TD n°10 : Poisson et Covariance.

Exercice 0 - Questions en vrac

0.1 Dans un public de 500 personnes prises au hasard, quelle est la probabilité que 3 personnes exactement soient nées le 14 octobre ?

0.2 Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$. Montrer que pour tout $n \geq 50$, la probabilité que de l'événement $\{10 - n < X < 10 + n\}$ est au moins égale à 0,99.

0.3 Une feuille de TD contient 4 coquilles. À chaque relecture, une coquille non corrigée est corrigée avec probabilité 1/3. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. Combien de relectures faut il faire au minimum pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune coquille soit supérieure à $0,9$?

Exercice 1 - Poisson probable

Supposons qu'il existe quelque part une expérience aléatoire à laquelle on a assigné une v.a. X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = m$.

1.1 Montrer que la valeur la plus probable de l'expérience est l'entier k tel que $m - 1 \leq k \leq m$.

1.2 Dans quelles conditions peut-il y a voir deux valeurs plus probables ?

Exercice 2 - Covariance

On définit la covariance de 2 variables aléatoires X et Y par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big).$$

2.1 Montrer que si X et Y sont indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

2.2 Qu'en est il de la réciproque ?

2.3 Exprimer $\mathrm{Var}(X + Y)$ en fonction de $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$. En déduire une formule plus générale pour $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

2.4 On se donne X et Y de variances finies, et on définit :

$$r(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Montrer que $|r(X, Y)| \leq 1$. Que pensez vous du cas où on a l'égalité ?

Exercice 3 - Densité d'une somme de deux variables aléatoires

Le but de cet exercice est d'étudier le résultat suivant.
Théorème : *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires avec une densité jointe f. Alors la variable aléatoire $X+Y$ a comme densité f_{X+Y} définie par*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$$

3.1 Démontrer ce théorème dans le cas discret (typiquement, X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$).

3.2 Toujours dans le cas discret, on suppose désormais X et Y indépendantes. Montrer que la loi de $X+Y$ est la convolée de celles de X et de Y (il n'est pas nécessaire de se rappeler ce qu'est un produit de convolution pour faire cette question : exprimer l'indépendance, et voilà).

3.3 En admettant (temporairement) le théorème, donner l'analogue de la question précédente dans le cas continu, c'est-à-dire montrer que $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$.

3.4 Démontrer le théorème.
Indication : changement de variable puis théorème de Fubini.

Exercice 4 - Temps de vie d'une machine

Considérons une machine dont le temps de bon fonctionnement avant une panne est une variable aléatoire τ_1. Dès qu'elle tombe en panne, on la remplace par une autre machine de temps de vie τ_2, et ainsi de suite. On suppose que les τ_i sont des variables aléatoires identiquement distribuées à valeurs strictement positives, avec $0 < \mu = \mathbb{E}(\tau_i) < +\infty$ et $0 < \sigma^2 = \mathrm{Var}(\tau_i) < +\infty$.
On pose $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ et $N_t = \sup\{n,\ T_n \leq t\}$. N_t est donc le nombre de réparations qui ont été nécessaires jusqu'à l'instant t.

4.1 Majorer la probabilité de l'événement « $N_t < n$ ». En déduire que $N_t \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} +\infty$.

4.2 Montrer que $\dfrac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \dfrac{1}{\mu}$.

Indication : Trouver un bon encadrement pour $\dfrac{t}{N_t}$.

4.3 [difficile] On pose maintenant $X_t = \dfrac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu^3}}}$ et $n_t = \lfloor \frac{t}{\mu} + a\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu^3}} \rfloor + 1$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Montrer que $\mathbb{P}(X_t \leq a) = \mathbb{P}\left(\dfrac{T_{n_t} - n_t\mu}{\sqrt{\sigma^2 n_t}} > \dfrac{t - n_t\mu}{\sqrt{\sigma^2 n_t}}\right)$. En déduire que $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$.