TD n° 12 - Algèbre Linéaire

Exercice 1. *Les moindres carrés.*

Soit A une matrice $m \times n$. On cherche à résoudre “au mieux” le système linéaire

$$Ax = b, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

où $n \neq m$, ou quand $n = m$, mais avec A non inversible. On note

$$||y|| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme euclidienne de y sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $J(x) = ||Ax - b||^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le problème d'optimisation

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } J(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} J(y) \tag{2}$$

a au moins une solution. On note X_b l'ensemble des solutions de (2).

2. Montrer que (2) est équivalent à :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A^T A x = A^T b \tag{3}$$

3. Discuter de l'existence et unicité de la solution de (3) en fonction du rang de A.

4. Montrer que le problème de minimisation :

$$\text{Trouver } x \in X_b \text{ tel que } ||x||^2 = \min_{y \in X_b} ||y||^2 \tag{4}$$

a une unique solution $\tilde{x}$ qu'on appelle pseudo-solution de (1).

5. Montrer que $\tilde{x}$ est caractérisé par $\tilde{x} \in X_b \cap (Ker\ A^T A)^{\perp}$.

Exercice 2. *Méthode de Givens Rapide*

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On veut construire une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telle que
- $MA = S$ triangulaire supérieure ;
- $MM^T = D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_m)$, $d_i > 0$

et appliquer cette factorisation de A dans la résolution de systèmes au sens des moindres carrés.

1. Donner la factorisation QR de A en termes de M, D et S.
2. On considère maintenant $m = 2$. Soient $x = (x_1, x_2)^T$ et $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ ($d_i > 0$) donnés.
   (a) On définit
   $$M_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$
   Supposons $x_2 \neq 0$. Calculer $M_1 x$ et $M_1 D M_1^T$.
   Comment choisir α_1 et β_1 de façon à ce que la deuxième composante de $M_1 x$ soit nulle et que $M_1 D M_1^T$ soit diagonale ?
   Pour le choix précédent déterminer γ_1 tel que
   $$M_1 x = \begin{pmatrix} x_2(1+\gamma_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_1 D M_1^T = \begin{pmatrix} d_2(1+\gamma_1) & 0 \\ 0 & d_1(1+\gamma_1) \end{pmatrix}$$

(b) Supposons $x_1 \neq 0$. On définit

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Choisir α_2 et β_2 de façon à ce que

$$M_2 x = \begin{pmatrix} x_1(1+\gamma_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 D M_2^T = \begin{pmatrix} d_1(1+\gamma_2) & 0 \\ 0 & d_2(1+\gamma_2) \end{pmatrix}$$

et déterminer γ_2

(c) Montrer que l'on peut toujours choisir M_i $(i = 1, 2)$ de façon à ce que le "facteur de croissance" $(1 + \gamma_i)$ soit inférieur à 2.

3. Soit maintenant $m \in \mathbb{N}$ quelconque. Définir les matrices $M_1(p, q)$ et $M_2(p, q)$ telles que

$$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ ou } = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

– $e_q^T M_i(p, q)x = 0$;
– $M_i D M_i^T$ matrice diagonale, avec $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n), d_i > 0$

Ces matrices M_i sont appelées *matrice de Givens rapide*.

4. Décrire l'algorithme qui utilise les transformations de Givens rapides pour réduire $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ à la forme triangulaire supérieure (*méthode de Givens rapide*) :

$$MA = R, \quad MM^T = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m).$$

Les calculs doivent être faits sur place.

Quel est le coût de cet algorithme ? Comparer avec le coût de la méthode de Householder pour réduire A à la forme triangulaire supérieure.

5. Application à la résolution d'un système linéaire au sens des moindres carrés.
   (a) Comment profiter des résultats fournis par l'algorithme précédent pour résoudre

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \text{ avec } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad (m > n), \quad b \in \mathbb{R}^m ?$$

   (b) Quelles modifications introduire dans l'algorithme de la méthode de Givens rapide pour qu'il résolve le problème de moindres carrés de la question précédente ?

6. *Application numérique* : résoudre au sens des moindres carrés par la méthode de Givens rapide le système

$$Ax = b, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

7. Considérons maintenant le problème de moindres carrés

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|D(Ax - b)\|_2 \tag{5}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D = \mathrm{diag}(d_i)$ $(d_i > 0)$. Cela correspond à donner un poids différent à chaque équation du système.

Soit M une matrice produit de matrices de Givens rapide vérifiant

$$\begin{cases} MA = R \text{ triangulaire supérieure} \\ MD^{-2}M^T = \tilde{D} = \mathrm{diag}(\tilde{d}_i), \quad \tilde{d}_i > 0 \end{cases}$$

Comment peut–on résoudre le problème (5) ?

Quelles adaptations faire à l'algorithme précédent ?