le modèle de température que l'on avait retenu n'était pas parfait (mais suffisamment pour filtrer de manière satisfaisante). Il faut donc commencer par revenir aux termes donnés par Das et Durbin dans leur article, mais il sera également nécessaire de « rajouter de l'eau dans l'atmosphère ». Pour se faire il faut caractériser pleinement l'évolution de la densité des éléments de fluide, quantité dépendant de la température et de l'humidité, de rajouter un contenu en eau sous forme d'un processus de diffusion. Ces termes réécrits doivent modifier le terme de flottabilité et prendre en compte les phénomènes de convection.

Depuis longtemps des mesures en vue d'étudier les paramètres de la turbulence en météorologie sont faites par la communauté des météorologistes. Mais jusqu'alors ces mesures sont intégrées sur des très longs pas de temps pour obtenir des grandeurs moyennes.

Avec l'apprentissage du fluide faite par notre filtre, dès que les modèles servant à filtrer les mesures ont une pertinence physique suffisante pour le fluide atmosphérique, nous serons aptes à proposer des grandeurs caractérisant la turbulence à tous les instants.

On peut déjà avec les essais faits au chapitre 9 montrer que les filières standard de calcul des flux turbulents utilisant nos séries filtrées ou les données de référence aboutissent à des résultats identiques. Le graphique 10.1 illustre cela sur un exemple. Nous avons reporté les séries temporelles filtrées ainsi que les moyennes Eulériennes approchées par le filtre en rouge. La filière de calcul classique approche la moyenne locale par un filtre linéaire du premier ordre (voir chapitre 4) que nous avons placé en vert. On calcule ensuite empiriquement les termes de covariance  $\langle w'T' \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w'_i T'_i$  et le coefficient  $\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\langle u'_i w'_i \rangle^2 + \langle v'_i w'_i \rangle^2}$  où les variables primées sont les fluctuations relatives aux 2 types de moyennes. Les quantités obtenues sont équivalentes,  $\langle w'T' \rangle = 0.01255$  pour le calcul utilisant les moyennes Eulériennes de notre filtre et 0.01248 pour la filière classique. De même pour le coefficient noté  $\tau$ , l'estimation par notre filtre donne  $\tau = 0.220$  et le calcul classique  $\tau = 0.211$ .

Cette première tentative de calcul des éléments des flux turbulents nous laisse entrevoir plusieurs opportunités.

D'abord en fournissant des données caractérisant la turbulence et ses flux à

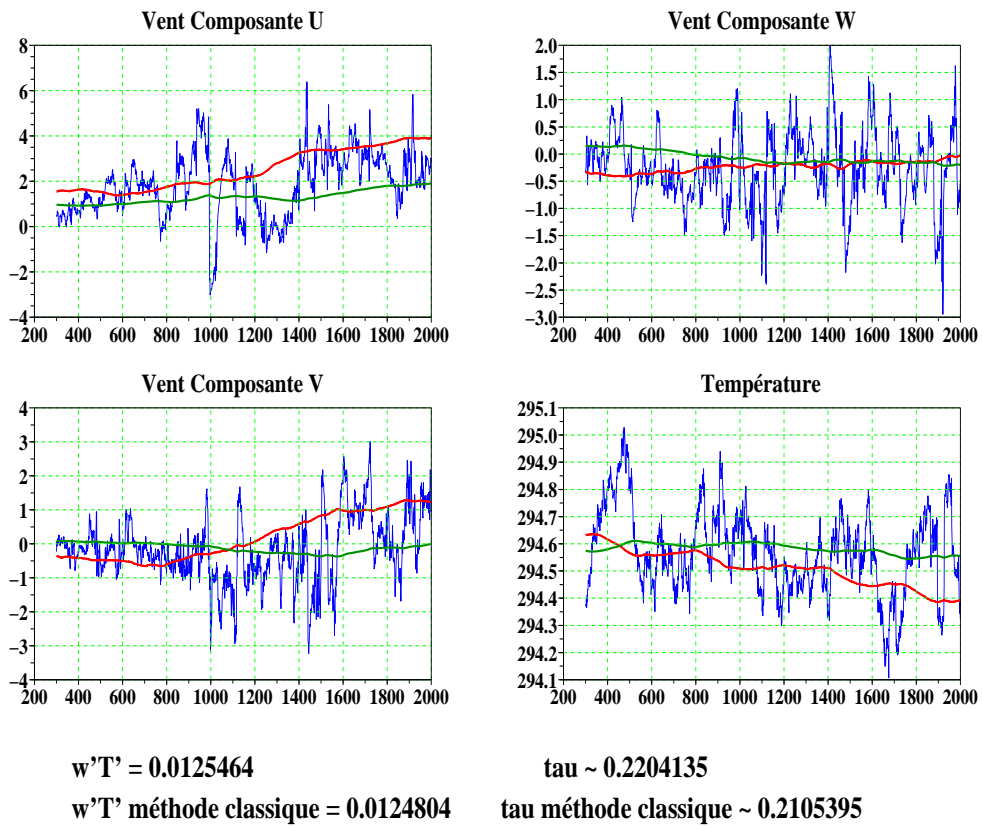


FIG. 10.1 – Calculs effectués sur l'ensemble de la période pour estimer :  $\mathbb{E}(w'T') \sim \langle w'T' \rangle$  et  $\tau \sim \sqrt{\langle u'w' \rangle^2 + \langle v'w' \rangle^2}$



haute cadence. Ensuite en proposant une méthode d'estimation et d'assimilation de grandeurs turbulentes dans les modèles météorologiques de meso-échelle voire hectométriques.

Ces volets techniques ne masquent pas les perspectives d'étude que nous pourrions mener avant tout dans le domaine des mathématiques appliquées.

Le chapitre 6 a donné les premiers éléments de l'étude du filtrage des processus à champ moyen en particulier dans les dynamiques conditionnelles. Il conviendra de terminer ce travail initié avec François Le Gland et poursuivre ces estimés  $L^p$  par une étude du TCL associé, de la stabilité du filtre, des propriétés de propagation du chaos, etc.

Dans le même temps, les processus déduits des systèmes d'acquisition généraux mériteraient d'être étudiés en détail, notamment lors des couplages du processus le long d'un chemin avec les dynamiques Lagrangiennes.

A plusieurs reprises dans ce travail, les algorithmes de filtrage par systèmes de particules en interaction ont croisé diverses formes de filtres de Kalman. Il faudra poursuivre l'interprétation du filtre de Kalman d'ensemble (EnKF) en terme de processus à champ moyen de type McKean-Vlasov présentée à l'annexe A. Ce travail commencé avec Pierre Del Moral doit conduire à des résultats limites sur les EnKF et laisse entrevoir une nouvelle génération de filtres particulières avec une étape de sélection plus sous forme d'un processus de correction que d'un processus de branchement classique, pour les cas non gaussiens.

Parallèlement à ce travail sur les EnKF qui doit permettre de filtrer des signaux issus de la mécanique des fluides, les filtres de Kalman en interaction, introduits dans Del Moral (2004), devraient également permettre de traiter des signaux ayant des dynamiques à champ moyen. L'exemple montré à la fin du chapitre 9 en est une première réalisation. Les états pilotés chacun par un Kalman apprennent le champ moyen, l'ensemble des Kalman interagissent au travers de ce champ moyen et dans l'étape de sélection. L'analyse mathématique de ces filtres est encore à faire et permettra de compléter le travail effectué sur les EnKF.

Les algorithmes présentés au chapitre 6 pour traiter les processus avec divers types de champ moyen ne sont pas les seuls. Les années qui viennent verront arriver d'autres procédures pour prendre en compte les interactions de champ moyen et conduire à de nouveaux filtres utilisables en mécanique des fluides qu'il conviendra d'étudier et d'analyser.

# Bibliographie

- Amirdjanova, A. et Xiong, J. (2006). Large deviation principle for a stochastic Navier-Stokes equation in its vorticity form for a two-dimensional incompressible flow. *Discrete and continuous dynamical systems series B*, 6:651–666.
- Antonelli, F. et Kohatsu-Higa, A. (2002). Rate of convergence of a particle method to the solution of the McKean-Vlasov’s equation. *Ann. Appl. Probab.*, 12:423–476.
- Arnaud, E., Mémin, E. et Cernuschi-Frias, B. (2003). Filtrage conditionnel pour le suivi de point dans des séquences d’images. In *Congrès Francophone de Vision par Ordinateur, ORASIS’03*.
- Arnaud, E., Mémin, E. et Cernuschi-Frias, B. (2005). Conditional filters for image sequence based tracking - application to point tracking. *IEEE Trans. on Image Processing*, 14:63–79.
- Balkovsky, E., Falkovich, G., Kolokolov, I. et Lebedev, V. (1997). Intermittency of Burger’s turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 78:1452–1455.
- Bally, V. (2001). An elementary introduction to Malliavin calculus. Rapport technique, INRIA - 4718.
- Bally, V. et Talay, D. (1996a). The law of the Euler scheme for stochastic differential equations I. Convergence rate of the distribution function. *Probab. Theory Rel. Fields*, 104:43–60.
- Bally, V. et Talay, D. (1996b). The law of the Euler scheme for stochastic differential equations II : Convergence rate of the density. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2:93–128.
- Bashirov, A. (2003). *Partially Observable Linear Systems under dependant noises*. Birkhäuser.
- Basson, A. (2008). Spatially homogeneous solutions of 3d stochastic Navier-Stokes equations and local energy inequality. *Stoch. Proc. Appl.*, 118:417–451.

- Baudoin, F. (2005). *An Introduction to the Geometry of Stochastic Flows*. Imperial College Press.
- Bec, J. (2002). *Particules, singularités et turbulence*. Thèse de doctorat, UMPC.
- Ben Arous, G. (1989). Flots et series de Taylor stochastiques. *Probab. Theory Rel. Fields*, 81:29–77.
- Bensi, R., Biferale, L., Ciliberto, S., Struglia, M. et Tripiccione, R. (1996). Generalized scaling in fully developed turbulence. *Physica D*, 96:162–181.
- Bolley, F. (2005). *Applications du transport optimal à des problèmes de limites en champ moyen*. Thèse de doctorat, Ec. Normale Sup. Lyon.
- Bossy, M. (2005). Some stochastic particle methods for nonlinear parabolic PDEs. *ESAIM : proceedings*, 15:18–57.
- Bossy, M., Fezoui, L. et Piperno, S. (1997). Comparaison d’une méthode stochastique et d’une méthode déterministe appliquées à l’équation de burgers, rapport de recherche n° 3093. Rapport technique, INRIA.
- Bossy, M., Jabir, J.-F. et Talay, D. (2009). Mathematical study of a simplified lagrangian stochastic model. (en preparation).
- Bossy, M., Rousseau, A., Bernardin, F., Salameh, T. et Drobinski, P. (2007). Stochastic particle method applied to local wind simulation. *In IEEE International Conference for Clean Electrical Power*.
- Bossy, M. et Talay, D. (1995). A stochastic particle method for some one-dimensional nonlinear PDE. *Mathematics and Computer in Simulation*, 38:43–50.
- Bossy, M. et Talay, D. (1996a). A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 76:319–322.
- Bossy, M. et Talay, M. (1996b). Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles : application to the Burgers equation. *Ann. Appl. Probab.*, 6:818–861.
- Busnello, B., Flandoli, F. et Romito, M. (2005). A probabilistic representation for the vorticity of a 3d viscous fluid and for general systems of parabolic equations. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 48:295–336.

- Caffarelli, L., Kohn, R. et Nirenberg, L. (1982). Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35-6:771–831.
- Cannone, M. (1995). *Ondelettes, Paraproducts et Navier-Stokes*. Diderot Editeur.
- Chainais, P. (2001). *Cascades log-infinitement divisibles et analyse multirésolution, application à l'étude des intermittences en turbulence*. Thèse de doctorat, ENS-Lyon.
- Chassaing, P. (2000). *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès Editions.
- Chertkov, M., Falkovich, G. et Kolokolov, I. (1998a). Intermittent dissipation of a passive scalar in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2121–2124.
- Chertkov, M., Kolokolov, I. et Vergassola, M. (1997). Inverse cascade and intermittency of passive scalar in one-dimensional smooth flow. *Phys. Rev. E*, 56:5483–5499.
- Chertkov, M., Kolokolov, I. et Vergassola, M. (1998b). Inverse versus direct cascades in turbulent advection. *Phys. Rev. Lett.*, 80:512–515.
- Chevillard, L., Roux, S., Leveque, E., Mordant, N., Pinton, J. et Arneodo, A. (2003). Lagrangian velocity statistics in turbulent flows : Effects of dissipation. *Phys. Rev. Lett.*, 91:214502.1–214502.4.
- Chuin-Mu, W., Geng-Cheng, L., Chi-Yuan, L. et Ruey-Maw, C. (2004). An unsupervised Kalman filter-based linear mixing approach to MRI classification. *Circuits and Systems, 2004. Proceedings. The 2004 IEEE Asia-Pacific Conference*, 2:1105–1108.
- Crisan, D., Del Moral, P. et Lyons, T. (1999a). Discrete filtering using branching and interacting particle systems. *Markov Processes and Related Fields*, 5:293–318.
- Crisan, D., Del Moral, P. et Lyons, T. (1999b). Interacting particle systems approximations of the Kushner-Stratonovitch equation. *Adv. Appl. Probab.*, 31:819–838.
- Crisan, D. et Lyons, T. (1997). Nonlinear filtering and measure-valued processes. *Probab. Theory Rel. Fields*, 109:217–244.
- Cuzol, A. (2006). *Analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images : estimation de champs de vitesses et suivi temporel par filtrage stochastique non linéaire*. Thèse de doctorat, IRISA, Univ. Rennes I.

- Da Prato, G. et Debussche, A. (2003). Ergodicity for the 3d stochastic Navier-Stokes equations. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 82:877–947.
- Da Prato, G. et Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in infinite dimensions*. Cambridge University Press.
- Da Prato, G. et Zabczyk, J. (2003). *Ergodicity for infinite dimensional systems*. Cambridge University Press.
- Das, S. et Durbin, P. (2005). A Lagrangian stochastic model for dispersion in stratified turbulence. *Phys. of Fluids*, 17:025109.1–025109.10.
- Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. SIAM books.
- De Moor, G. (1983). *Les théories de la turbulence dans la couche limite atmosphérique*. Cours et Manuels de l'École Nationale de la Météorologie.
- Debussche, A. et Odasso, C. (2006). Markov solutions for the 3d stochastic Navier-Stokes equations with state dependent noise. *Journal of Evolution Equations*, 6:305–324.
- Degond, P. et Lemou, M. (2002). Turbulence models for incompressible fluids derived from kinetic theory. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4:257–284.
- Del Moral, P. (1998). Measure valued processes and interacting particle systems. Application to nonlinear filtering problems. *Ann. Appl. Probab.*, 8:438–495.
- Del Moral, P. (2003). Arbres généalogiques et estimation non lineaire. Rapport technique, LSP, Univ. Paul Sabatier.
- Del Moral, P. (2004). *Feynman–Kac Formulae, Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. Springer-Verlag.
- Del Moral, P., Doucet, A. et Peters, G. (2006). Sharp propagation of chaos estimates for Feynman-Kac particle models. *Teoriya Veroyatnosteri i ee Primeniya*, 51:1–31.
- Del Moral, P. et Guionnet, A. (1999). Central limit theorem for nonlinear filtering and interacting particles systems. *Ann. Appl. Probab.*, 9:275–297.
- Del Moral, P. et Guionnet, A. (2001). On the stability of interacting processes with applications to filtering and genetic algorithm. *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, 37:155–194.

- Del Moral, P. et Jacod, J. (2001). *Stochastics in finite and infinite dimensions*, chapitre Interacting particle filtering with discrete-time observations : asymptotic behaviour in the Gaussian case, pages 101–122. Birkhäuser.
- Del Moral, P., Jacod, J. et Protter, P. (2001a). The Monte-Carlo method for filtering with discrete-time observations. *Probab. Theory Rel. Fields*, 120:346–368.
- Del Moral, P., Kallel, L. et Rowe, J. (2001b). Modeling genetic algorithm with interacting particle systems. *Rev. Mat. Teoria apl.*, 8:19–78.
- Del Moral, P., Kouritzin, M. et Miclo, L. (2001c). On a class of discrete generation interacting particle systems. *Electronic Journal of Probability*, 16:1–26.
- Del Moral, P. et Ledoux, M. (2000). Convergence of empirical processes for interacting particle systems with applications to nonlinear filtering. *J. Theor. Probab.*, 13:225–257.
- Del Moral, P. et Lezaud, P. (2006). *Stochastic Hybrid Systems : Theory and Safety Critical Applications*, chapitre Branching and interacting particle interpretation of rare event probabilities. Springer-Verlag.
- Del Moral, P. et Miclo, L. (2000). *Séminaire de Probabilités XXXIV Lecture Notes in Mathematics 1729*, chapitre Branching and Interacting Particle Systems approximations of Feynman-Kac formulae with applications to nonlinear filtering, pages 1–145. Springer-Verlag.
- Del Moral, P., Noyer, J.-C., Rigal, G. et Salut, G. (1995). Résolution particulière et traitement non-linéaire du signal : Applications radar/sonar. *Traitement du signal*, 12:287–301.
- Del Sole, T. (1999). Stochastic models of shear-flow turbulence with enstrophy transfer to subgrid scales. *J. of Atm. Sci.*, 56:3692–3703.
- Diaz, J. et Galiano, G. (1997). On the boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 30:3255–3263.
- Doucet, A., de Freitas, N. et Gordon, N. (2001a). *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer.
- Doucet, A., Gordon, N. et Krishnamurthy, V. (2001b). Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49:613–624.
- Duchon, J. et Robert, R. (2000). Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, 13:249–255.

- E, W. et Vanden Eijnden, E. (2000). Generalized flows, intrinsic stochasticity and turbulent transport. *Proceedings of the National Academy of Science*, 97:8200–8205.
- Ellis, R. (1985). *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer-Verlag.
- Ethier, S. et Kurtz, T. (1986). *Markov Processes characterization and convergence*. Wiley and co.
- Falkovich, G. (2006). *Lecture notes on turbulence and coherent structures in fluids, plasmas and nonlinear media*, chapitre Chap 1, Introduction to turbulence theory, pages 1–20. World Scientific.
- Favre, A., Kovasznay, L., Dumas, R., Gaviglio, J. et Coantic, M. (1976). *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier-Villars.
- Flandoli, F., Gubinelli, M., Hairer, M. et Romito, M. (2008). Rigorous remarks about scaling laws in turbulent fluids. *Communications in Mathematical Physics*, 278:1–29.
- Flandoli, F. et Romito, M. (2002). Probabilistic analysis of singularities for the 3D Navier-Stokes equations. *Mathematica Bohemica*, 2:211–218.
- Flandoli, F. et Romito, M. (2007). *Stochastic Differential Equations : Theory and Applications*, chapitre Regularity of transition semigroup associated to a 3d stochastic Navier-Stokes Equation, pages 263–280. World Scientific.
- Fontbona, J. (2006). A probabilistic interpretation and stochastic particle approximations of the 3-dimensional Navier-Stokes equations. *Probab. Theory Rel. Fields*, 136:102–156.
- Fox, R. (1997). The Lagrangian spectral relaxation model of the scalar dissipation in homogeneous turbulence. *Phys. of Fluids*, 9:2364–2386.
- Fox, R. (1999). The Lagrangian spectral relaxation model for differential diffusion in homogeneous turbulence. *Phys. of Fluids*, 11:1550–1571.
- Frisch, U. (1980). Fully developed turbulence and intermittency. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 357:359–367.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence*. Cambridge University Press.
- Fujisaki, M., Kallianpur, G. et Kunita, H. (1972). Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem. *Osaka J. Math.*, 1:19–40.

- Funaki, T. et Woyczynski, W. (1998). Interacting particle approximations for fractal Burgers equation. *Stoch. Proc. and Rel. Topics*, pages 141–166.
- Gibbon, J. et Doering, C. R. (2005). Intermittency and regularity issues in 3D Navier-Stokes turbulence. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 177: 115–150.
- Gicquel, L., Givi, P., Jaber, F. et Pope, S. (2002). Velocity filtered joint density function for large eddy simulation of turbulent flows. *Phys. of Fluids*, 14:1196–1213.
- Girimaji, S. et Pope, S. (1990). A diffusion model for velocity gradients in turbulence. *Phys. of Fluids A*, 2:242–256.
- Gobet, E., Pagès, G., Pham, H. et Printems, J. (2007). Discretization and simulation for a class of SPDEs with applications to Zakai and McKean-Vlasov equations. *à paraître dans SIAM, Journal of Numerical Analysis*.
- Hairer, M., Mattingly, J. et Pardoux, E. (2004). Malliavin calculus for highly degenerate 2D stochastic Navier-Stokes equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339:793–796.
- Haworth, D. et Pope, S. (1986). A generalized Langevin model for turbulent flows. *Phys. of Fluids*, 29:387–405.
- Haworth, D. et Pope, S. (1987). A pdf modeling study of self-similar turbulent free shear flows. *Phys. of Fluids*, 30:1026–1044.
- Heinz, S. (2002). On the Kolmogorov constant in stochastic turbulence models. *Phys. of Fluids*, 14:4095–4098.
- Heppe, B. (1998). Generalized Langevin equation for relative turbulent dispersion. *J. Fluid Mech.*, 357:167–198.
- Hunt, J., Phillips, O. et Williams, D. (1991). *Turbulence and stochastic processes : Kolmogorov's ideas 50 years on*. The Royal Society.
- Jabir, J.-F. (2008). *Modèles stochastiques Lagrangiens de type McKean-Vlasov conditionnels et leur confinement*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis.
- Johnson, R. (2000). Lagrangian air-mass tracking with smart balloons during ACE-2. *Tellus B*, 52:321–334.



- Julier, S. J. et Uhlmann, J. K. (1997). A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *In Proc. of AeroSense : The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls.*
- Kac, M. (1956). Foundation of kinetic theory. *In Proc. Third Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Probab. 3, 171- 197, Univ. Calif.*
- Kallianpur, G. et Striebel, C. (1967). Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter of stochastic processes, tech. report 103, dep. of stat. Rapport technique, Univ. of Minnesota.
- Karatzas, I. et Shreve, S. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd Ed., GTM 113.* Springer-Verlag.
- Kobayashi, T. et Simon, D. (2005). Evaluation of an enhanced bank of Kalman filters for in-flight aircraft engine sensor fault diagnostics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127:497–504.
- Kolmogorov, A. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:299–303.
- Kolokolov, I. (2000). Intermittence phenomena in the Burgers equation involving thermal noise. *JETP Letters*, 71:12–14.
- Krylov, N., Rockner, M. et Zabczyk, J. (1999). *Stochastic PDE's and Kolmogorov Equations in infinite dimensions.* Springer-Verlag.
- Kurtz, T. et Xiong, J. (1999). Particle representations for a class of nonlinear SPDEs. *Stoch. Proc. Appl.*, 83:103–126.
- Kurtz, T. et Xiong, J. (2001). *Stochastics in Finite/Infinite Dimensions*, chapitre Numerical solutions for a class of SPDE's with application to filtering, pages 233–258. Birkhauser.
- Laval, J., Dubrulle, B. et Williams, W. M. (2003). Langevin models of turbulence : Renormalization group, distant interaction algorithms or rapid distortion theory. *Phys. of Fluids*, 15:1327–1339.
- Le Gland, F. et Oudjane, N. (2004). Stability and uniform approximation of nonlinear filters using the Hilbert metric and application to particle filters. *Ann. Appl. Probab.*, 14:144–187.
- Le Jan, Y. et Sznitman, A. (1997). Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations. *Probab. Theory Rel. Fields*, 109:343–366.

- Lee, X., Massman, W. et Law, B. (2004). *Handbook of micrometeorology*. Kluwer Academic Publishers.
- Lenschow, D. (1986). *Probing the Atmospheric Boundary Layer*, chapitre Aircraft Measurements in the Boundary Layer, pages 39–55. American Meteorological Society.
- Lenschow, D. et Spyers-Duran, P. (1989). Measurement techniques : air motion sensing. *NCAR bulletin*, 23.
- Liebenthal, C. et Foken, T. (2001). Der einfluss von korrektoren für die eddykovarianz-methode auf die schliessung der energiebilanz. *Österr. Beitr. Meteorol. & Geophys*, 27:215.
- Lumley, J. (1970). *Stochastic tools in turbulence*. Academic press.
- Malik, N. et Vassilicos, J. (1999). A Lagrangian model for turbulent dispersion with turbulent-like flow structure : comparison with direct simulation for two-particle statistic. *Phys. of Fluids*, 11:1572–1580.
- McKean, H. (1966). A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 56:1907–1911.
- McKean, H. (1967). Propagation of chaos for a class of non linear parabolic equations. *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations)*, 7:41–57.
- Méléard, S. (1996). *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations lectures given at the 1 st session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Montecatini Terme, Italy, May 22-30, 1995*, chapitre Asymptotic behaviour of some interacting particle systems for McKean-Vlasov and Boltzmann models. Springer-Verlag.
- Méléard, S. (2001). Monte-Carlo approximations of the solution of the 2D Navier-Stokes equation with finite measure initial data. *Probab. Theory Rel. Fields*, 121:367–388.
- Méléard, S. et Roelly-Coppoletta, S. (1988). *Séminaire de Probabilités, XXII, Lecture Notes in Math., 1321*, chapitre Système de particules et mesures-martingales : un théorème de propagation du chaos, pages 438–448. Springer.
- Menaldi, J. et Sritharan, S. (2002). Stochastic 2D Navier-Stokes equation. *App. Math. & Optim.*, 46:31–53.

- Meyer, Y. (1990). *Ondelettes et Opérateurs, tome 1*. Hermann.
- Miclo, L. et Del Moral, P. (2001). Genealogies and increasing propagation of chaos for Feynman-Kac and genetic models. *Ann. Appl. Probab.*, 11:1166–1198.
- Mikulevicius, R. et Rozovskii, B. (2001). Stochastic Navier-Stokes equations. propagation of chaos and statistical moments. *Optimal control and partial differential equation*, pages 258–267.
- Mikulevicius, R. et Rozovskii, B. (2004). Stochastic Navier-Stokes equations for turbulent flows. *SIAM J. Math. Analysis*, 35:1250–1310.
- Minier, J. et Peirano, E. (2001). The PDF approach to turbulent polydispersed two-phase flows. *Phys. Reports*, 352:1–214.
- Novikov, E. (1980). The effects of intermittency on statistical characteristics of turbulence and scale similarity of breakdown coefficients. *Phys. of Fluids A* 2, 5:814–820.
- Nualart, D. (1995). *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag.
- Olla, P. et Paradisi, P. (2004). Relations between Lagrangian models and synthetic random velocity fields. *Phys. Rev. E*, 70:046305–1 – 046305–21.
- Onsager, L. (1949). Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento*, 6:279–287.
- Pardoux, E. (1991). *Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX-1989, Lecture Notes in Mathematics 1464*, chapitre Filtrage non-linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées, pages 69–163. Springer-Verlag.
- Polyakov, A. (1995). Turbulence without pressure. *Phys. Rev. E*, 52:6183–6188.
- Pope, S. (1981). Transport equation for the joint probability density function of velocity and scalars in turbulent flow. *Phys. of Fluids*, 24:588–596.
- Pope, S. (1983). A Lagrangian two-time pdf equation for inhomogeneous turbulent flows. *Phys. of Fluids*, 26:3448–3450.
- Pope, S. (1985). PDF methods for turbulent reactive flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 11:119–192.
- Pope, S. (1991). Application of the velocity-dissipation probability density function model to inhomogeneous turbulent flows. *Phys. of Fluids A*, 3:1947–1957.
- Pope, S. (1994a). Lagrangian PDF methods for turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 26:23–63.

- Pope, S. (1994b). On the relationship between stochastic Lagrangian models of turbulence and second-moment closure. *Phys. of Fluids*, 6:973–985.
- Pope, S. (1995). Particle method for turbulent flows : integration of stochastic model equations. *J. of Computational Phys.*, 117:332–349.
- Pope, S. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Pope, S. (2002a). A stochastic Lagrangian model for acceleration in turbulent flows. *Phys. of Fluids*, 14:2360–2375.
- Pope, S. (2002b). Stochastic Lagrangian models of velocity in homogeneous turbulent shear flow. *Phys. of Fluids*, 14:1696–1702.
- Pope, S. et Chen, Y. (1990). The velocity-dissipation probability density function model for turbulent flows. *Phys. of Fluids A*, 2:1437–1449.
- Renner, C., Peinke, J. et Friedrich, R. (2002). On the interaction between velocity increment and energy dissipation in the turbulent cascade. *arXiv :physics/0211121*.
- Revuz, D. et Yor, M. (1990). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag.
- Romito, M. (2006). Existence of martingale and stationary suitable weak solutions for a stochastic Navier-Stokes system. *arXiv :math.PR/0609318*.
- Rousset, M. (2006). *Méthodes population Monte-Carlo en temps continu pour la physique numérique*. Thèse de doctorat, LSP, Univ. Paul Sabatier, Toulouse.
- Sawford, B. et Yeung, P. (2001). Lagrangian statistics in uniform shear flow : Direct numerical simulation and Lagrangian stochastic models. *Phys. of Fluids*, 13:2627–2634.
- Sawford, B. et Yeung, P. (2003). Improved Lagrangian mixing models for passive scalars in isotropic turbulence. *Phys. of Fluids*, 15:961–985.
- Schertzer, D., Lovejoy, S. et Hubert, P. (2002). *Mathematical Problems in Environmental Science and Engineering*, chapitre An Introduction to Stochastic Multifractional Fields, pages 106–179. Higher Education Press.
- Schmitt, F., Schertzer, D., Lovejoy, S. et Brunet, Y. (1994). Empirical study of multifractal phase transitions in atmospheric turbulence. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1:95–104.

- Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27:623–656.
- She, Z. (1997). *Lecture Notes in Physics*, chapitre Hierarchical structures and scalings in turbulence. Springer-Verlag, Berlin.
- Sheikhi, M., Drozda, T., Givi, P. et Pope, S. (2003). Velocity scalars filtered joint density function for large eddy simulation of turbulent flows. *Phys. of Fluids*, 15:2321–2337.
- Slooten, P. V., Pope, S. et Jayesh (1998). Advances in PDF modeling for inhomogeneous turbulent flows. *Phys. of Fluids*, 10:246–265.
- Sritharan, S. (1995). *Nonlinear Stochastic PDEs : Burgers Turbulence and Hydrodynamic Limit*, chapitre Nonlinear filtering of stochastic Navier-Stokes equation, pages 247–260. Springer-Verlag.
- Stratonovich, R. (1960). Conditional Markov processes. *Theor. Prob. Appl.*, 5:156–178.
- Swiech, A. (2006). Large deviations for stochastic Navier-Stokes equations : a PDE approach. prepublication.
- Sznitman, A. (1991). *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX-1989, Lecture Notes in Math., 1464*, chapitre Topics in propagation of chaos. Springer-Verlag.
- Talay, D. (1996). *Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics 1627*, chapitre Probabilistic numerical methods for partial differential equations : elements of analysis, pages 48–196. Springer-Verlag.
- Tanaka, H. (1978). Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules. *Probab. Theory Rel. Fields*, 46:67–105.
- Thomson, D. (1986a). On the relative dispersion of two particles in homogeneous stationary turbulence and the implications for the size of concentration fluctuations at large times. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society.*, 112:890–894.
- Thomson, D. (1986b). A random walk model of dispersion in turbulent flows and its application to dispersion in a valley. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society.*, 112:511–530.
- Thomson, D. (1990). A stochastic model for the motion particle pairs in isotropic high-Reynolds-number turbulence, and its application to the problem of concentration variance. *J. Fluid Mech.*, 210:113–153.

- Tran, V., Monbet, V. et LeGland, F. (2006). Filtre de Kalman d'ensemble et filtres particuliers pour le modèle de Lorenz. *In Actes de la Manifestation des Jeunes Chercheurs STIC (MajecSTIC'06), Lorient, November 22-24, 2006.*
- Van Slooten, P. et Pope, S. (1997). PDF modeling for inhomogeneous turbulence with exact representation of rapid distortions. *Phys. of Fluids*, 9:1085–1105.
- Varadhan, S. (2004). Random walks in a random environment. *Proceedings of the Indian Academy of Science*, 114:309–318.
- Vincenzi, D. (2003). *Diffusion, étirement et intermittence dans le transport turbulent*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- Wang, D., Tong, C. et Pope, S. (2004). Experimental study of velocity filtered joint density function for large eddy simulation. *Phys. of Fluids*, 16:3599–3613.
- Weynans, L. (2006). *Méthode particulière multi-niveaux pour la dynamique des gaz, application au calcul d'écoulements multifluides*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- Wieser, A., Fiedler, E. et Corsmeier, U. (2001). The influence of the sensor design on wind measurements with sonic anemometer systems. *J. of Atm. and Oceanic Tech.*, 18:1585–1608.
- Xu, J. et Pope, S. (1997a). Analysis of numerical errors in solving particle Langevin equations, cornell university report fda 97–07. Rapport technique, Cornell University.
- Xu, J. et Pope, S. (1997b). Sources of bias in particles-mesh methods for PDF models for turbulent flows, cornell university report fda 97–01. Rapport technique, Cornell University.
- Xu, J. et Pope, S. (1999). Assessment of numerical accuracy of PDF/Monte Carlo methods for turbulent reacting flows. *J. of Computational Phys.*, 152:192–230.
- Yakhot, V. (1998). Probability density and scaling exponents of the moments of longitudinal velocity difference in strong turbulence. *Phys. Rev. E*, 57:1737–1751.
- Yakhot, V. (2001). Mean-field approximation and a small parameter in turbulence theory. *Phys. Rev. E*, 63:026307.
- Yeung, P. et Pope, S. (1988). An algorithm for tracking fluid particles in numerical simulations of homogeneous turbulence. *J. of Computational Phys.*, 79:373–416.

- Yor, M. (1977). *Séminaire de probabilités XI - 1975-1976*, chapitre Sur les théories du filtrage et de la prédiction, pages 257–297. Springer-Verlag.
- Zakai, M. (1969). On the optimal filtering of diffusion processes. *Zeitschrift. Wahrscheinlichkeitstheorie. Verw. Geb.*, 11:230–243.
- Zeitouni, O. (2003). *Lecture Notes on Random Walks in Random Environment*, chapitre II, pages 191–312. Springer Verlag.

# Annexe A

## Filtrage Stochastique d'une dynamique linéaire Gaussienne

Dans cette annexe, on rappelle les techniques existantes pour filtrer des processus régis essentiellement par des bruits de dynamique ou d'observation Gaussiens. On note  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  la mesure Gaussienne sur  $\mathbb{R}^d$  de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}^d$  et de matrice de covariance  $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  et

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma)(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(\sigma)}} \exp[-2^{-1}(x - \mu) \cdot \sigma^{-1} \cdot (x - \mu)^T] dx$$

### A.1 Le filtre de Kalman-Bucy

Cet estimateur est l'un des plus utilisés dans les sciences de l'ingénieur car il est efficace et facile à mettre en œuvre, notamment sur les machines vectorielles. Dans le cas du traitement du signal, le problème du filtrage consiste à estimer les lois conditionnelles des états d'un signal par rapport à une séquence d'observations partielles et bruitées. On l'a déjà évoqué, les états du  $X_n$  ne sont pas directement atteints. Mais à chaque pas de temps  $n$ , on dispose d'une observation  $Y_n$  de l'état  $X_n$ .

On peut montrer que le filtre de Kalman pour une dynamique linéaire Gaussienne à bruit d'observations Gaussiens est le prédicteur optimal et qu'il fournit les lois conditionnelles :  $Loi(X_n | Y_0, \dots, Y_{n-1})$  et  $Loi(X_n | Y_0, \dots, Y_n)$ . Premier du genre, c'est aussi l'archétype du filtre adaptatif qui apprend les paramètres au fur et à mesure de l'arrivée des observations.



Soit le couple signal/observation  $(X_n, Y_n)$  supposé être une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbb{R}^{p+q}$ , et définie pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{cases} X_n &= A_n \cdot X_{n-1} + B_n W_n \\ Y_n &= C_n \cdot X_n + D_n V_n \\ Y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Par hypothèse, les termes  $(A_n, B_n, C_n, D_n)$  sont des matrices déterministes, les bruits  $W_n$ , et  $V_n$  sont des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes. On suppose qu'ils sont indépendants de la variable initiale  $X_0$ , avec des matrices de covariance respectivement  $R_n^w$  et  $R_n^v$ .

La variable initiale  $X_0$  est supposée de moyenne  $\bar{X}_0 = \mathbb{E}(X_0)$  et de matrice de covariance  $\bar{P}_0 = \mathbb{E}((X_0 - \mathbb{E}(X_0)) \cdot (X_0 - \mathbb{E}(X_0))^T)$ .

Le prédicteur est la mesure Gaussienne  $Loi(X_n | Y_0, \dots, Y_{n-1}) = \mathcal{N}(\bar{X}_n, \bar{P}_n)$ .

Le filtre optimal est la mesure toujours Gaussienne  $Loi(X_n | Y_0, \dots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n)$ .

Les moyennes  $(\bar{X}_n, \hat{X}_n)$  correspondent aux espérances conditionnelles  $\bar{X}_n = \mathbb{E}(X_n | Y_0, \dots, Y_{n-1})$  et  $\hat{X}_n = \mathbb{E}(X_n | Y_0, \dots, Y_n)$

Les matrices  $(\bar{P}_n, \hat{P}_n)$  représentent les matrices de covariance d'erreurs entre les estimateurs conditionnels  $(\bar{X}_n, \hat{X}_n)$  et le signal  $X_n$  observé

$$\bar{P}_n = \mathbb{E}([X_n - \bar{X}_n] \cdot [X_n - \bar{X}_n]^T) \quad \text{et} \quad \hat{P}_n = \mathbb{E}([X_n - \hat{X}_n] \cdot [X_n - \hat{X}_n]^T)$$

On calcule récursivement, au fur et à mesure de l'arrivée des observations, l'évolution des lois conditionnelles par deux étapes d'apprentissage

$$\mathcal{N}(\bar{X}_n, \bar{P}_n) \xrightarrow{\text{Mise à jour}} \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n) \xrightarrow{\text{Prédiction}} \mathcal{N}(\bar{X}_{n+1}, \bar{P}_{n+1}) \quad (\text{A.2})$$

L'établissement des équations du filtre utilise le caractère linéaire et des propriétés des lois Gaussiennes :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= \mathbb{E}(A_{n+1}X_n + B_{n+1}W_{n+1} | (Y_0, \dots, Y_n)) \\ &= A_{n+1}\hat{X}_n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+1} &= \mathbb{E}[(A_{n+1}(X_n - \hat{X}_n) + B_{n+1}W_{n+1}) \cdot (A_{n+1}(X_n - \hat{X}_n) + B_{n+1}W_{n+1})^T] \\ &= A_{n+1} \cdot \hat{P}_n \cdot A_{n+1}^T + B_{n+1} R_{n+1}^w B_{n+1}^T \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Il est possible d'exprimer la différence  $(\hat{X}_n - \bar{X}_n)$  comme  $\hat{X}_n - \bar{X}_n = G_n (Y_n - \bar{Y}_n)$  avec une matrice  $G_n$  que l'on exprime par après et on a pour  $\bar{Y}_n$  :

$$\bar{Y}_n = \mathbb{E}(Y_n | (Y_0, \dots, Y_{n-1})) = C_n \bar{X}_n \quad (\text{A.5})$$

$G_n$  est appelée la matrice de gain de Kalman. La forme  $\hat{X}_n - \bar{X}_n = G_n (Y_n - \bar{Y}_n)$  suggère que la correction sera d'autant plus forte que l'erreur d'observation sera grande,  $G_n$  agit donc comme une force de rappel.

Pour la calculer, on utilise

$$\mathbb{E}((X_n - \hat{X}_n) \cdot (Y_n - \bar{Y}_n)^T) = 0 \quad (\text{A.6})$$

et

$$Y_n - \bar{Y}_n = C_n (X_n - \bar{X}_n) + D_n V_n \quad (\text{A.7})$$

Prenant les espérances, on obtient

$$\mathbb{E}((X_n - \bar{X}_n) \cdot (Y_n - \bar{Y}_n)^T) = G_n \mathbb{E}((Y_n - \bar{Y}_n) \cdot (Y_n - \bar{Y}_n)^T) \quad (\text{A.8})$$

Ensuite de

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}((X_n - \bar{X}_n) \cdot (Y_n - \bar{Y}_n)^T) \\ &= \mathbb{E}((X_n - \bar{X}_n) \cdot (C_n [X_n - \bar{X}_n] + V_n)^T) \\ &= \bar{P}_n C_n^T \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

on déduit  $G_n = \bar{P}_n C_n^T (C_n \bar{P}_n C_n^T + D_n R_n^v D_n^T)^{-1}$ . Cette expression donne in fine

$$\hat{P}_n = \bar{P}_n - G_n C_n \bar{P}_n$$

Etabli, le filtre de Kalman tient en 5 équations.

2 pour l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= A_{n+1} \hat{X}_n \\ \bar{P}_{n+1} &= A_{n+1} \hat{P}_n A_{n+1}^T + B_{n+1} R_{n+1}^w B_{n+1}^T \end{aligned}$$

et 3 pour l'étape de correction :

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= \bar{X}_n + G_n (Y_n - C_n \bar{X}_n) \\ G_n &= \bar{P}_n C_n^T (C_n \bar{P}_n C_n^T + D_n R_n^v D_n^T)^{-1} \\ \hat{P}_n &= \bar{P}_n - G_n C_n \bar{P}_n \end{aligned}$$

Quand l'hypothèse de linéarité n'est pas vérifiée, mais que l'équation de dynamique est différentiable, il est possible de se ramener au cas précédent par une

linéarisation. Ce filtre est alors appelé le Kalman étendu, nous ne le présentons pas ici. L'estimateur de Kalman peut s'écrire de manière identique en temps continu, et devient le filtre de Kalman-Bucy.

## A.2 Filtres de Kalman en interaction

Un filtre de Kalman permet de suivre un état estimé  $\hat{X}_n$  et de transporter et corriger la loi Gaussienne associée  $\mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n)$  pour une dynamique linéaire Gaussienne. Certains auteurs mettent en parallèle plusieurs filtres de Kalman pour augmenter l'exploration de l'espace des phases. Ils restituent alors des états moyens. Dans [Del Moral \(2004\)](#) se trouve une amélioration des ces Kalman en parallèle, par une hybridation des Kalman avec un filtre particulaire comme présenté au chapitre 5. L'idée est de placer  $N > 0$  filtres de Kalman en parallèle qui sont mis en compétition dans une étape de sélection génétique. Les mieux placés seront favorisés en augmentant leur chance de donner des descendants, les moins adaptés auront une chance plus grande de s'éteindre.

Les filtres de Kalman en interaction sont alors des algorithmes particuliers où chaque particule est conjointement un état et une mesure Gaussienne.

On utilise le même modèle de dynamique [A.1](#) avec le même jeu de notations.

Pour chaque particule,  $1 \leq i \leq N$ , on note  $\xi_n^i = (\zeta_n^i, \nu_n^i)$  où  $\zeta_n^i$  est l'état dans l'espace des phases et  $\nu_n^i$  est la loi Gaussienne associée.

A l'étape initiale, on distribue les  $N$  états  $\zeta_0^i$  selon la loi  $\eta_0$  et les Gaussiennes sont données par  $\nu_0^i = \mathcal{N}(m_0^i, P_0^i)$  avec  $m_0^i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \zeta_0^j$  et  $P_0^i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\zeta_0^j - m_0^i]^2$ .

La  $n$ -ième étape de sélection se fait sur les particules  $\zeta_n^i$  avec le noyau de sélection  $\tilde{G}(\zeta_n^i)$  qui est donné par :

$$\tilde{G}_n(\zeta_n^i) = \frac{d\mathcal{N}(C_n m_n^i, C_n P_n^i C^T + R_n^v)}{d\mathcal{N}(0, R_n^v)}(y_n) \quad (\text{A.10})$$

Cette sélection génétique du type  $S_{n,\eta_n}(z_n, \cdot) = \tilde{G}_n(z_n)\delta_{z_n} + [1 - \tilde{G}_n(z_n)]\Psi_n(\eta_n)$  choisit  $N$  particules que l'on note  $\hat{\xi}_n^i = (\hat{\zeta}_n^i, \hat{\nu}_n^i)$ .

Pour l'étape de mutation, l'équation de dynamique de ce filtre particulaire est

celle du filtre de Kalman et chaque particule  $\hat{\xi}_n^i$  évolue selon le filtre de Kalman qui lui est propre avec les équations établies dans la section précédente.

On trouvera dans [Del Moral \(2004\)](#) une estimée d'erreur  $L^p$  de ces filtres de Kalman en interaction en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

## A.3 Filtre de Kalman d'ensemble

S'ils sont performants pour les systèmes linéaires ou linéarisables à bruits Gaussiens, ces filtres de Kalman souffrent d'un défaut numérique qui peut devenir majeur lorsque la dimension du vecteur d'état devient important (disons quelques millions de composantes). En effet pour calculer la matrice de covariance, il faut calculer et stocker une matrice ayant un nombre d'éléments carré du nombre de dimension. Les méthodes particulières pures ne souffrent pas de cette difficulté, mais sont également coûteuses en temps de calcul par le nombre de particules nécessaires à l'exploration des non-linéarités. Geir Evensen a développé et popularisé dans les communautés des océanographes puis des météorologistes un filtre intermédiaire qui ne demande pas d'inversion matricielle, qui permet d'utiliser l'information d'un ensemble limité de filtres de Kalman, mais qui n'est pas aussi performant qu'un filtre particulière pur. Nous présentons ici le filtre de Kalman d'ensemble d'Evensen.

### A.3.1 Le Filtre de Kalman d'ensemble d'Evensen

On considère le système d'observation de l'état  $X_n \in \mathbb{R}^d$ , avec  $d \geq 1$  :

$$\begin{cases} X_n = A_n(X_{n-1}) + \sqrt{Q_n} \cdot W_n & W_n \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ Y_n = C_n \cdot X_n + \sqrt{R_n} \cdot V_n & V_n \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

où  $A$  est cette fois une fonction non forcément linéaire de  $X_n$ .

L'algorithme numérique du filtre de Kalman d'ensemble à  $N > 0$  éléments est alors le suivant :

A l'étape initiale, on se donne  $P_0 > 0$  et on produit un ensemble de réalisations  $(\hat{X}_0^1, \dots, \hat{X}_0^N)$  i.i.d. avec  $\mathcal{N}(0, P_0)$

Pour tout  $i = 1 \dots N$ , et  $n \geq 1$  on a le système d'équations de l'EnKF :

$$X_n^i = A_n(\hat{X}_{n-1}^i) + \sqrt{Q_n} \cdot W_n^i \quad W_n^i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{A.12})$$

$$m_n^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_n^i \quad (\text{A.13})$$

$$P_n^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_n^i - m_n^N)(X_n^i - m_n^N)^T \quad (\text{A.14})$$

$$R_n^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{R_n} \cdot V_n^i \cdot (\sqrt{R_n} \cdot V_n^i)^T \quad V_n^i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{A.15})$$

$$G_n^N = P_n^N \cdot C_n^T \cdot (C_n \cdot P_n^N \cdot C_n^T + R_n^N)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

Appliquant une correction de la même manière que peut le faire le filtre de Kalman classique, les éléments de l'ensemble  $\hat{X}_n^i$  évoluent selon :

$$\hat{X}_n^i = X_n^i + G_n^N \cdot [Y_n - C_n \cdot X_n^i + \sqrt{R_n} \cdot V_n^i] \quad (\text{A.17})$$

Ces 6 équations constituent les étapes du filtre de Kalman d'Evensen.

Reprenant ce jeu d'équations si on s'intéresse au processus de correction il évolue pour chaque élément selon :

$$\hat{X}_n^i = A_n(\hat{X}_{n-1}^i) + \sqrt{Q_n} \cdot W_n^i + G_n^N \cdot [Y_n - C_n \cdot A_n(\hat{X}_{n-1}^i) - C_n \cdot \sqrt{Q_n} \cdot W_n^i + \sqrt{R_n} \cdot V_n^i] \quad (\text{A.18})$$

François Legland, Vu-Duc Tran et Valérie Monbet, [Tran et al. \(2006\)](#), ont étudié la convergence du filtre de l'EnKF lorsque le nombre d'éléments devient grand et montré pour la première fois des asymptotiques qui n'étaient subodorés qu'heuristiquement par les météorologistes et océanographes, et une convergence vers un processus qui n'est pas celui escompté par ce filtre. Pour notre part, on peut proposer une interprétation différente à ce processus de filtrage.

### A.3.2 Interprétation de l'EnKF par un filtrage de processus à champ moyen

L'équation sur l'évolution du processus de mise à jour [A.18](#) suggère un processus de Markov non-linéaire avec une interprétation en champ moyen pour l'EnKF. On note le processus de mise à jour  $Z_n = \hat{X}_n$  pour simplifier la notation.

Le processus de Markov  $Z_n$  suit l'équation

$$Z_n = A_n(Z_{n-1}) + \sqrt{Q_n} \cdot W_n + G_n^N \cdot [Y_n - C_n \cdot A_n(Z_{n-1}) - C_n \cdot \sqrt{Q_n} \cdot W_n + \sqrt{R_n} \cdot V_n] \tag{A.19}$$

avec  $G_n = P_n C_n^T [C_n P_n C_n^T + R_n]^{-1}$  et  $R_n = \mathbb{E}([A_n(Z_{n-1}) + \sqrt{Q_n} W_n][A_n(Z_{n-1}) + \sqrt{Q_n} W_n]^T)$  et  $R_n = \mathbb{E}([\sqrt{R_n} V_n] \sqrt{R_n} V_n^T)$

Quand on utilise un système de  $N$  particules  $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  pour approcher la dynamique de  $Z_n$ , on regarde par exemple la moyenne empirique de  $Z_n^i$  :  $\bar{Z}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_n^i$ . Dans ce cas  $\bar{Z}_n = \overline{A(Z_{n-1})} + G_n [Y_n - C_n \overline{A(Z_{n-1})}]$ .

Si  $A$  est linéaire, on retrouve exactement l'estimateur de Kalman pour le processus de correction. En tous les cas, l'estimation est exacte si le système d'observation  $(X_n, Y_n)$  est linéaire Gaussien, et c'est le meilleur estimateur linéaire sinon.

On peut remplacer dans le modèle de dynamique  $A_n(Z_{n-1}) + \sqrt{Q_n} \cdot W_n$  par une fonction plus générale  $F_n(Z_{n-1}, W_n)$ . On note  $\eta_n$  la loi de  $Z_n$ , et on considère le système observé

$$\begin{cases} Z_n = F_n(Z_{n-1}, W_n) \\ Y_n = \mathbb{E}(Z_n) + V_n \end{cases} \tag{A.20}$$

$G_n$  est clairement un opérateur de champ moyen dépendant de  $\eta_n$  et le processus de filtrage s'écrit

$$Z_n = F(Z_{n-1}, W_n) + G_n [Y_n - C_n F(Z_{n-1}, W_n) - V_n] \tag{A.21}$$

Le filtre de Kalman d'ensemble approche donc un processus de Markov non-linéaire. Si  $A$  est linéaire l'approximation est exacte et on a  $\eta_n^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{Z_n^i} \sim \eta_n = \text{Loi}(Z_n)$ . Ce processus de Markov possède une interprétation de McKean. En effet  $F(Z_{n-1}, W_n)$  correspond à l'étape de mutation du processus de filtrage avec un noyau noté  $M_n$  et  $G_n [Y_n - C_n F(Z_{n-1}, W_n) - V_n]$  qui est un processus de correction induit un noyau de sélection  $K_{n, Y_n, \eta_{n-1}}$  et on a le système dynamique

$$\eta_n = \eta_{n-1} K_{n, Y_n, \eta_{n-1}} M_n \tag{A.22}$$

issu de  $\eta_0$ . Dans le cas de bruit gaussien,

$$K_{n, Y_n, \eta_{n-1}}(x, dz) = \exp\left(-\frac{[z - x - G_n(Y_n - C_n x)]^2}{2G_n^2 R_n}\right) \tag{A.23}$$

Ainsi le filtre de Kalman d'ensemble est un filtre de Kalman en interaction par le champ moyen pour lequel on possède déjà des estimées  $L^p$ .

L'EnKF pour un ensemble de particules grand est plus cher qu'un filtre particulaire basé sur le même modèle, mais pour un petit ensemble d'éléments le filtre particulaire classique est plus risqué que le filtre d'ensemble conduit par un processus de correction plutôt que de redistribution.

# Annexe B

## Tableaux des écarts entre les vents de référence et filtrés

Nous présentons les tableaux des écarts entre un vent unidimensionnel qui nous a servi de référence et les vents filtrés dans une série d'expérience où l'on a fait varier le niveau de bruit et le nombre de particules.



$\sigma$	100	200	300	400	500	600	700
3/2	0.30711	0.27740	0.28122	0.29011	0.28932	0.25754	0.26537
1	0.19175	0.20428	0.21818	0.20087	0.19060	0.20065	0.21703
1/2	0.09717	0.10932	0.11331	0.10194	0.10732	0.10663	0.09958
1/3	0.07303	0.07537	0.07250	0.07957	0.06743	0.06730	0.08317
1/4	0.05630	0.06502	0.05125	0.05458	0.05761	0.06104	0.05784
1/5	0.05209	0.04847	0.04409	0.04839	0.04421	0.04370	0.04998
1/7	0.04425	0.03805	0.03893	0.03905	0.03943	0.03806	0.04126

TAB. B.1 – Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$	100	200	300	400	500	600	700
3/2	0.17189	0.12857	0.12436	0.14821	0.13494	0.10776	0.11442
1	0.06920	0.08465	0.09101	0.07887	0.06990	0.08776	0.08246
1/2	0.02527	0.03178	0.03244	0.02535	0.02555	0.02621	0.02792
1/3	0.01508	0.01624	0.01583	0.01690	0.01439	0.01438	0.01844
1/4	0.01126	0.01327	0.00972	0.01131	0.01262	0.01077	0.01271
1/5	0.01003	0.01044	0.00852	0.00926	0.00998	0.00919	0.01008
1/7	0.00868	0.00780	0.00799	0.00826	0.00806	0.00782	0.00861

TAB. B.2 – Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$	100	200	300	400	500	600	700
3/2	0.38247	0.33575	0.30930	0.29681	0.31364	0.29849	0.33430
1	0.24579	0.21301	0.25296	0.25961	0.22383	0.25618	0.25201
1/2	0.17428	0.17944	0.16927	0.18324	0.17784	0.15755	0.16294
1/3	0.15155	0.14614	0.15570	0.16338	0.14141	0.14650	0.14398
1/4	0.13397	0.13238	0.11978	0.11419	0.11499	0.11702	0.13512
1/5	0.13607	0.12778	0.10635	0.10808	0.13793	0.14010	0.11273
1/7	0.12948	0.13751	0.12922	0.10158	0.09773	0.12232	0.10586

TAB. B.3 – Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$	100	200	300	400	500	600	700
3/2	0.23629	0.18611	0.18113	0.15122	0.16523	0.15344	0.16557
1	0.10615	0.08359	0.11449	0.12216	0.09309	0.10956	0.10779
1/2	0.05815	0.06013	0.05365	0.06546	0.05812	0.04831	0.05222
1/3	0.04803	0.04218	0.05005	0.05403	0.04051	0.04289	0.03960
1/4	0.04009	0.03763	0.03113	0.02871	0.02914	0.02968	0.03652
1/5	0.04312	0.03508	0.02572	0.02634	0.04718	0.04234	0.02827
1/7	0.04729	0.06226	0.05080	0.02455	0.02309	0.03867	0.02838

TAB. B.4 – Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$ et modèle	100	200	300	400	500	600	700
3/2 modèle exact	0.30711	0.27740	0.28122	0.29011	0.28932	0.25754	0.26537
3/2 sans fréquence	0.27574	0.29833	0.29434	0.27034	0.27095	0.26662	0.26991
3/2 sans champ moyen	0.29719	0.31863	0.31180	0.27026	0.22921	0.26564	0.32354
1/5 modèle exact	0.05630	0.06502	0.05125	0.05458	0.05761	0.06104	0.05784
1/5 sans fréquence	0.13335	0.13365	0.12797	0.12813	0.14814	0.12367	0.13408
1/5 sans champ moyen	0.05941	0.06225	0.05960	0.05987	0.05717	0.05452	0.06037

TAB. B.5 – Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$ et modèle	100	200	300	400	500	600	700
3/2 modèle exact	0.17189	0.12857	0.12436	0.14821	0.13494	0.10776	0.11442
3/2 sans fréquence	0.12564	0.14677	0.14040	0.12080	0.13273	0.11051	0.12436
3/2 sans champ moyen	0.16312	0.16368	0.16129	0.12710	0.09688	0.11841	0.18795
1/5 modèle exact	0.01126	0.01327	0.00972	0.01131	0.01262	0.01077	0.01271
1/5 sans fréquence	0.03671	0.03598	0.03538	0.03480	0.04594	0.03198	0.03737
1/5 sans champ moyen	0.01124	0.01214	0.01142	0.01201	0.01122	0.01127	0.01133

TAB. B.6 – Ecart entre le vent de référence simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$ et modèle	100	200	300	400	500	600	700
3/2 modèle exact	0.38247	0.33575	0.30931	0.29681	0.31365	0.29850	0.28431
3/2 sans fréquence	0.33909	0.27239	0.31440	0.29114	0.29109	0.30142	0.25129
3/2 sans champ moyen	0.32507	0.28290	0.30369	0.29215	0.35491	0.32162	0.31604
1/5 modèle exact	0.13397	0.13239	0.11978	0.11419	0.11500	0.11703	0.13513
1/5 sans fréquence	0.15807	0.12842	0.13008	0.12455	0.12176	0.12371	0.12754
1/5 sans champ moyen	0.16023	0.12320	0.11629	0.15075	0.12634	0.11391	0.12055

TAB. B.7 – Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit

$\sigma$ et modèle	100	200	300	400	500	600	700
3/2 modèle exact	0.23629	0.18611	0.18113	0.15122	0.16523	0.15344	0.16557
3/2 sans fréquence	0.20296	0.12688	0.16732	0.14158	0.13935	0.15655	0.09883
3/2 sans champ moyen	0.17511	0.13450	0.15741	0.14507	0.20428	0.16276	0.18184
1/5 modèle exact	0.04009	0.03763	0.03113	0.02871	0.02914	0.02968	0.03652
1/5 sans fréquence	0.05770	0.03345	0.03593	0.03221	0.03113	0.03221	0.03288
1/5 sans champ moyen	0.05758	0.03309	0.02961	0.05150	0.03331	0.02922	0.03118

TAB. B.8 – Ecart entre le vent de référence réel et le vent filtré en utilisant le modèle complet, le modèle sans fréquence turbulente et sans champ moyen. Variance de l'erreur pour un nombre croissant de particules en fonction du niveau de bruit



donnée, modèle, $\sigma$	100	200	300	400	500	600	700
réel, exact, $\frac{3}{2}$	0.38247	0.33575	0.30931	0.29681	0.31365	0.29850	0.28431
simulé, exact, $\frac{3}{2}$	0.30711	0.27740	0.28122	0.29011	0.28932	0.25754	0.26537
réel, dégradé, $\frac{3}{2}$	0.32507	0.28290	0.30369	0.29215	0.35491	0.32162	0.31604
simulé, dégradé, $\frac{3}{2}$	0.29719	0.31863	0.31180	0.27026	0.22921	0.26564	0.32354
réel, exact, $\frac{1}{5}$	0.13607	0.12779	0.10636	0.10809	0.13793	0.14010	0.11273
simulé, exact, $\frac{1}{5}$	0.05209	0.04847	0.04409	0.04839	0.04421	0.04370	0.04998
réel, dégradé, $\frac{1}{5}$	0.13395	0.11614	0.14318	0.10926	0.11553	0.10999	0.10804
simulé, dégradé, $\frac{1}{5}$	0.05486	0.04924	0.04669	0.04848	0.04674	0.04163	0.05098

TAB. B.9 – Ecart entre le vent réel ou simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet ou sans champ moyen et 2 niveaux de bruit. Erreur en moyenne absolue pour un nombre croissant de particules

donnée, modèle, $\sigma$	100	200	300	400	500	600	700
réel, exact, $\frac{3}{2}$	0.23629	0.18611	0.18113	0.15122	0.16523	0.15344	0.15256
simulé, exact, $\frac{3}{2}$	0.17189	0.12857	0.12436	0.14821	0.13494	0.10776	0.11442
réel, dégradé, $\frac{3}{2}$	0.17511	0.13451	0.15741	0.14507	0.20428	0.16276	0.18185
simulé, dégradé, $\frac{3}{2}$	0.16312	0.16368	0.16129	0.12710	0.09688	0.11841	0.18795
réel, exact, $\frac{1}{5}$	0.04313	0.03509	0.02573	0.02634	0.04718	0.04235	0.02828
simulé, exact, $\frac{1}{5}$	0.01003	0.01044	0.00852	0.00926	0.00998	0.00919	0.01008
réel, dégradé, $\frac{1}{5}$	0.04072	0.02937	0.04716	0.02775	0.02895	0.02793	0.02649
simulé, dégradé, $\frac{1}{5}$	0.01033	0.00953	0.00948	0.00994	0.00904	0.00857	0.01034

TAB. B.10 – Ecart entre le vent réel ou simulé et le vent filtré en utilisant le modèle complet ou sans champ moyen et 2 niveaux de bruit. Variance de l’erreur pour un nombre croissant de particules

# Annexe C

## Code Scilab Filtrage d'un vent 1D Simulé

Le vent est simulé puis filtré avec le modèle lagrangien simplifié de S.B. Pope, le taux de dissipation turbulent  $\varepsilon_n$  est donné par la simulation d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable croissant que l'on dérive, le gradient de pression est la dérivée d'une somme de sinusoides.

Le filtrage utilise l'algorithme proposé et couple les systèmes Lagrangiens, le système d'observation et la trajectoire du capteur

```
//***** ..
.. *****//
// Filtrage d'un vent simulé bruité artificiellement ..
.. par un filtre particulaire avec //
// une sélection génétique, et une exploration basée ..
.. sur le modèle de turbulence de S.B. Pope, //
// et une localisation sur le chemin ..
.. d'acquisition //
//*****..
..*****

// Nettoyage préalable
clear;
stacksize(8000000);
```

```

// Répertoires de travail
HomeDir='$HOME/Simu/Donnees/';

//Chargement des fichiers
NomFic='Vent_Simule_BB.txt';
V_ref=fscanfMat(HomeDir+NomFic); // Vent de référence

// paramètres du filtre
Npart=100; // Nombre de particules
N=length(V_ref); // Longueur totale de l'échantillon
sigma_bruit=1/16; // sigma du bruit d'observation
rayon=1; // rayon de la boule de redistribution

//paramètres du modèle
dt=1/20.825; // pas de temps = 1/fréquence
sqdt=sqrt(dt); // pour ne calculer qu'une fois sqrt(dt)
C0=2.1; // C0 modèle de Pope = constante de Kolmogorov
C1=1/2+3/4*C0; // C1 modèle de Pope C1=1/2+3/4*C0
C2=3; // Coefficient d'interaction des moyennes locales

//construction du vent bruité
Y=V_ref+sigma_bruit*rand(N,1,'normal');

//Affichage du Vent et du Vent bruité
xset("window",0);
absc=[1:N];
plot2d(absc,Y,[2]);
plot2d(absc,V_ref,[3]);

//*****//
// Filtrage et Estimation du vent //
//*****//

// initialisation des matrices
Xi=zeros(Npart,N);
Xid=zeros(Npart,N);
Vi_hat=zeros(Npart,N);
Vi=zeros(Npart,N);
Xi_hat=zeros(Npart,N);
PIs=zeros(Npart,N);

```

```

Z=zeros(1,N);
Eps=zeros(1,N);
V_Fil_lisse=zeros(1,N);

// pour s= 2 on a besoin de :
Vi_hat(:,1)=ones(Npart,1)*Y(1)+sigma_bruit*rand(Npart,1,'normal');
Vi_hat(:,2)=ones(Npart,1)*Y(2)+sigma_bruit*rand(Npart,1,'normal');
Xi_hat(:,2)=0.1*rand(Npart,1,'normal');
V_Fil_lisse(1,1)=Y(1);
V_Fil_lisse(1,2)=Y(2);

//Distribution initiales des particules

// Boucle sur le temps
for s=3:N
    // MàJ des positions
    Xi(:,s)=Xi_hat(:,s-1)+Vi_hat(:,s-1)*dt;
    Xid(:,s)=Xi(:,s)+sqrt(dt)*rand(Npart,1,'normal');

    // 1ère sélection: on conditionne à rester dans la boule de taille rayon
    // on redistribue sur le reste de manière uniforme
    Hors=find(abs( Xid(:,s)-mean(Xi(:,s)) )>rayon);
    Dans=find(abs( Xid(:,s)-mean(Xi(:,s)) )<=rayon);

    if Hors<>[] then
        indice=floor(1+length(Dans)*grand(1,length(Hors),'def'));
        Xi(Hors,1:s)=Xi(Dans(indice),1:s);
        Xid(Hors,1:s)=Xid(Dans(indice),1:s);
        Vi_hat(Hors,1:s)=Vi_hat(Dans(indice),1:s);
    end

    // Mutation
    // calcul des paramètres locaux
    Z(s)=mean(Vi_hat(:,s-1)-Vi_hat(:,s-2));
    Eps(s)=dt/C0*mean((Vi_hat(:,s-1)-Vi_hat(:,s-2))^2);

    //Calcul du noyau de régularisation  $G^{\{\delta\}} = G_d$ 
    Gd=diag(0.5*ones(Npart,1));
    for i=1:Npart-1

```

```

        for k=i+1:Npart
            Gd(i,k)=exp(-C2*(Xid(i,s)-Xi(k,s))^2);
        end
    end
    Gd=Gd+Gd';
    Gd=Gd./(sum(Gd,'c')*ones(1,Npart));

    // Moyenne locale régularisée
    PIs(:,s)=Gd*Vi_hat(:,s-1);

    // Energie cinétique turbulente (paramètre k)
    K_hat=1/2*(Gd*(Vi_hat(:,s)-PIs(:,s))^2);

    // Nouvelles vitesses
    Vi(:,s)=Vi_hat(:,s-1)+Z(s)*dt-C1*Eps(s)./K_hat.*...
    ..(Vi_hat(:,s-1)-PIs(:,s))*dt+sqrt(C0*Eps(s))*sqdt...
    ..*rand(Npart,1,'normal');

    // Sélection à l'observation (code non optimisé)
    G=exp(-(Y(s)*ones(Npart,1)-Vi(:,s))^2/(2*sigma_bruit^2));

    F=cumsum(G/sum(G));
    Rej=find(rand(Npart,1,'uniform')>=G);
    NRej=length(Rej);

    Texpo=cumsum(-log(grand(1,NRej+1,'def')));
    Vexp=Texpo/Texpo(NRej+1);

    Xi_hat(:,s)=Xid(:,s);
    Vi_hat(:,s)=Vi(:,s);

    for i=1:NRej
        k=find(F>=Vexp(i));
        Xi_hat(Rej(i),1:s)=Xid(k(1),1:s);
        Vi_hat(Rej(i),1:s)=Vi(k(1),1:s);
    end

    // Fin boucle sur le temps
end

```

```
// Lissage final des trajectoires
for i=3:s
    V_Fil_lisse(i-1)=mean(Vi_hat(:,i));
end

//*****//
//*****//
//          Affichage des résultats          //
//*****//
//*****//

// Affichage des trajectoires
xset("window",1);
absc=[1:s];
plot2d(absc,V_Fil_lisse(1:s),[5]);
plot2d(absc,V_ref(1:s),[3])
titre="Vent original et filtré";
xtitle(titre, "", "") ;
```





---

Christophe Baehr

**Title : Probabilistic models for atmospheric turbulence to  
filter measurements with particle approximations**

**PhD advisors : Pierre Del Moral, Dominique Bakry et Jean-Louis  
Brenguier**

**Meteo-France, Toulouse, September 23rd 2008**

---

**Abstract** : Non-linear filtering of local turbulent fluid measurements was an unexplored domain, we have developed stochastic modelings and efficient filters. We have defined and studied the acquisition process of a vector field along a random path. We propose non-linear filters for mean-field processes and prove the convergence of their particle approximations. We deeply modify the Lagrangian models of fluids proposed by the physicists to make them compatible with the problem of filtering, the closure of these equations was obtained by conditioning the dynamics to the observation and to the acquisition process. Our algorithm allowed us to filter velocity measurements of a turbulent fluid, simulated or real in 1D to 3D flows.

**Keywords** : nonlinear filtering, Feynman-Kac formula, genealogical algorithm, particle approximation, asymptotic convergence, atmospheric turbulence, Lagrangian models, mean field equation, McKean-Vlasov

---

**Specialty : Applied Mathematics**

---

**Toulouse Mathematics Institute (UMR 5219)  
Laboratory of Statistics and Probability  
118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex 9**

**Météo-France / CNRS  
CNRM / GAME URA1357  
42 Avenue Coriolis 31057 Toulouse Cedex 1**

---

Christophe Baehr

**Titre : Modélisation probabiliste des écoulements  
atmosphériques turbulents afin d'en filtrer la mesure par  
approche particulière**

**Directeurs de thèse : Pierre Del Moral, Dominique Bakry et  
Jean-Louis Brenguier**

**Météo-France, Toulouse, le 23 Septembre 2008**

---

**Résumé :** Le filtrage non-linéaire des mesures ponctuelles d'un fluide turbulent était un sujet vierge, nous donnons ici des modélisations stochastiques et des filtres pertinents. Nous avons défini et étudié le processus d'acquisition d'un champ vectoriel le long d'un chemin aléatoire. Nous avons proposé des algorithmes de filtrage non-linéaire pour les processus à champ moyen et démontré la convergence des approximations particulières. Nous avons remanié les modèles Lagrangiens du fluide proposés par les physiciens en fermant ces équations par un conditionnement en les couplant à l'observation et au processus d'acquisition. Nos algorithmes permettent alors de filtrer les mesures de vitesses d'un fluide turbulent simulées ou réelles en écoulement 1D à 3D.

**Mots clés :** Filtrage non-linéaire, formule de Feynman-Kac, algorithme généalogique, approximation particulière, convergence asymptotique, turbulence atmosphérique, modèles Lagrangiens, équation de champ moyen, McKean-Vlasov

---

**Discipline : Mathématiques Appliquées**

---

**Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)  
Laboratoire de Statistique et Probabilités  
118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex 9**

**Météo-France / CNRS  
CNRM / GAME URA1357  
42 Avenue Coriolis 31057 Toulouse Cedex 1**