TD n°04 : Départ en vacances.

Exercice 1 - Échauffement

1.1 Rappeler la densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ pour $a < b$.

Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 2]$. Soit $X := \sqrt{U}$.

1.2 Calculer la fonction de répartition F_X de X.

1.3 Calculer la densité f_X de X.

1.4 Même questions pour $Y := 1/U$.

1.5 Quelle est l'espérance de Y ? (la calculer par deux méthodes)

Exercice 2 - Ni vu ni connu.

Soit $t_1, t_2, \ldots, t_r$ le résultat d'une sélection (avec remise) de r éléments pris dans l'ensemble $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$. Soit X la variable aléatoire qui donne le plus petit r satisfaisant

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r > 1$$

2.1 Calculer une expression de $\mathbb{E}(X)$ et sa limite quand $n \to \infty$.

Pour cela, on peut considérer une variante équivalente de l'expérience, qui consiste à choisir avec remise un ensemble d'éléments $t_1, t_2, \ldots, t_r$ dans l'ensemble $(1, 2, \ldots, n)$. X est alors la variable aléatoire du plus petit r qui satisfait

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r > n.$$

Exercice 3 - Qui a pris mon siège

3.1 Les n passagers d'un avion à n sièges ont tous reçu leur numéro de siège. Ils rentrent dans l'avion un par un. Hélas, le premier passager s'installe dans un siège qui n'est pas le sien. Chaque passager suivant s'installe dans son siège s'il est libre, et sinon dans un siège actuellement vide choisi au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager se retrouve assis à son siège ?

Exercice 4 - Stagiaire L3

Bob veut recruter un stagiaire L3 parmi n candidats, et bien sûr il veut recruter le meilleur. Les candidats se présentent un par un pour l'interview, dans un ordre aléatoire. Quand il interviewe un candidat, Bob lui donne un score (pas d'ex-eaquo). La règle du jeu de l'ENS de Lyon est la suivante : après avoir interviewé un candidat, soit on l'embauche, soit on perd toute chance de l'embaucher.

Malin, Bob utilise la stratégie suivante : d'abord, interviewer m candidats, et les rejeter tous ; puis après le m-ème candidat, embaucher le premier candidat interviewé qui est meilleur (plus gros score) que tous ceux déjà interviewés.

4.1 Montrer que la probabilité que Bob choisisse le meilleur candidat est

$$P(n,m) = \frac{m}{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j-1}$$

4.2 En déduire que $\lim_n \max_m P(n,m) \geq 1/e$.

Exercice 5 - Fonctions de distributions

5.1 Donner la fonction de distribution d'une variable aléatoire de Bernouilli

5.2 On pose $X = Y + Z$, avec Y variable aléatoire de Bernouilli et Z uniformément distribuée sur $[0,1]$. Donner la fonction de distribution de X.

5.3 Construire une espace de probabilité (Ω,F,P) et une variable aléatoire sur Ω avec une distribution exponentielle.

5.4 Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction F soit la fonction de distribution d'une variable aléatoire.